Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Закалюкин, Особенности контакта с 3-флагами, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:09:50

Особенности контакта с 3-флагами*

© 1999. В. М. Закалюкин

1. Введение. Рассматриваются локальные особенности контакта образа гладкого отображения f гладкого многообразия M^m в аффинное пространство A^n с заданным флагом (т. е. с набором вложенных друг в друга аффинных подпространств).

Группа F_s -эквивалентностей, состоящая из диффеоморфизмов пространства-прообраза и диффеоморфизмов пространства-образа, сохраняющих флаг, действует на пространстве ростков отображений f .

Орбиты этого действия возникают в различных контекстах теории особенностей. В частности, они связаны с краевыми особенностями [2, 6], с особенностями функций на многообразии с углами [8], с проекциями полных пересечений на прямую [5], с уплощениями проективных кривых [9], с особенностями дробей [1], а также с особенностями диаграмм отображений и типичными особенностями функции относительного минимума, используемой в теории оптимального управления [3, 4].

Их приложения в дифференциальной геометрии приводят к ряду новых классификационных результатов о контактах поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве со сферами и окружностями [7].

В этой заметке получена классификация простых особенностей контакта образа регулярного вложения с флагом, состоящим из трех элементов последовательных размерностей. Указаны примыкания классов, связанных с угловыми особенностями, и дано описание форм пересечений на гомологиях слоя Милнора.

2. Простые особенности для 3-флагов. Рассмотрим пару, состоящую из ростка отображения f , $f(0) = 0$, и флага $F = \{L_1^{k_1} \subset \dots \subset L_s^{k_s} \subset A^n\}$. Определим r -надстройку $(\tilde{f}, \tilde{F})$ этой пары следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{f}: M \times A^r &\rightarrow A^n \times A^r, & \tilde{f}: (x, z) &\mapsto (f(x), z), \\ \tilde{F} &= \{\tilde{L}_1^{k_1} \subset \dots \subset \tilde{L}_s^{k_s} \subset A^n \times A^r\},\end{aligned}$$

где $\tilde{L}_i^{k_i} = L_i^{k_i} \times \{0\}$, $i = 1, \dots, s$.

Обозначим через π_i линейную проекцию $A^n \rightarrow A^{n-k_i}$, ядро которой совпадает с L_i .

Если росток отображения $\pi_s \circ f$ имеет ранг r , то, очевидно, f является F -эквивалентным r -надстройке ограничения $\hat{f} = f|_{M_0^{m-r}}: M_0^{m-r} \rightarrow A^{n-r}$ отображения f на росток подмногообразия M_0 , касательное пространство к которому совпадает с ядром дифференциала $\pi_s \circ f$.

В частности, если f трансверсально элементу максимальной размерности (старшему элементу) L_s флага, то для редуцированной пары $(\hat{f}, \hat{F})$ ее старший элемент $\hat{L}_s = A^{n-r}$ совпадает с объемлющим пространством образа $\hat{f}$. Следовательно, класс F_s -эквивалентностей исходного ростка отображения определен

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 99-01-00147, и ИНТАС, грант 1644.

F_{s-1} -классом ростка приведенного отображения по отношению к приведенному флагу $\hat{L}_1 \subset \dots \subset \hat{L}_{s-1} \subset A^{n-r}$, состоящему из $s-1$ элементов.

Определим также r -поднятие $(\bar{f}, \bar{F})$ пары (f, F) следующей конструкцией:

$$\begin{aligned}\bar{f}: M^m &\rightarrow A^n \times A^r, & \bar{f}: x &\mapsto (f(x), 0), \\ \bar{F} &= \{L_1 \times A^r \subset \dots \subset L_s \times A^r \subset A^n \times A^r\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что r -поднятие ростка вложения f F -эквивалентно всякому отображению $M^m \rightarrow A^n \times A^r$ вида $x \mapsto (f(x), g(x))$, где g — произвольное отображение.

Росток пары называется *простым*, если росток во всякой близкой точке всякого отображения, близкого к некоторому представителю данного ростка отображения, F -эквивалентен одному из конечного набора ростков.

ТЕОРЕМА. *Список простых классов особенностей контакта образов голоморфных отображений (а также вложений полных пересечений) с флагом в $\mathbb{C}^N$, состоящим из трех элементов, имеющих соседние размерности, при условии, что размерности пересечения образа с каждым из элементов флага неотрицательны, состоит из надстроек и поднятий следующих классов:*

(1) классов $A_k, B_k, C_k, D_k, E_{6-8}, F_4, C_{k,l}, F_m$ особенностей контакта с флагом из двух элементов [7];

(2) вложения, образ которого является регулярной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданной уравнением $w = f(x, y, z)$, где $x, y, w \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^{n-2}$, причем флаг состоит из подпространств $\{w = 0\} \leftarrow \{w = x = 0\} \leftarrow \{w = x = y = 0\}$; здесь функция f имеет одну из следующих нормальных форм, в которых через $Q(z)$ обозначена невырожденная квадратичная форма соответствующих переменных:

$$\begin{aligned}(B_m, B_2): & \quad f = Q(z) + x^m + y^2, & 2 \leq m, \\ (C_m, B_m): & \quad f = Q(z) + xy + y^m, & 3 \leq m, \\ (B_p, C_q): & \quad f = x^p + yz_1 + z_1^q + Q(z_2 \dots z_{n-2}), & q \geq 3, p \geq 2, \\ (F_4, B_3): & \quad f = x^2 + y^3 + Q(z), \\ (C_3, F_4): & \quad f = xz_1 + y^2 + z_1^3 + Q(z_2 \dots z_{n-2}), \\ (F_4, F_4): & \quad f = x^2 + y^2 + z_1^3 + Q(z_2 \dots z_{n-2});\end{aligned}$$

(3) вложения, образ которого является регулярным 3-многообразием в $\mathbb{C}^5$, заданным уравнениями $w = f(x, y, z)$, $u = g(x, y, z)$, где $x, y, z, u, w \in \mathbb{C}$, и флаг состоит из подпространств $\{w = 0\} \leftarrow \{w = x = 0\} \leftarrow \{w = x = u = 0\}$; здесь пары функций (f, g) следующие:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{m,p,q}: & \quad f = x^m + y^2 + z^2, \quad g = y^p + z^q, \quad k \geq 2, p, q \geq 2, \\ \tilde{C}_{3,m}: & \quad f = xy + y^3 + z^2, \quad g = y^m, \quad 2 \leq m, \\ \tilde{C}_{3,m}^*: & \quad f = xy + y^3 + z^2, \quad g = zy^m, \quad 1 \leq m, \\ \tilde{F}_{4,m}: & \quad f = x^2 + y^3 + z^2, \quad g = y^m, \quad 2 \leq m, \\ \tilde{F}_{4,m}^*: & \quad f = x^2 + y^3 + z^2, \quad g = zy^m, \quad 1 \leq m.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Диаграмма примыканий классов особенностей из п. 2 теоремы имеет следующий вид:

2. Эти классы тесно связаны с особенностями функций на многообразиях с углами (т.е. с трансверсальными пересечениями двух или более гладких границ). Группа преобразований, сохраняющих угол, сохраняет, очевидно, и флаг, образованный одной компонентой границы, ее пересечением с другой компонентой и т.д. Большая часть унимодальных угловых особенностей [8, 10] отвечает простым флаговым особенностям из приведенного в п. 2 списка.

3. Следуя работе [1], список из п. 2 теоремы можно интерпретировать как список простых особенностей дробей голоморфных функций в пространстве с выделенной комплексной границей (например, бесконечностью).

4. Определим слой Милнора особенности контакта с флагом гиперповерхности, являющейся образом вложения $i: X \rightarrow \mathbb{C}^m$ как набор слоев Милнора пересечений $i(X)$ с элементами L_j флага. Эти слои являются локальными подмногообразиями $\tilde{i}(X) \cup L_j$, где $\tilde{i}$ — малое возмущение вложения i . Каждый из них гомотопически эквивалентен букету сфер соответствующей размерности. Общее число этих исчезающих сфер во всех размерностях назовем *числом Милнора* флаговой особенности.

Заметим, что для всех простых классов, указанных в теореме, число Милнора совпадает с числом параметров соответствующей версальной деформации (числом Тюринга).

5. Для двух элементов флага соседних размерностей возникает граничная пара соответствующих слоев Милнора (аналогично теории краевых особенностей функций [2]). Разветвленное (над границей) двулистное накрытие позволяет определить форму пересечений на пространстве относительных гомологий пары.

Определим форму пересечений для особенности контакта с флагом из трех элементов похожим образом. Например, подстановка $x = \tilde{x}^2$, $y = \tilde{y}^2$ переводит класс простой особенности из п. 2 теоремы в $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -симметричный росток функции. Рассмотрим отмеченный базис B (являющийся симметричным) исчезающих гомологий этой особенности. Пусть $B_0 \subset B$ — подмножество, образованное циклами, отвечающими критическим точкам, принадлежащим подмножеству прообраза $\{x \neq 0, y = 0\}$.

На пространстве исчезающих гомологий, порожденных $B \setminus B_0$, действует группа симметрий $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ограничение формы пересечений на инвариантную часть этого подпространства назовем *формой пересечений флаговой особенности*.

Классы особенностей из п. 2 теоремы имеют следующие диаграммы Дынкина, задающие соответствующие формы пересечений:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Труды МИАН, **221**, 48–68 (1998).
2. Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНТИ, Т. 39, 1989.
3. Davydov A. A. Geometry in nonlinear control and differential inclusions. Banach Center Publications, Vol. 32, 1995, pp. 167–181.
4. Давыдов А. А., Закалюкин В. М. Труды МИАН, **220**, 113–129 (1998).
5. Горюнов В. В. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 77–82 (1981).
6. Ляшко О. В. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 3, 28–36 (1983).
7. Закалюкин В. М. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 2, 73–76 (1997).
8. Duc N. H. Kodai Math. J., **17**, 627–635 (1994).
9. Казарян М. Э. УМН, **46**, вып. 5, 79–120 (1991).
10. Tsukada T. Preprint Hokkaido Univ., No. 389, 1997.

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию
28 декабря 1998 г.

УДК 517.9

Степенная проблема моментов Гамбургера как часть спектральной теории канонических систем

© 1999. И. С. Кац

В своей замечательной работе [1] М. Г. Крейн установил, что степенная проблема моментов Стилтеса — это проблема отыскания всех спектральных функций струны особого класса (см. по этому поводу [2, § 13]). Цель настоящей работы — сформулировать аналогичный результат для степенной проблемы моментов Гамбургера (сокращенно СПМГ) и канонической системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Необходимая информация о теории СПМГ. Приведенные сведения взяты, главным образом, из [3] и изложены в удобной для автора форме. Впредь неубывающую на $\mathbf{R}$ функцию $\rho(\lambda)$ будем называть нормированной, если $\rho(\lambda) =$