Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Е. Т. Шавгулидзе, Гладкие изометричные погружения в бесконечномерную сферу, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:32:11

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C(X^+)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция u_ε , зависящая от конечного числа $n = n(f, \varepsilon)$ координат, что

$$f(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx) > c(f) - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_n(x) = \min\{f(x') : x' \in B_n(x)\}$. Очевидно, функция $f_n(x)$ зависит только от первых $n+1$ координат. По теореме Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на метрическом компакте, n можно выбрать так, чтобы $|f - f_n|_\infty < \varepsilon$. Теорема 1 гарантирует существование такой функции u_ε , зависящей от n координат, что $f_n(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx) \geq c(f_n)$. В силу выбора f_n функция $f - f_n$ неотрицательна. Поэтому минимум функции $f(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(Sx))$ не меньше, чем $c(f_n) > c(f) - \varepsilon$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты теоремы 1 и следствия 1 без труда переносятся на случай пространства X двусторонне-бесконечных последовательностей. При этом для доказательства «двустороннего» аналога теоремы 1 нужно воспользоваться тем фактом, что любая гёльдеровская функция на пространстве X гомологична гёльдеровской функции, зависящей только от координат с неотрицательными номерами (см. [6]).

Автор благодарит участников семинара МГУ по динамическим системам под руководством акад. Д. В. Аносова и проф. А. М. Степина, которыми в ноябре 1995 г. была сформулирована задача о гомологичности положительным функциям. Автор также признателен проф. М. Полликоту и д-ру Р. Шарпу за предоставление ссылок и необходимых сведений по истории вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц А. Н. Матем. заметки, **10**, №5, 555–564 (1971).
2. Лившиц А. Н. Изв. АН СССР, Сер. матем., **36**, №6, 1296–1320 (1972).
3. Боуэн Р. Методы символической динамики. Сб. Математика. Мир, М., 1979.
4. Parry W., Pollicott M. Asterisque, **187–188**, 1–268 (1990).
5. Poon Y-T. Trans. Amer. Math. Soc., **311**, 515–533 (1989).
6. Синай Я. Г. УМН, **27**, №4, 21–64 (1972).

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: sav@icp.ac.ru

Поступило в редакцию
12 марта 1998 г.

УДК 513.88

Гладкие изометричные погружения в бесконечномерную сферу*

© 1999. И. Г. ЦАРЬКОВ, Е. Т. ШАВГУЛИДЗЕ

Работа посвящена равномерно гладким погружениям и вложениям бесконечномерных банаховых пространств в произвольные окрестности нуля, причем в случае гильбертова пространства удастся построить равномерно гладкое изометричное погружение в гильбертову сферу. Эта задача восходит к известным

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-01-00378, 97-01-00228).

результатам Нэша [1, 2], из которых следует (см. [3]) такое утверждение: всякое компактное риманово многообразие размерности n допускает изометричное C^1 -вложение (C^1 -погружение) в сколь угодно малую окрестность нуля из $\mathbb{R}^{2n+1}$ (соответственно $\mathbb{R}^{2n}$).

Напомним, что изометричным вложением метрического пространства X в метрическое пространство Y называется инъективное отображение, которое спрямляемые кривые из пространства X переводит в спрямляемые кривые пространства Y с сохранением длины.

Единичной сферой S банахова пространства X называется множество всех векторов, имеющих единичную норму в X . Под равномерной гладкостью отображения F из области банахова пространства X в банахово пространство X будем понимать равномерную ограниченность производных всех порядков в смысле Фреше отображения F .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство; тогда существует равномерно гладкое изометричное вложение пространства X в единичную сферу S .

Для построения такого вложения на пространстве X рассматривается гауссовская цилиндрическая мера μ с единичным корреляционным оператором и нулевым средним (см. [4]). В пространстве $L_2(X, \mu)$ берется замкнутое линейное подпространство H , порожденное функциями $g_y(x) = e^{(y, y+x)}$ для любых y из X ($x \in X$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в X). Легко видеть, что H является гильбертовым сепарабельным пространством. Определим отображение F из пространства X в пространство H , полагая $F(y) = g_y$. Нетрудно проверить, что оно является равномерно гладким изометричным вложением пространства X в единичную сферу пространства H . Для завершения построения отождествим единичную сферу пространства H с единичной сферой S пространства X .

Способ построения отображения F и теорема о неявной функции позволяют доказать более сильную теорему:

ТЕОРЕМА 2. Существуют окрестность нуля U в сепарабельном гильбертовом пространстве X , окрестность W множества $F(S)$ и диффеоморфизм $G: U \times X \rightarrow W$, такие, что G и G^{-1} равномерно непрерывны вместе со всеми их производными Фреше произвольного порядка и сужение отображения G на $\{0\} \times X$ совпадает с отображением F .

Пусть теперь S — единичная сфера в банаховом пространстве $C([0, 1])$.

ТЕОРЕМА 3. Существует равномерно гладкое отображение $F: C([0, 1]) \rightarrow S$, сохраняющее длину кривой и удовлетворяющее неравенству

$$\|F(x) - F(y)\| \geq \min\left\{\frac{2}{\pi}\|x - y\|, 2\right\} \quad \forall x, y \in C([0, 1]).$$

Пусть X — подпространство в $C([0, 1])$, состоящее из всех таких функций $x \in C([0, 1])$, что $x(t) = -x(1-t)$ при $t \in [0, 1/3]$ и $x(t) = 6(1/2 - t)x(1/3)$ при $t \in [1/3, 2/3]$. Построим линейную изометрию $\tau: C([0, 1]) \rightarrow X$. Зададим отображение $G: X \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^2)$, полагая $G(x) = (\cos x, \sin x)$. Пусть $\nu: C([0, 1], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([0, 1])$ — линейное изометричное вложение. Искомое отображение задается формулой $F = \nu \circ G \circ \tau$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — сепарабельное банахово пространство; тогда существует равномерно гладкое изометричное вложение пространства X в единичную сферу $S \subset C([0, 1])$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \in [1, +\infty]$; тогда существует отображение $F : L_p([0, 1]) \rightarrow S$ ($S \subset L_p([0, 1])$ — единичная сфера), сохраняющее длину кривой и удовлетворяющее неравенству

$$\|F(x) - F(y)\| \geq \delta \min\{\|x - y\|, 1\} \quad \forall x, y \in L_p([0, 1]),$$

где $\delta = \delta((x - y)/\|x - y\|) > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nash J. Ann. Math., **63**, 20–63 (1956). **2.** Нэш Дж. Математика, **1**, № 2, 3–16 (1957). **3.** Громов М. Л., Розлин В. А. УМН, **25**, вып. 5, 3–62 (1970). **4.** Го Х. С. Гауссовские меры на банаховых пространствах. Мир, М., 1979.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
29 сентября 1997 г.