Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кондратьев, М. А. Шубин, Условия дискретности спектра для операторов Шрёдингера на многообразии, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:48:24

вопросы анализа, связанные с нею. Физматгиз, М., 1961. 4. Крейн М. Г. Об одном специальном классе целых и мероморфных функций, в кн.: Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ Украины, Харьков, 1938, с. 208–252. 5. Кац И. С. Функци. анализ и его прил., 17, вып. 4, 86–87 (1983). 6. Кац И. С. Функци. анализ и его прил., 29, вып. 3, 75–78 (1995). 7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967. 8. de Branges L. Trans. Amer. Math. Soc., 99, 118–152 (1961).

Одесская государственная
академия пищевых технологий

Поступило в редакцию
10 марта 1998 г.

УДК 515.16

Условия дискретности спектра для операторов Шрёдингера на многообразии

© 1999. В. А. Кондратьев, М. А. Шубин

В этой работе мы указываем обобщение критерия дискретности спектра А. М. Молчанова [3] на случай оператора Шрёдингера на римановом многообразии ограниченной геометрии.

Пусть (M, g) — риманово многообразие (g — риманова метрика на M), $\dim M = n$, и $\Delta = \Delta_g$ — оператор Бельтрами–Лапласа метрики g , действующий на скалярных функциях. В дальнейшем мы будем считать, что (M, g) — многообразие ограниченной геометрии, т. е. выполнены следующие два условия:

- (а) $r_{\text{inj}} > 0$, где r_{inj} — радиус инъективности многообразия M ;
- (б) $|\nabla^m R| \leq C_m$, где $\nabla^m R$ есть m -я ковариантная производная тензора кривизны.

Условие (а) эквивалентно тому, что задаваемое метрикой g экспоненциальное отображение $\exp_x: T_x M \rightarrow M$ определено и является диффеоморфизмом шара $B(0, r) \subset T_x M$ на шар $B(x, r) \subset M$ при любом $r < r_{\text{inj}}$. Тем самым в каждом таком шаре $B(x, r)$ определены нормальные (или геодезические) координаты, индуцированные декартовыми (ортогональными) координатами на $T_x M$. Условие (б) эквивалентно существованию такого $r_0 \in (0, r_{\text{inj}})$, что производные функций перехода между двумя системами нормальных координат в шарах $B(x, r_0)$ и $B(y, r_0)$ ограничены постоянными, зависящими только от порядка производной. Из условия (а) следует также полнота многообразия M . Примерами многообразий ограниченной геометрии служат любые однородные пространства (например, пространство Лобачевского).

Рассмотрим оператор Шрёдингера $H = -\Delta + V(x)$, где потенциал V — вещественнозначная локально ограниченная измеримая функция на M , полуограниченная снизу, т. е. $V(x) \geq -C$, $x \in M$, с некоторой постоянной C . В этом случае хорошо известно, что оператор H существенно самосопряжен в $L^2(M)$ (здесь $L^2(M)$ строится по стандартной гладкой мере, задаваемой метрикой g), и мы будем обозначать той же буквой H соответствующий самосопряженный оператор в $L^2(M)$.

Будем говорить, что H имеет *дискретный спектр*, если его спектр $\sigma(H)$ состоит из собственных значений конечной кратности (с единственной точкой накопления $+\infty$). Для краткости будем записывать дискретность спектра равенством $\sigma = \sigma_d$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие постоянные $c > 0$, $r_0 > 0$, зависящие только от (M, g) , что дискретность спектра оператора H равносильна выполнению следующего условия:*

- (D) *для любой последовательности $\{x_k \mid k = 1, 2, \dots\} \subset M$, такой, что $x_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, для любого $r < r_0$ и для любых компактных подмножеств $F_k \subset B(x_k, r)$, для которых $\text{cap } F_k \leq cr^{n-2}$ при $n \geq 3$ и $\text{cap } F_k \leq c |\ln r|$ при $n = 2$,*

$$\int_{B(x_k, r) - F_k} V(x) dx \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Здесь $\text{cap}(F_k)$ означает ньютонову емкость множества F_k в нормальных координатах с центром в x_k , а dx — риманов элемент объема.

Замена риманова элемента объема dx на лебегову меру в нормальных координатах приводит к эквивалентному условию.

Укажем основные идеи доказательства, следующего схеме Молчанова [3], который рассмотрел случай $M = \mathbf{R}^n$ (со стандартной метрикой) с $n \geq 3$ и указал явно постоянную $c = (4n)^{-4n}$ (с заменой шаров радиуса r на кубы со стороной r). В случае оператора Шрёдингера в $\mathbf{R}^2$ соответствующий критерий вместе с гораздо более общими результатами (более общие операторы, в том числе высокого порядка) установлен Мазьей, использовавшим другой, более мощный, но менее элементарный метод (см. [2] и имеющиеся там ссылки).

Без ущерба для общности мы можем считать, что $V(x) \geq 1$, $x \in M$. Тогда дискретность спектра равносильна предкомпактности множества $\mathcal{L} = \{u \in C_0^\infty(M) \mid (Hu, u) \leq 1\}$ в $L^2(M)$. Последнее ввиду теоремы Соболева о компактности вложения эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R > 0$, что

$$\int_{M - B(x_0, R)} |u(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad u \in \mathcal{L}. \quad (1)$$

Для любого открытого подмножества $\Omega \subset M$ введем числа $\lambda(\Omega)$ и $\mu(\Omega)$ как нижние грани спектров оператора H в Ω при граничных условиях Дирихле и Неймана соответственно. Как обычно, мы используем вариационное описание $\lambda(\Omega)$ и $\mu(\Omega)$. Будем писать $\Omega \rightarrow \infty$, если $\text{dist}(x_0, \Omega) \rightarrow \infty$ для какой-нибудь фиксированной точки $x_0 \in M$. Используя (1), мы легко получаем следующую лемму:

ЛЕММА 1. (а) *Если $\sigma = \sigma_d$, то $\lambda(\Omega) \rightarrow \infty$ при $\Omega \rightarrow \infty$.*

(b) *Если $\mu(M - \overline{B(x_0, R)}) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$, то $\sigma = \sigma_d$.*

Значения $\lambda(\Omega)$ и $\mu(\Omega)$ соразмерны на шарах фиксированного и достаточно малого радиуса, как показывает следующая

ЛЕММА 2. *Существуют такие положительные постоянные $C_1, C_2 > 0$, что для любого $r \in (0, r_0)$*

$$\mu(B(x, r)) \leq \lambda(B(x, r)) \leq C_1 \mu(B(x, r)) + C_2 r^{-2}, \quad x \in M.$$

Эта лемма может быть выведена из аналогичной оценки в [3] с учетом того, что квадратичные формы оператора H на малых шарах в M и соответствующих шарах в $\mathbf{R}^n$ (в нормальных координатах) соразмерны.

Теперь надо использовать тот факт, вытекающий из одного рассуждения М. Громова [1], что M имеет покрытия фиксированной конечной кратности шарами сколь угодно малого радиуса. Это приводит к такой лемме.

ЛЕММА 3. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $\sigma = \sigma_d$;
- (b) $\lambda(B(x, r)) \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $r \in (0, r_0)$;
- (c) $\mu(B(x, r)) \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $r \in (0, r_0)$.

Теперь мы можем использовать оценку

$$\mu(B(x, r)) \leq r^{-n} \left[C_1 \int_{B(x, r) - F} V(x) dx + C_2 \operatorname{cap}(F) \right], \quad (2)$$

где $r < r_0$, F — такое компактное подмножество $B(x, r)$, что $\operatorname{cap}(F) \leq c \cdot \operatorname{cap}(B(x, r))$, а постоянные c , C_1 , C_2 зависят только от M . Эта оценка также может быть выведена из аналогичной оценки Молчанова, полученной в [3] для случая $M = \mathbf{R}^n$ и кубов вместо шаров. Из оценки (2) и леммы 3 вытекает, что условие (D) теоремы 1 необходимо для дискретности спектра (с той же постоянной c , что и в оценке емкости выше). Некоторая модификация рассуждений [3] приводит к доказательству достаточности условия (D).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gromov M. Comment. Math. Helv., **56**, 179–195 (1981).
2. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
3. Молчанов А. М. ТММО, **2**, 169–199 (1953).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Department of Mathematics,
Northeastern University, Boston

Поступило в редакцию
28 апреля 1998 г.

В исправленном виде
29 сентября 1998 г.

УДК 517.5+517.43

Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач*

© 1999. В. Н. ПИВОВАРЧИК

При рассмотрении малых колебаний неоднородной гладкой струны с закрепленными концами, когда часть струны находится под действием вязкого трения (коэффициент трения $p = \operatorname{const} > 0$), возникает следующая задача Штурма–Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра:

$$y'' + (\lambda^2 - q(x) - i\lambda p(x))y = 0, \quad (1)$$

$$y(\lambda, 0) = y(\lambda, a) = 0, \quad (2)$$

где

(а) $q(x) \in L_2(0, a)$ — вещественная функция, такая, что оператор A , заданный равенствами $Ay = -y'' + q(x)y$, $D(A) = \{y \in W_2^2(0, a) : y(0) = y'(a) = 0\}$, строго положителен, и

$$(б) p(x) = \begin{cases} p = \operatorname{const} > 0, & \text{если } x \in [0, b], \\ 0, & \text{если } x \in (b, a]. \end{cases}$$

*Исследования выполнены при поддержке Правительства Украины (грант УМ1-298) и Фонда гражданских исследований и развития (США).