Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Кац, Степенная проблема моментов Гамбургера как часть спектральной теории канонических систем, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 81–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:16:10

На пространстве исчезающих гомологий, порожденных $B \setminus B_0$, действует группа симметрий $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ограничение формы пересечений на инвариантную часть этого подпространства назовем *формой пересечений флаговой особенности*.

Классы особенностей из п. 2 теоремы имеют следующие диаграммы Дынкина, задающие соответствующие формы пересечений:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Труды МИАН, **221**, 48–68 (1998).
2. Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНТИ, Т. 39, 1989.
3. Davydov A. A. Geometry in nonlinear control and differential inclusions. Banach Center Publications, Vol. 32, 1995, pp. 167–181.
4. Давыдов А. А., Закалюкин В. М. Труды МИАН, **220**, 113–129 (1998).
5. Горюнов В. В. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 77–82 (1981).
6. Ляшко О. В. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 3, 28–36 (1983).
7. Закалюкин В. М. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 2, 73–76 (1997).
8. Duc N. H. Kodai Math. J., **17**, 627–635 (1994).
9. Казарян М. Э. УМН, **46**, вып. 5, 79–120 (1991).
10. Tsukada T. Preprint Hokkaido Univ., No. 389, 1997.

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию
28 декабря 1998 г.

УДК 517.9

Степенная проблема моментов Гамбургера как часть спектральной теории канонических систем

© 1999. И. С. Кац

В своей замечательной работе [1] М. Г. Крейн установил, что степенная проблема моментов Стилтеса — это проблема отыскания всех спектральных функций струны особого класса (см. по этому поводу [2, §13]). Цель настоящей работы — сформулировать аналогичный результат для степенной проблемы моментов Гамбургера (сокращенно СПМГ) и канонической системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Необходимая информация о теории СПМГ. Приведенные сведения взяты, главным образом, из [3] и изложены в удобной для автора форме. Впредь неубывающую на $\mathbf{R}$ функцию $\rho(\lambda)$ будем называть нормированной, если $\rho(\lambda) =$

$(\rho(\lambda - 0) + \rho(\lambda + 0))/2$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\rho(0) = 0$. СПМГ состоит в отыскании таких нормированных неубывающих функций $\sigma(\lambda)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda) = s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\{s_k\}_0^\infty$ — заданная числовая последовательность. Не нарушая общности, будем считать впредь, что $s_0 = 1$.

Введем в рассмотрение определители $D_n = |s_{j+k}|_{j,k=0}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Установлено, что СПМГ (1) разрешима в том и только в том случае, когда $D_n \geq 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$, причем в случае, когда $D_n > 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ (его называют невырожденным), и только в этом случае все решения этой СПМГ имеют бесконечное множество точек роста. В вырожденном случае, когда $D_m = 0$ при некотором $m \in \mathbf{N}$, СПМГ (1) имеет только одно решение. Мы рассматриваем ниже только невырожденный случай.

Со СПМГ (1) ассоциируется разностное уравнение для последовательности $\{y_k\}_{k=-1}^\infty$:

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = z y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

В нем $b_{-1} = 1$, а коэффициенты a_k , b_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, вычисляются по формулам, выражающим их через элементы последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ (см. [3, гл. 1, п. 1.3; 4, §1, п. 1]), причем оказывается, что $b_k > 0$, $a_k \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Вводятся две последовательности полиномов $\{P_n(z)\}_{n=-1}^\infty$ и $\{Q_n(z)\}_{n=-1}^\infty$. Обе они являются решениями уравнения (2), причем первая определяется условиями $y_{-1} = 0$, $y_0 = 1$, а вторая — условиями $y_{-1} = -1$, $y_0 = 0$. С помощью этих последовательностей дается описание всех решений СПМГ [3, гл. III, п. 2.2].

2. Необходимая информация о спектральной теории канонических систем. Пусть $I = [0, L)$ с $L \leq +\infty$. На I рассматривается каноническое линейное дифференциальное уравнение фазовой размерности 2 (каноническая система)

$$\frac{dx}{dt} J = z x \mathcal{H}(t), \quad 0 \leq t < L, \quad (3)$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, z — комплексный параметр, а $\mathcal{H}(t) = (h_{ij}(t))_{i,j=1}^2$ — заданная локально суммируемая на I матрица-функция, такая, что $\mathcal{H}(t) \geq 0$ для любого $t \in I$. Ее называют гамильтонианом. Не нарушая общности, будем считать, что $\text{tr } \mathcal{H}(t) = 1$ для любого $t \in I$. Вектор-функция $t \mapsto u(t) = (u^{(1)}(t) \ u^{(2)}(t))$ считается решением уравнения (3), если она абсолютно непрерывна и равенство $u'(t)J = zu(t)\mathcal{H}(t)$ справедливо при п. в. $t \in I$.

Символом $(*)$ будем обозначать граничную задачу для уравнения (3) и граничного условия $x|_{t=0} = (0 \ 1)$, а через $\varphi(t, z) = (\varphi^{(1)}(t, z) \ \varphi^{(2)}(t, z))$ — решение этой граничной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Промежуток $\Delta \subset I$ называем $\mathcal{H}$ -неделимым (сокращенно $\mathcal{H}$ -н.п.; этот термин был введен в [5] и [6]) типа θ , если $\mathcal{H}(t) = \xi_\theta^\top \xi_\theta$ п. в. на Δ , где $\xi_\theta = (\cos \theta \ \sin \theta)$ — матрица-строка, а $\top$ — символ транспонирования. $\mathcal{H}$ -н.п. называется максимальным, если он не является правильной частью другого $\mathcal{H}$ -н.п.

Пусть H — линейное множество измеримых на I вектор-функций $f(t) = (f^{(1)}(t) \ f^{(2)}(t))$, таких, что

$$\int_I f(t) \mathcal{H}(t) (f(t))^* dt < \infty$$

и для любого максимального $\mathcal{H}$ -н.п. Δ существует такая константа $c_{f,\Delta}$, что $f(t) \xi_\theta^\top = c_{f,\Delta}$ при п.в. $t \in \Delta$, где θ — тип этого $\mathcal{H}$ -н.п. Вектор-функцию $f \in H$ относим к множеству H' , если множество $\{t \in I \mid f(t) \neq (0 \ 0)\}$ ограничено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нормированную неубывающую функцию $\tau(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, называют *спектральной функцией граничной задачи (*)*, если для любой вектор-функции $f \in H'$ и функции F , определенной при любом $\lambda \in \mathbf{R}$ равенством

$$F(\lambda) = \int_I f(t) \mathcal{H}(t) (\varphi(t, \lambda))^\top dt,$$

справедливо «равенство Парсеваля»

$$\int_I f(t) \mathcal{H}(t) (f(t))^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\tau(\lambda).$$

Граничная задача (*) имеет хотя бы одну спектральную функцию. Спектральная функция единственна в том и только в том случае, когда $L = +\infty$.

3. Включение СПМГ в спектральную теорию канонических систем. Пусть задана невырожденная СПМГ (1). Введем определители

$$E_n = |s_{i+k+1}|_{i,k=0}^n, \quad C_n = |s_{i+k-1}|_{i,k=0}^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

считая, что $s_{-1} = 0$. Положим

$$l_0 = 1, \quad l_n = (C_n^2 + E_n^2)(D_{n-1}D_n)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$\theta_0 = \pi/2$ и определим θ_n при $n = 1, 2, \dots$ из уравнений

$$\operatorname{tg} \theta_n = -E_n/C_n, \quad \text{если } C_n \neq 0, \quad \operatorname{ctg} \theta_n = 0, \quad \text{если } C_n = 0. \quad (5)$$

Установлено, что $l_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\theta_n \not\equiv \theta_{n-1} \pmod{\pi}$, $n = 1, 2, \dots$.

Положим, далее, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + l_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\tilde{L} = \lim t_n$.

Построим гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}(t)$, положив

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = \xi_{\theta_n}^\top \xi_{\theta_n} \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ясно, что его значения не зависят от выбора решений θ_n уравнений (5). Заметим, что $[0, \tilde{L})$ — это объединение максимальных $\tilde{\mathcal{H}}$ -н.п.

ТЕОРЕМА. В случае невырожденности СПМГ (1) множество ее решений совпадает с множеством спектральных функций граничной задачи (*) с $\mathcal{H}(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)$.

Теперь условие определенности СПМГ, т.е. единственности ее решения, приобретает «естественный» вид: СПМГ (1) является определенной в том и только в том случае, когда $\tilde{L} = +\infty$.

Отметим некоторые связи между объектами классической теории СПМГ, кратко изложенной в п. 1, и параметрами гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}(t)$. Если, исходя из уравнений (5), определить θ_n так, чтобы выполнялись неравенства $\theta_n < \theta_{n+1} <$

$\theta_n + \pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, что всегда возможно, то окажутся справедливыми при $n = 0, 1, 2, \dots$ равенства

$$P_n(z) = \sqrt{l_n} \tilde{\varphi}(t_n, z) \xi_{\theta_n}^\top, \quad Q_n(z) = -\sqrt{l_n} \tilde{\psi}(t_n, z) \xi_{\theta_n}^\top, \quad (6)$$

где $\tilde{\varphi}(t, z) = (\tilde{\varphi}^{(1)}(t, z) \ \tilde{\varphi}^{(2)}(t, z))$, $\tilde{\psi}(t, z) = (\tilde{\psi}^{(1)}(t, z) \ \tilde{\psi}^{(2)}(t, z))$ — решения уравнения (3) с $\tilde{\mathcal{H}}(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)$ и $L = \tilde{L}$, удовлетворяющие условиям $\tilde{\varphi}(0, z) = (0 \ 1)$, $\tilde{\psi}(0, z) = (1 \ 0)$. Если, кроме того, положить $\theta_{-1} = 0$, то

$$a_n = -\frac{\operatorname{ctg}(\theta_n - \theta_{n-1}) + \operatorname{ctg}(\theta_{n+1} - \theta_n)}{l_n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{l_n l_{n+1}} \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)} \quad (7)$$

при $n = 0, 1, 2, \dots$. Кстати, из равенств (7) непосредственно вытекает достаточное условие Карлемана и достаточное условие Денниса и Уолла определенности СПМГ, приведенные в [3, гл. I, разд. «Дополнения и задачи»], а из (6) вытекает критерий определенности Гамбургера (см. [3, гл. II, разд. «Дополнения и задачи», п. 10]), ибо $(P_n(0))^2 + (Q_n(0))^2 = l_n$.

4. Спектральная функция струны Крейна (см. [2]) может оказаться решением СПМГ (1) в том и только в том случае, когда для последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ разрешима проблема моментов Стильтеса, т.е. когда СПМГ (1) имеет решение σ , множество точек роста которого содержится в $[0, +\infty)$. Доказано, что для таких последовательностей и только для них $0 < \operatorname{ctg} \theta_n < \operatorname{ctg} \theta_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. В одном направлении (для таких последовательностей) это вытекает из того, что в этом случае $E_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (см. [2, §13]), а в соответствии с детерминантным тождеством Сильвестра $C_n E_{n+1} - C_{n+1} E_n = D_n^2$ для любой последовательности $\{s_k\}_0^\infty$.

В случае когда СПМГ (1) имеет нечетное решение (для этого необходимо, чтобы $s_n = 0$ при всех нечетных n ; к такой СПМГ легко сводится проблема моментов Стильтеса), промежуток $[0, \tilde{L})$ представляет собой объединение $\tilde{\mathcal{H}}$ -н.п. только двух типов: 0 и $\pi/2$. Последнее согласуется с приведенным в [7, гл. VI, §8] преобразованием струны в каноническую систему применительно к стилтесовской струне ([2, §13]).

5. Тот факт, что каждое решение заданной СПМГ (1) является спектральной функцией какой-то граничной задачи типа (*), моментально вытекает из результата Л. де Бранжа [8, Theorem XII], согласно которому всякая нормированная неубывающая функция τ , такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \lambda^2)^{-1} d\tau(\lambda) < +\infty,$$

является спектральной функцией какой-то граничной задачи этого типа. Осталось, однако, неясным, все ли решения заданной СПМГ являются спектральными функциями одной граничной задачи типа (*). Сомнения развеяла сформулированная выше теорема. Более того, здесь построен гамильтониан этой единственной граничной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. ДАН СССР, **87**, 881–884 (1952). 2. Кац И. С., Крейн М. Г. Дополнение II к кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, М., 1968, с. 648–737. 3. Агизер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые

вопросы анализа, связанные с нею. Физматгиз, М., 1961. 4. Крейн М. Г. Об одном специальном классе целых и мероморфных функций, в кн.: Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ Украины, Харьков, 1938, с. 208–252. 5. Кац И. С. Функци. анализ и его прил., 17, вып. 4, 86–87 (1983). 6. Кац И. С. Функци. анализ и его прил., 29, вып. 3, 75–78 (1995). 7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967. 8. de Branges L. Trans. Amer. Math. Soc., 99, 118–152 (1961).

Одесская государственная
академия пищевых технологий

Поступило в редакцию
10 марта 1998 г.

УДК 515.16

Условия дискретности спектра для операторов Шрёдингера на многообразии

© 1999. В. А. Кондратьев, М. А. Шубин

В этой работе мы указываем обобщение критерия дискретности спектра А. М. Молчанова [3] на случай оператора Шрёдингера на римановом многообразии ограниченной геометрии.

Пусть (M, g) — риманово многообразие (g — риманова метрика на M), $\dim M = n$, и $\Delta = \Delta_g$ — оператор Бельтрами–Лапласа метрики g , действующий на скалярных функциях. В дальнейшем мы будем считать, что (M, g) — многообразие ограниченной геометрии, т. е. выполнены следующие два условия:

- (а) $r_{\text{inj}} > 0$, где r_{inj} — радиус инъективности многообразия M ;
- (б) $|\nabla^m R| \leq C_m$, где $\nabla^m R$ есть m -я ковариантная производная тензора кривизны.

Условие (а) эквивалентно тому, что задаваемое метрикой g экспоненциальное отображение $\exp_x: T_x M \rightarrow M$ определено и является диффеоморфизмом шара $B(0, r) \subset T_x M$ на шар $B(x, r) \subset M$ при любом $r < r_{\text{inj}}$. Тем самым в каждом таком шаре $B(x, r)$ определены нормальные (или геодезические) координаты, индуцированные декартовыми (ортогональными) координатами на $T_x M$. Условие (б) эквивалентно существованию такого $r_0 \in (0, r_{\text{inj}})$, что производные функций перехода между двумя системами нормальных координат в шарах $B(x, r_0)$ и $B(y, r_0)$ ограничены постоянными, зависящими только от порядка производной. Из условия (а) следует также полнота многообразия M . Примерами многообразий ограниченной геометрии служат любые однородные пространства (например, пространство Лобачевского).

Рассмотрим оператор Шрёдингера $H = -\Delta + V(x)$, где потенциал V — вещественнозначная локально ограниченная измеримая функция на M , полуограниченная снизу, т. е. $V(x) \geq -C$, $x \in M$, с некоторой постоянной C . В этом случае хорошо известно, что оператор H существенно самосопряжен в $L^2(M)$ (здесь $L^2(M)$ строится по стандартной гладкой мере, задаваемой метрикой g), и мы будем обозначать той же буквой H соответствующий самосопряженный оператор в $L^2(M)$.

Будем говорить, что H имеет *дискретный спектр*, если его спектр $\sigma(H)$ состоит из собственных значений конечной кратности (с единственной точкой накопления $+\infty$). Для краткости будем записывать дискретность спектра равенством $\sigma = \sigma_d$.