Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Пивоварчик, Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:22:11

ЛЕММА 3. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $\sigma = \sigma_d$;
- (b) $\lambda(B(x, r)) \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $r \in (0, r_0)$;
- (c) $\mu(B(x, r)) \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $r \in (0, r_0)$.

Теперь мы можем использовать оценку

$$\mu(B(x, r)) \leq r^{-n} \left[C_1 \int_{B(x, r) - F} V(x) dx + C_2 \operatorname{cap}(F) \right], \quad (2)$$

где $r < r_0$, F — такое компактное подмножество $B(x, r)$, что $\operatorname{cap}(F) \leq c \cdot \operatorname{cap}(B(x, r))$, а постоянные c , C_1 , C_2 зависят только от M . Эта оценка также может быть выведена из аналогичной оценки Молчанова, полученной в [3] для случая $M = \mathbf{R}^n$ и кубов вместо шаров. Из оценки (2) и леммы 3 вытекает, что условие (D) теоремы 1 необходимо для дискретности спектра (с той же постоянной c , что и в оценке емкости выше). Некоторая модификация рассуждений [3] приводит к доказательству достаточности условия (D).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gromov M. Comment. Math. Helv., **56**, 179–195 (1981).
2. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
3. Молчанов А. М. ТММО, **2**, 169–199 (1953).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Department of Mathematics,
Northeastern University, Boston

Поступило в редакцию
28 апреля 1998 г.

В исправленном виде
29 сентября 1998 г.

УДК 517.5+517.43

Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач*

© 1999. В. Н. ПИВОВАРЧИК

При рассмотрении малых колебаний неоднородной гладкой струны с закрепленными концами, когда часть струны находится под действием вязкого трения (коэффициент трения $p = \operatorname{const} > 0$), возникает следующая задача Штурма–Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра:

$$y'' + (\lambda^2 - q(x) - i\lambda p(x))y = 0, \quad (1)$$

$$y(\lambda, 0) = y(\lambda, a) = 0, \quad (2)$$

где

(а) $q(x) \in L_2(0, a)$ — вещественная функция, такая, что оператор A , заданный равенствами $Ay = -y'' + q(x)y$, $D(A) = \{y \in W_2^2(0, a) : y(0) = y'(a) = 0\}$, строго положителен, и

$$(б) p(x) = \begin{cases} p = \operatorname{const} > 0, & \text{если } x \in [0, b], \\ 0, & \text{если } x \in (b, a]. \end{cases}$$

*Исследования выполнены при поддержке Правительства Украины (грант УМ1-298) и Фонда гражданских исследований и развития (США).

Обозначим спектр задачи (1)–(2), который состоит из нормальных собственных значений, через $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, где $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Собственные значения этой и других задач будем нумеровать, учитывая кратности, так, что $\operatorname{Re} \lambda_{k+1} \geq \operatorname{Re} \lambda_k$ и для не чисто мнимых собственных значений $\lambda_{-k} = -\bar{\lambda}_k$ (в остальном нумерация произвольна). Это возможно, так как все рассматриваемые в настоящей работе спектры симметричны относительно мнимой оси и симметрично расположенные собственные значения имеют одинаковую кратность. Легко видеть, что $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ для всех k .

Рассмотрим еще две задачи Штурма–Лиувилля, возникающие, если ту же струну закрепить в точке, отделяющей демпфированную часть струны от недемпфированной:

$$y'' + (\lambda^2 - q(x) - i\lambda p)y = 0, \quad (3)$$

$$y(\lambda, 0) = y(\lambda, b) = 0, \quad (4)$$

$$y'' + (\lambda^2 - q(x))y = 0, \quad (5)$$

$$y(\lambda, b) = y(\lambda, a) = 0. \quad (6)$$

Обозначим через $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ ($\{\nu_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$) спектр задачи (3)–(4) (задачи (5)–(6)). Очевидно, что $\operatorname{Im} \nu_k > 0$, $\operatorname{Im} \nu_k^{(1)} = 0$ для всех k . Обозначим через

$$S(q_i(x), a_i, b_i, p_i) \quad (i = 1, 2)$$

упорядоченную тройку спектров ($\{\lambda_{ik}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, $\{\nu_{ik}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, $\{\nu_{ik}^{(1)}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$) задач (1)–(2), (3)–(4) и (5)–(6) соответственно с потенциалами $q_i(x)$ и с положительными константами a_i, b_i, p_i ($a_i > b_i$), удовлетворяющими условиям (а), (б).

ТЕОРЕМА. Из равенства $S(q_1(x), a_1, b_1, p_1) = S(q_2(x), a_2, b_2, p_2)$ следует, что $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $p_1 = p_2$ и $q_1(x) \stackrel{n.g.}{=} q_2(x)$.

Обратная задача для уравнения (1) на полуоси и на всей оси рассмотрена в [1–3]. В [4] получены достаточные условия единственности решения обратной задачи на всей оси. На конечном интервале при чисто мнимом $p(x)$ обратная задача по двум спектрам для уравнения (1) решена в [5]. Впервые обратная задача по трем спектрам (для случая $p = 0$) рассмотрена в [6, 7]. В [7] показано, что, в отличие от нашего случая ($p > 0$), при $p = 0$ потенциал $q(x)$ является единственным потенциалом, соответствующим заданной тройке спектров, только если эти спектры не пересекаются. В [6] получены необходимые условия, а также достаточные условия (близкие к необходимым), для того, чтобы три последовательности были спектрами задач Штурма–Лиувилля ($p = 0$) на интервалах $[0, a]$, $[0, a/2]$ и $[a/2, a]$ с краевыми условиями Дирихле.

Приведем процедуру восстановления параметров a, b, p и потенциала $q(x)$ по заданной тройке спектров $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, $\{\nu_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ (и одновременно дадим краткое доказательство сформулированной выше теоремы).

Из асимптотик спектров задач (3)–(4) и (5)–(6) (см. [8, с. 233]) следует, что

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi k}{\nu_k}, \quad a = b + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi k}{\nu_k^{(1)}}, \quad p = -2i \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\nu_k - \frac{\pi k}{b} \right).$$

Для нахождения $q(x)$ построим целые функции

$$s(\lambda, b) \stackrel{\text{def}}{=} b \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{\pi k} \right)^2 (\nu_k^2 - \lambda^2 - ip\nu_k + ip\lambda), \quad (7)$$

$$s_1(\lambda, a) \stackrel{\text{def}}{=} (a - b) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a - b}{\pi k} \right)^2 (\nu_k^{(1)2} - \lambda^2), \quad (8)$$

$$s(\lambda, a) \stackrel{\text{def}}{=} K \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right),$$

где K находится из условия

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau s(i\tau, a)}{\text{sh } \tau a} = 1.$$

Функция $s(\lambda, b)$ ($s(\lambda, a)$) является значением при $x = b$ (при $x = a$) решения $s(\lambda, x)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям $s(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) - 1 = 0$. Функция $s_1(\lambda, a)$ является значением при $x = a$ решения $s_1(\lambda, x)$ уравнения (5), удовлетворяющего условиям $s_1(\lambda, b) = s'_1(\lambda, b) - 1 = 0$. Из очевидного равенства

$$s(\lambda, a) = s'(\lambda, b)s_1(\lambda, a) + s(\lambda, b)c_1(\lambda, a), \quad (9)$$

где $c_1(\lambda, x)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям $c_1(\lambda, b) - 1 = c'(\lambda, b) = 0$, следует, что

$$c_1(\nu_k^{(1)}, a) = \frac{s(\nu_k^{(1)}, a)}{s(\nu_k^{(1)}, b)}. \quad (10)$$

Отметим, что $s(\nu_k^{(1)}, b) \neq 0$, так как $\text{Im } \nu_k^{(1)} = 0$, а $\text{Im } \nu_k > 0$. С другой стороны, из [8, с. 18] следует, что

$$c_1(\lambda, a) = \cos \lambda(a - b) - M_1 \frac{\sin \lambda(a - b)}{\lambda} + \frac{g_1(\lambda)}{\lambda}, \quad (11)$$

где $M_1 = \pi^{-1} \int_b^a q(x) dx$, а $g_1(x)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq a - b$, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ при вещественном λ . Из асимптотики собственных значений $\nu_k^{(1)}$ задачи (5)–(6) (см. [8, с. 225]) получаем

$$M_1 = -\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{k^2 \pi}{a - b} + k\nu_k^{(1)} \right).$$

Из формул (9), (10) получаем

$$g_1(\nu_k^{(1)}) = \nu_k^{(1)}(c_1(\nu_k^{(1)}, a) - \cos \nu_k^{(1)}(a - b)) + M_1 \sin \nu_k^{(1)}(a - b).$$

Очевидно, что $\{g_1(\nu_k^{(1)})\}_{k \in \mathbb{Z}_0} \in l_2$. Тогда $g_1(\lambda)$ можно найти по формуле

$$g_1(\lambda) = s_1(\lambda, a) \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{g_1(\nu_k^{(1)})}{(ds_1(\lambda, a)/d\lambda)|_{\lambda=\nu_k^{(1)}}(\lambda - \nu_k^{(1)})}, \quad (12)$$

где $s_1(\lambda, a)$ задана формулой (8). Интерполяционный ряд (12) сходится равномерно на любом компакте комплексной плоскости, а на вещественной оси — по норме пространства $L_2(-\infty, \infty)$ [9]. Подставляя (12) в (11), получаем $c_1(\lambda, a)$.

Единственность построенной функции $c_1(\lambda, a)$ следует из того, что формула (12) осуществляет биекцию между l_2 и L_{a-b}^2 [9], где L_{a-b}^2 — пространство целых функций экспоненциального типа $\leq a - b$, принадлежащих $L_2(-\infty, \infty)$, на вещественной оси. Множество корней $\{\mu_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ функции $c_1(\lambda, a)$ совпадает со спектром краевой задачи

$$y'' + (\lambda^2 - q(x))y = 0,$$

$$y'(\lambda, b) = y(\lambda, a) = 0.$$

По двум спектрам $\{\nu_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, $\{\mu_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ однозначно восстанавливается часть потенциала $q(x)$ на интервале $[b, a]$ по известной процедуре [8, 10, 11]. Для восстановления части потенциала $q(x)$ на $[0, b]$ построим функцию

$$s'(\lambda, b) \stackrel{\text{def}}{=} \cos \sqrt{\lambda^2 - ip\lambda} b + M \frac{\sin \sqrt{\lambda^2 - ip\lambda} b}{\sqrt{\lambda^2 - ip\lambda}} + \frac{g(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - ip\lambda}},$$

где

$$M = -\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{k^2 \pi}{b} + k \sqrt{\nu_k^2 - ip\nu_k} \right),$$

$$g(\lambda) = s(\lambda, b) \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{g_1(\nu_k)}{(ds(\lambda, b)/d\lambda)|_{\lambda=\nu_k} (\lambda - \nu_k)}.$$

Корни $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ функции $s'(\lambda, b)$ являются собственными значениями задачи

$$y'' + (\lambda^2 - ip\lambda - q(x))y = 0,$$

$$y(\lambda, 0) = y'(\lambda, b) = 0.$$

По двум спектрам $\{\mu_k^2 - ip\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$, $\{\nu_k^2 - ip\nu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ проекция потенциала $q(x)$ на $[0, b]$ восстанавливается однозначно [8, 10, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Jaulent M., Jean C. Commun. Math. Phys., **28**, 177–220 (1972).
2. Jaulent M. J. Math. Phys., **17**, No. 7, 1351–1360 (1976).
3. Jaulent M., Jean C. Ann. Inst. H. Poincaré, sec. A, **25**, No. 2, 105–137 (1976).
4. Aktosun T., Klaus M., van der Mee C. J. Math. Phys., **39**, No. 4, 1957–1992 (1998).
5. Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш. Докл. АН АзССР, **37**, № 2, 19–23 (1981).
6. Pivovarchik V. N. An inverse Sturm–Liouville problem by three spectra. To be published in Integral Equations Operator Theory.
7. Gesztesy F., Simon B. To be published in: Birman Birthday Volume in Advances in Mathematical Sciences (V. Buslaev and M. Solomyak, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
8. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
9. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, Vol. 150, 1996.
10. Левитан Б. М., Гасымов М. Г. УМН, **19**, вып. 2 (116), 3–63 (1964).
11. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. Наука, М., 1984.

Одесская государственная академия
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
20 января 1998 г.