Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, Гомологические неравенства для конечных топологических цепей Маркова, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 91–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 09:17:15

УДК 517.987.5+517.938

Гомологические неравенства для конечных топологических цепей Маркова*

© 1999. С. В. САВЧЕНКО

Пусть X^+ — множество последовательностей $x = \{x_i\}_{i=0}^\infty$, соответствующих односторонне-бесконечным путям конечного связного апериодического графа с D вершинами и матрицей смежности A , и S — отображение сдвига влево: $Sx = x'$, где $x'_i = x_{i+1}$. В тихоновской топологии прямого произведения множество X^+ является компактом, а S — непрерывным конечнократным ($\text{card } S^{-1}x \leq D$) сюръективным отображением. Пара (S, X^+) называется односторонней топологической цепью Маркова. Обозначим через $C(X^+)$ пространство непрерывных функций на X^+ и для любого $\psi \in C(X^+)$ определим оператор Рюэля L_ψ на функциях $g \in C(X^+)$ по следующему правилу:

$$(L_\psi g)(x) = \sum_{x' \in S^{-1}x} e^{\psi(x')} g(x'). \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Пусть для $f \in C(X^+)$ существует положительная функция h , удовлетворяющая уравнению $L_{-f}h = \lambda h$ с некоторым $\lambda > 0$. Тогда функция $f(x) - \ln h(x) + \ln h(Sx) + \ln \lambda$ неотрицательна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что если $L_{-f}h = \lambda h$ и $h > 0$, то $L_{-f}\mathbf{1} = \mathbf{1}$, где $f'(x) = f(x) - \ln h(x) + \ln h(Sx) + \ln \lambda$ и $\mathbf{1}$ — функция на X^+ , тождественно равная единице. По определению оператора Рюэля (см. (1)) последнее равенство возможно только тогда, когда функция f' неотрицательна. Лемма доказана.

Обозначим через $I(X^+)$ множество инвариантных относительно S вероятностных мер на пространстве X^+ и положим $P(f) = \sup\{h_\mu(S) + \int f d\mu : \mu \in I(X^+)\}$, где $h_\mu(S)$ — энтропия отображения S относительно меры μ .

Пусть $B_m(x) = \{x' \in X^+ : x'_0 = x_0, \dots, x'_m = x_m\}$. Для $f \in C(X^+)$ положим $|f|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in X^+\}$, $\text{var}_m f = \max\{|f(x) - f(x')| : x \in X^+, x' \in B_m(x)\}$ и $|f|_\theta = \sup\{\theta^{-m} \text{var}_m f : m \geq 0\}$, где $\theta \in (0, 1)$. Если $|f|_\theta < \infty$, то функция f является гёльдеровской относительно метрики $d_\theta(x, x') = \theta^{N(x, x')}$, где $N(x, x') = \inf\{m : x_m \neq x'_m\}$.

Две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых существует такая непрерывная функция $u(x)$, что $f(x) = g(x) - u(x) + u(Sx)$, называются гомологичными. В [1] и [2] было показано, что если сумма сдвигов гёльдеровской функции f вдоль любой периодической траектории равна нулю (это условие формально слабее, но, на самом деле, эквивалентно требованию равенства нулю интеграла $\int f d\mu$ для любого $\mu \in I(X^+)$), то она гомологична нулю (этот результат известен теперь как теорема Лившица). В нашей работе мы фактически рассмотрим вопрос о гомологичности неотрицательным и положительным функциям. Положим $c(f) = \min\{\int f d\mu : \mu \in I(X^+)\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f — гёльдеровская функция на пространстве X^+ с $|f|_\theta < \infty$. Тогда существует гёльдеровская функция u с $|u|_\theta < \infty$, такая, что

$$f(x) - u(x) + u(Sx) \geq c(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольную последовательность положительных чисел α_n , стремящихся к бесконечности. Так как для любой гёльдеровской функции ψ существует положительное гёльдеровское решение h уравнения $L_\psi h = e^{P(\psi)} h$ (см. [3, теорема 1.7]; равенство $P(\psi) = \ln \lambda$ следует из доказательства теоремы 1.16 в [3]), то при любом n можно определить функцию $f'_n(x) \equiv f(x) + \alpha_n^{-1} P(-\alpha_n f) - \alpha_n^{-1} \ln h_n(x) + \alpha_n^{-1} \ln h_n(Sx)$, где h_n — положительное решение уравнения

$$L_{-\alpha_n f} h_n = e^{P(-\alpha_n f)} h_n.$$

В силу леммы 1 она неотрицательна. В [3] при доказательстве леммы 1.8 было показано, что для любой гёльдеровской функции ψ с $|\psi|_\theta < \infty$ решение h уравнения $L_\psi h = e^{P(\psi)} h$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$h(x) \leq h(x') \exp(2|\psi|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta^{m+1}) \quad \text{при } x' \in B_m(x). \quad (2)$$

Кроме того, умножая, если надо, h на подходящую константу, можно добиться справедливости неравенства

$$K^{-1} \leq h(x) \leq K, \quad (3)$$

где $\ln K = MP(\psi) + M|\psi|_\infty + 2|\psi|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta$ и M — любое натуральное число, при котором все элементы матрицы A^M положительны. В нашем случае $\psi = -\alpha_n f$. Поэтому

$$h_n(x) \leq h_n(x') \exp(2\alpha_n|f|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta^{m+1}) \quad \text{при } x' \in B_m(x), \quad (2')$$

$$K_n^{-1} \leq h_n(x) \leq K_n, \quad (3')$$

где $\ln K_n = MP(-\alpha_n f) + \alpha_n M|f|_\infty + 2\alpha_n|f|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta$.

В силу (2') имеем

$$|\alpha_n^{-1} \ln h_n(x) - \alpha_n^{-1} \ln h_n(x')| \leq 2|f|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta^{m+1} \quad \text{при } x' \in B_m(x).$$

Таким образом, $|\alpha_n^{-1} \ln h_n|_\theta \leq 2|f|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta$. В силу (3') справедливо неравенство $-\alpha_n^{-1} \ln K_n \leq \alpha_n^{-1} \ln h_n(x) \leq \alpha_n^{-1} \ln K_n$, и, следовательно, $|\alpha_n^{-1} \ln h_n|_\infty \leq \alpha_n^{-1} MP(-\alpha_n f) + M|f|_\infty + 2|f|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta$. Без ограничения общности можно считать, что $c(f) = 0$. В этом случае $0 \leq P(-\alpha_n f) \leq P(0) \leq \ln D$. Поэтому последовательность функций $\alpha_n^{-1} \ln h_n$ ограничена по норме $\|\cdot\|_\theta \equiv |\cdot|_\infty + |\cdot|_\theta$. По теореме Асколи–Арцела существует такая последовательность номеров n_k , что последовательность функций $\alpha_{n_k}^{-1} \ln h_{n_k}$ сходится по норме $|\cdot|_\infty$ к гёльдеровской функции u с $\|u\|_\theta \leq M|f|_\infty + 4|f|_\theta(1-\theta)^{-1}\theta$. Соответственно последовательность неотрицательных функций $f'_{n_k}(x)$ сходится к неотрицательной гёльдеровской функции $f(x) - u(x) + u(Sx)$. В заключение заметим, что если функция f зависит только от $n+1$ координат $x_0, \dots, x_n$, то функция $u(x)$ будет зависеть от n координат (см. [4]). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 была сформулирована В. Пэрри в качестве гипотезы и доказана Пуном [5] для функций, зависящих от конечного числа координат и принимающих только целочисленные значения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C(X^+)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция u_ε , зависящая от конечного числа $n = n(f, \varepsilon)$ координат, что

$$f(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx) > c(f) - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_n(x) = \min\{f(x') : x' \in B_n(x)\}$. Очевидно, функция $f_n(x)$ зависит только от первых $n+1$ координат. По теореме Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на метрическом компакте, n можно выбрать так, чтобы $|f - f_n|_\infty < \varepsilon$. Теорема 1 гарантирует существование такой функции u_ε , зависящей от n координат, что $f_n(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx) \geq c(f_n)$. В силу выбора f_n функция $f - f_n$ неотрицательна. Поэтому минимум функции $f(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx))$ не меньше, чем $c(f_n) > c(f) - \varepsilon$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты теоремы 1 и следствия 1 без труда переносятся на случай пространства X двусторонне-бесконечных последовательностей. При этом для доказательства «двустороннего» аналога теоремы 1 нужно воспользоваться тем фактом, что любая гёльдеровская функция на пространстве X гомологична гёльдеровской функции, зависящей только от координат с неотрицательными номерами (см. [6]).

Автор благодарит участников семинара МГУ по динамическим системам под руководством акад. Д. В. Аносова и проф. А. М. Степина, которыми в ноябре 1995 г. была сформулирована задача о гомологичности положительным функциям. Автор также признателен проф. М. Полликоту и д-ру Р. Шарпу за предоставление ссылок и необходимых сведений по истории вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц А. Н. Матем. заметки, **10**, №5, 555–564 (1971).
2. Лившиц А. Н. Изв. АН СССР, Сер. матем., **36**, №6, 1296–1320 (1972).
3. Боуэн Р. Методы символической динамики. Сб. Математика. Мир, М., 1979.
4. Parry W., Pollicott M. Asterisque, **187–188**, 1–268 (1990).
5. Poon Y-T. Trans. Amer. Math. Soc., **311**, 515–533 (1989).
6. Синай Я. Г. УМН, **27**, №4, 21–64 (1972).

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: sav@icp.ac.ru

Поступило в редакцию
12 марта 1998 г.

УДК 513.88

Гладкие изометричные погружения в бесконечномерную сферу*

© 1999. И. Г. ЦАРЬКОВ, Е. Т. ШАВГУЛИДЗЕ

Работа посвящена равномерно гладким погружениям и вложениям бесконечномерных банаховых пространств в произвольные окрестности нуля, причем в случае гильбертова пространства удастся построить равномерно гладкое изометричное погружение в гильбертову сферу. Эта задача восходит к известным

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-01-00378, 97-01-00228).