Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Голенищева-Кутузова, Д. Р. Лебедев, Сплетающие операторы и солитонные уравнения, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 1–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:09:34

Сплетающие операторы и солитонные уравнения*

© 1999. М. И. ГОЛЕНИЩЕВА-КУТУЗОВА, Д. Р. ЛЕБЕДЕВ

§ 1. Введение

Хорошо известна глубокая взаимосвязь между теорией солитонных уравнений и классическими бесконечномерными алгебрами Ли. Эта взаимосвязь была первоначально открыта Сато [17] и затем развита в работах школы Киото [1, 2] с помощью бозонно-фермионного соответствия в двумерной квантовой теории поля. Основная идея может быть проиллюстрирована на примере уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Множество решений иерархии Кадомцева–Петвиашвили можно проинтерпретировать как GL_∞ -орбиту $\mathfrak{D} = GL_\infty |0\rangle$ вакуумного вектора $|0\rangle$ в базисном представлении $V(\Lambda_0)$ группы GL_∞ . Система уравнений, задающая $\mathfrak{D}$, может быть определена с помощью оператора

$$S = \text{Res} |_{z=0} \Psi(z) \otimes \Psi^*(z),$$

где $\Psi(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i z^{-i-1/2}$, $\Psi^*(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^* z^{-i-1/2}$ — заряженные фермионные поля. Оператор S коммутирует с диагональным действием группы GL_∞ на $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — фермионное пространство Фока, и удовлетворяет условию $S(|0\rangle \otimes |0\rangle) = 0$. Отсюда следует, что любой элемент $\tau \in \mathfrak{D}$ удовлетворяет уравнению

$$S(\tau \otimes \tau) = 0. \quad (1.1)$$

Используя бозонно-фермионное соответствие, можно переписать это уравнение в виде системы уравнений с частными производными в билинейной форме Хироты. Таким образом, мы получаем иерархию Кадомцева–Петвиашвили. Используя так называемую процедуру редукции, можно выписать иерархию билинейных уравнений Хироты для орбиты вектора старшего веса в базисном представлении группы петель SL_n . Это приводит к иерархии Кортевега–де Фриза при $n = 2$, иерархии Буссинеска при $n = 3$ и т. д. Применяя $[n_1, \dots, n_s]$ -редукцию к s -компонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили [12, 16], мы получаем иерархии, соответствующие другой реализации R_w базисного представления аффинной алгебры Каца–Мууди $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$, $n = n_1 + \dots + n_s$. Известно, что все эти реализации параметризуются классами сопряженных элементов группы Вейля W алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ [13]. Аналогичный подход может применяться к группе O_∞ [12, 16].

*Исследования обоих авторов были частично поддержаны грантами РФФИ 96-02-18046, 98-01-00303, грантом поддержки научных школ 96-15-96455 и грантом РФФИ-CNRS 98-01-22033.

Проблема унифицированного построения иерархий, ассоциированных с произвольными группами петель, включая исключительные, была исследована Кацем и Вакимото [14] с использованием квадратичного оператора Казимира вместо фермионоподобного оператора Казимира S . В действительности уравнение (1.1) эквивалентно уравнению $S^*S(\tau \otimes \tau) = 0$, так что можно рассматривать вместо S оператор $\Omega = S^*S$, который является оператором Казимира для GL_∞ . Этот оператор можно следующим образом обобщить для случая общей аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$, ассоциированной с простой конечномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\langle \cdot | \cdot \rangle$ — инвариантная симметрическая невырожденная билинейная форма на $\hat{\mathfrak{g}}$, и пусть V — представление алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, «интегрирующееся» до представления соответствующей группы петель $\hat{G}$. Пусть $\{u_i\}$ и $\{u^i\}$ — дуальные базисы в $\hat{\mathfrak{g}}$, т.е. $\langle u_i | u^j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда оператор $\Omega = \sum_j u_j \otimes u^j$ коммутирует с диагональным действием группы $\hat{G}$ на $V \otimes V$. Пусть $v_0 \in V$ — такой элемент, что $\Omega(v_0 \otimes v_0) = \lambda(v_0 \otimes v_0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда любой элемент τ орбиты $G \cdot v_0$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega(\tau \otimes \tau) = \lambda(\tau \otimes \tau). \quad (1.2)$$

Основная идея данной работы заимствована из [6], где аналог фермионоподобного оператора Казимира был построен с помощью сплетающих операторов. Для модулей уровня один эти операторы образуют замкнутую операторную алгебру парафермионного типа, как в [3], и с некоторой точки зрения их можно интерпретировать как обобщение фермионных операторов. А именно, для случая группы GL_∞ фермионные поля $\Psi(z)$ и $\Psi^*(z)$ можно интерпретировать как сплетающие операторы для (фундаментальных) GL_∞ -модулей уровня один.

Классические иерархии, связанные с представлениями алгебр Каца–Мууди, выраженными через сплетающие операторы, допускают также q -аналоги для квантовых сплетающих операторов для соответствующих квантовых групп. Первые шаги в этом направлении были сделаны в [6]. В работах [6, 15] был представлен общий подход к построению аналогов оператора S в классическом и квантовом случаях. Для квантовой группы $U_q(sl_2)$ были выписаны соответствующие иерархии билинейных уравнений. Эти уравнения представляют собой комбинации дифференциальных и q -разностных уравнений. Попытки обобщить этот подход на общие квантовые обертывающие алгебры наталкиваются на препятствия. Грубо говоря, эти препятствия связаны со следующим вопросом: что представляет собой квантовая эволюция на квантовом грассмане? Некоторые исследования в этом направлении были предприняты в работах [6, 15], но это не позволяет переписать абстрактное уравнение (1.1) на $U_q\mathfrak{g}$ -орбите вакуумного вектора в подходящей форме типа Хироты. Как бы то ни было, в классическом случае нет препятствий к использованию подхода, связанного со сплетающими операторами. Для аффинных алгебр Каца–Мууди этот подход дает некоторые дополнительные возможности по сравнению подходом, основанным на квадратичном операторе Казимира. Исключения представляют собой случаи, когда размерность пространства таких операторов равна нулю, но в общем случае этот подход позволяет рассматривать уравнения, связанные с тензорными произведениями различных $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулей, причем не обязательно

уровня один. В данной работе мы объясняем, как выписать билинейные уравнения Хироты для τ -функции в виде

$$S(\tau \otimes \tau) = 0, \quad (1.3)$$

где S — фермионоподобный оператор Казимира аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$, выраженный через сплетающие операторы, действующие между модулями уровня один. Случай симметрий модулей Вакимото будет рассмотрен в [7]. Сплетающие операторы являются центральным объектом в теории представлений аффинных алгебр Ли и соответствующих конформных теориях поля. Напомним некоторые факты о сплетающих операторах [5]. С каждым представлением V алгебры $\mathfrak{g}$ и формальной переменной z можно связать два типа представлений. Один из них — это представление старшего веса $V_{\lambda,k}$ уровня k (равного значению центрального элемента c). Это представление имеет $\mathbb{Z}$ -градуировку $V_{\lambda,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\lambda,k}[-n]$, совместимую с градуировкой алгебры $\mathfrak{g}$, и его подпространство $V_{\lambda,k}[0]$ изоморфно V_{λ} . Второй тип — это конечномерное представление уровня 0. Как векторное пространство $V[z]$ изоморфно $V \otimes \mathbb{C}((z))$, где $\mathbb{C}((z))$ — пространство рядов Лорана по степеням z , и образующие $J_x^n = x \otimes t^n$, $x \in \mathfrak{g}$, алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ действуют на $V[z]$ с помощью $x \otimes z^n$. Введем поля на $\hat{\mathfrak{g}}$, полагая

$$J_x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_x^n z^{-n-1}.$$

Коммутационные соотношения имеют вид

$$[J_x(z), J_y(w)] = J_{[x,y]}(w) \delta(z-w) + \langle x, y \rangle \delta'(z-w) c, \quad (1.4)$$

где $\delta(z-w) = z^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z/w)^n$. Рассмотрим сплетающие операторы

$$\Psi(z): V_{\mu,k} \rightarrow V_{\nu,k} \otimes V_{\lambda}[z], \quad (1.5)$$

где $\mu, \nu, \lambda \in P_+$. Как обычно, в (1.5) делается некоторый сдвиг в градуировке по z , учитывающий градуировку представления (см. [5]). Зафиксировав выбор элемента $v \in V_{\lambda}^*$, мы получаем оператор

$$\Psi_v(z): V_{\mu,k} \rightarrow V_{\nu,k} \otimes \mathbb{C}[[z]], \quad (1.6)$$

или, в покомпонентной записи,

$$\Psi_v(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi_v[n] z^{-n}.$$

Поскольку тот факт, что $\Psi(z)$ — сплетающий оператор, не зависит от умножения на произвольный степенной ряд от переменной z , мы выберем градуировку в (1.6), согласованную с градуированными структурами представления.

По определению сплетающий оператор $\Psi_v(z)$ удовлетворяет соотношению

$$[J_x(z), \Psi_v(w)] = \Psi_{xv}(w) \delta(z-w). \quad (1.7)$$

Для сопряженного векторного представления V_{λ}^* можно таким же образом определить сопряженный сплетающий оператор

$$\Psi^*(z): V_{\mu',k} \rightarrow V_{\lambda}^*[z] \otimes V_{\nu',k} \quad (1.8)$$

и для каждого вектора $v \in V_{\lambda}$ — компоненты сопряженного оператора

$$\Psi(z)_v^*: V_{\mu',k} \rightarrow V_{\nu',k} \otimes \mathbb{C}[[z]]. \quad (1.9)$$

Рассмотрим дуальные базисы $\{v_i\}$ и $\{v^i\}$ в V_λ и V_λ^* относительно естественного спаривания $V_\lambda \otimes V_\lambda^* \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда оператор

$$K(z) = \sum_i \Psi_{v^i}(z) \otimes \Psi_{v_i}^*(z): V_{\mu,k} \otimes V_{\mu',k} \mapsto V_{\nu,k} \otimes V_{\nu',k} \otimes \mathbb{C}((z)) \quad (1.10)$$

коммутирует с диагональным действием алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ на тензорном произведении:

$$\Delta \hat{\mathfrak{g}} K(z) = K(z) \Delta \hat{\mathfrak{g}}.$$

Кроме того, он не зависит от выбора дуальных базисов в V_λ и V_λ^* . Этот оператор является фермионным аналогом оператора (1.1).

Рассмотрим следующие данные:

- (i) аффинную алгебру Каца–Мути $\hat{\mathfrak{g}}$;
- (ii) оператор Казимира $K(z)$ (1.10);
- (iii) вертекс-операторную реализацию R (бозонизацию) операторов $\Psi_{v^i}(w)$ и $\Psi_{v_i}^*(w)$ и полей $J_x(z)$ алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$.

Этим данным мы сопоставим иерархию солитонных уравнений, которая будет называться ассоциированной с данными (i)–(iii).

Заметим, что для заданных модулей наша конструкция зависит от размерности пространства сплетающих операторов и от вертекс-операторной реализации R . Известно, что для случая алгебр типов A , D , E и представлений уровня один такие реализации параметризованы классами сопряженных элементов группы Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$.

§ 2. Сплетающие операторы для модулей уровня один. Однородная конструкция

В этом параграфе мы проводим бозонизацию сплетающих операторов для модулей $V(\Lambda_i)$, $i \in I$, уровня один. Все эти операторы могут быть реализованы в пространстве

$$V_P = \bigoplus_{i \in I} V(\Lambda_i),$$

где сумма берется по всем фундаментальным $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулям уровня один. Эти операторы образуют операторную алгебру «парафермионного типа». Чтобы описать конструкцию в явном виде, мы вводим понятие алгебры вертексных операторов, ассоциированной с решеткой весов P . Для решетки Q аналогичная конструкция была выполнена в [11] для базисного представления алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ (конструкция Френкеля–Каца). Эту вертексную алгебру можно рассматривать как обобщение n -фермионного пространства Фока для $\mathfrak{gl}(\infty)$.

2.1. Вертексная алгебра V_P , ассоциированная с решеткой весов P .

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа A_n , D_n , E_6 или E_7 (случай E_8 является исключительным для нашей конструкции по той причине, что решетка корней типа E_8 дуальна самой себе). Пусть Q — решетка корней алгебры $\mathfrak{g}$ с упорядоченным базисом $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \dots, l$. Мы фиксируем нормировку симметричной билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}$, полагая $(\alpha_i | \alpha_i) = 2$. Пусть $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ — соответствующая аффинная алгебра Ли, ассоциированная с $\mathfrak{g}$, и пусть Λ_i , $i = 0, 1, \dots, l$ — фундаментальные веса алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$. Тогда

(в обозначениях из [10]) $\Lambda_i = \bar{\Lambda}_i + a_i^\vee \Lambda_0$, где $\bar{\Lambda}_0 = 0, \bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_l$ — фундаментальные веса алгебры $\mathfrak{g}$, а $a_0^\vee, \dots, a_l^\vee$ — числа Кокстера алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$. Уровень представления со старшим весом Λ_i равен единице тогда и только тогда, когда $a_i^\vee = 1$. Мы обозначим через I множество индексов фундаментальных модулей уровня один: $I = \{i \in \{0, \dots, l\} \mid a_i^\vee = 1\}$. Пусть P — решетка весов алгебры $\mathfrak{g}$. Можно показать, что P представима в виде

$$P = \bigsqcup_{i \in I} \{\bar{\Lambda}_i + Q\}. \quad (2.1)$$

Мы можем расширить билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ с Q на P .

Скрученная групповая алгебра $\mathbb{C}_\varepsilon[P]$ — это алгебра с базисом $\{e^\alpha, \alpha \in P\}$ и «скрученным» умножением

$$e^\alpha \cdot e^\beta = \varepsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}, \quad (2.2)$$

где ε есть 2-коцикл на P , определенный следующими условиями:

$$\varepsilon(\alpha, 0) = \varepsilon(0, \alpha) = 1, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = (-1)^{(\alpha, \beta)} \varepsilon(\beta, \alpha) \quad \text{при } \alpha \in Q, \beta \in P, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon(\beta, \gamma) \varepsilon(\beta + \gamma, \alpha) = \varepsilon(\beta, \gamma + \alpha) \varepsilon(\gamma, \alpha). \quad (2.5)$$

Заданному 2-коциклу $\varepsilon: P \times P \rightarrow \mathbb{C}^*$ мы сопоставляем функцию $B_\varepsilon: P \times P \rightarrow \mathbb{C}^*$, определяемую формулой

$$B_\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\alpha, \beta) \varepsilon(\beta, \alpha)^{-1}. \quad (2.6)$$

Ясно, что эта функция симметрична, т.е.

$$B_\varepsilon(\alpha, \beta) = B_\varepsilon^{-1}(\beta, \alpha), \quad (2.7)$$

и формула (2.2) эквивалентна равенству

$$e^\alpha e^\beta = B_\varepsilon(\alpha, \beta) e^{\beta} e^\alpha. \quad (2.8)$$

Используя ассоциативность, видим, что B_ε бимультимпликативна, т.е.

$$B_\varepsilon(\alpha + \gamma, \beta) = B_\varepsilon(\alpha, \beta) B_\varepsilon(\gamma, \beta) \quad \text{и} \quad B_\varepsilon(\beta, \alpha + \gamma) = B_\varepsilon(\beta, \alpha) B_\varepsilon(\beta, \gamma). \quad (2.9)$$

Ясно, что из бимультимпликативности вытекает свойство (2.3). Для рассматриваемой решетки весов P мы хотели бы в явном виде построить бимультимпликативный коцикл $\varepsilon(\alpha, \beta)$ на $P \times P$ со свойствами (2.3)–(2.5). К сожалению, в общем случае это невозможно. Пусть N — индекс решетки Q в P . Для нечетного N такой коцикл существует, а для четного N можно построить такой коцикл только на $Q \times P$. Заметим, что свойство (2.4) «отвечает» за корректные коммутационные соотношения между полями алгебры Каца–Мури $\hat{\mathfrak{g}}$ и между полями алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ и компонентами сплетающих операторов. Прежде всего, построим в явном виде коцикл $\varepsilon(\alpha, \beta)$ на целочисленной решетке $Q \times Q$ со значениями ± 1 . Выберем упорядоченный базис $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ решетки Q над $\mathbb{Z}$. Положим

$$\varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) = (-1)^{(\alpha_i | \alpha_j)}, \quad \text{если } i < j, \quad (2.10a)$$

$$\varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) = 1, \quad \text{если } i > j, \quad (2.10b)$$

$$\varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) = (-1)^{(\alpha_i | \alpha_i)/2}, \quad \text{если } i = j, \quad (2.10c)$$

и расширим это отображение на $Q \times Q$ по бимультимпликативности. Мы получим бимультимпликативную функцию $\varepsilon: Q \times Q \rightarrow \{\pm 1\}$. Из бимультимпликативности вытекает свойство (2.5). Мы хотим продолжить этот коцикл на всю решетку с сохранением мультипликативности. Введем следующие матрицы:

$$\begin{aligned} B &= (b_{i,j}), & b_{i,j} &= \frac{1}{i\pi} \log \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j), \\ C &= (c_{i,j}), & c_{i,j} &= \frac{1}{i\pi} \log \varepsilon(\alpha_i, \bar{\Lambda}_{ij}), \\ C' &= (c'_{i,j}), & c'_{i,j} &= \frac{1}{i\pi} \log \varepsilon(\bar{\Lambda}_i, \alpha_j), \\ D &= (d_{i,j}), & d_{i,j} &= \frac{1}{i\pi} \log \varepsilon(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_j). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Соотношение (2.4) эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} B &= B^t + A + 2L, & C' - C^t &= E + 2K, & B &= CA, \\ B' &= AC, & B &= AD + 2S, & B' &= DA + 2R \end{aligned}$$

а из бимультимпликативности вытекает, что

$$B = AD + 2S, \quad B' = DA + 2R,$$

где A — матрица Картана алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, а L, K, S и R — матрицы с элементами из $\mathbb{Z}$. Формулы (2.10a)–(2.10c) определяют B однозначно с точностью до четной матрицы. Выберем B так, чтобы $B - B^t = A - 2B^t$. Определим C и C^t формулами

$$C' = A^{-1}(B + 2B^t), \quad C = BA^{-1}.$$

Мы получили корректно определенный коцикл на $Q \times P$ или $P \times Q$ со свойством (2.4).

Заметим, что для четного $N = \det A$ матрицы NA и A совпадают с точностью до четной матрицы. Поэтому NB удовлетворяет тому же соотношению, что и B , а $NB^t A^{-1}$ — матрица с целочисленными элементами. Определим D формулой

$$D = A^{-1}(B + 2B^t)A^{-1}.$$

Тогда все нужные соотношения выполнены, и в силу бимультимпликативности мы получаем коцикл на $P \otimes P$ со свойствами (2.3)–(2.5). Для нечетного N невозможно найти решение для матрицы D (нужно, чтобы матрица $B^t A^{-1}$ была целочисленной). Такого коцикла на $P \otimes P$ для алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ не существует. Этот случай будет рассмотрен в примере 3.1.

Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ — комплексификация решетки Q , и пусть билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ продолжена с Q на $\mathfrak{h}$ по билинейности. Далее, пусть

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] + \mathbb{C}k \tag{2.12}$$

— аффинизация алгебры $\mathfrak{h}$ (подалгебра Гейзенберга). Пусть S — симметрическая алгебра над пространством

$$\mathfrak{h}^{<0} = \sum_{j < 0} \mathfrak{h} \otimes t^j. \tag{2.13}$$

Для краткости мы будем писать ht^j вместо $h \otimes t^j$.

Определим пространство состояний вертексной алгебры, которое будет поставлено решетке P , формулой

$$V_P = S \otimes \mathbb{C}_\varepsilon[P], \quad (2.14)$$

где S — симметрическая алгебра пространства $\mathfrak{h}^{<0}$. Вакуумный вектор задается равенством $|0\rangle = 1 \otimes 1$. Действие π алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ на V_P определяется следующим образом. Положим $\pi = \pi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2$, где π_1 — действие на S , а π_2 — действие на $\mathbb{C}_\varepsilon[P]$, причем $\pi_1(c) = I$, $\pi_1(ht^n)$ — оператор умножения на ht^n в алгебре S при $n < 0$ и оператор дифференцирования алгебры S , определенный соотношением $(h_1 t^n)(h_2 t^{-s}) = n\delta_{n,s}(h_1|h_2)$, при $n > 0$, а $\pi_1(h) = 0$. Далее, $\pi_2(ht^n)$ действует тривиальным образом на $\mathbb{C}_\varepsilon[P]$ при $n \neq 0$, $\pi_2(h)e^\alpha = (h|\alpha)e^\alpha$ и $\pi_2(c) = 0$. Положим $h_n = \pi(ht^n)$, $h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathbb{Z}$, и рассмотрим $\text{End } V_P$ -значные поля

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n-1}, \quad (2.15)$$

и соответствующие поля Венециано

$$\tilde{h}(z) = -ih - ih_0 \log z + i \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} h_n, \quad (2.16)$$

так что $h(z) = i\partial\tilde{h}(z)$. Имеем $[h_m, h'_n] = m\delta_{m,-n}(h|h')$, $h, h' \in \mathfrak{h}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Пусть e^α — действующий на V_P оператор умножения на $1 \otimes e^\alpha$, $\alpha \in P$; тогда $[h_n, e^\alpha] = \delta_{n,0}(\alpha|h)e^\alpha$. Пусть $Y(v, z)$, $z \in \mathbb{C}$, — поле, соответствующее вектору $v \in V_P$ согласно соответствию между состояниями и полями (дальнейшие подробности об алгебре вертексных операторов см. в [10]). В частности, это означает, что $Y(v, z)|0\rangle|_{z=0} = v$. Положим

$$\Gamma_\alpha(z) = Y(1 \otimes e^\alpha, z) \quad \text{для } \alpha \in P.$$

Из коммутационных соотношений с h_n мы выводим, что

$$\Gamma_\alpha(z) = \exp \left\{ \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n} \right\} \exp \left\{ - \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} \alpha_n \right\} \otimes e^\alpha z^{\alpha_0}, \quad (2.17)$$

или, в краткой форме, $\Gamma_\alpha(z) = e^{i\tilde{h}(z)}$. Верны следующие разложения операторных произведений:

$$h(z)\Gamma_\alpha(w) \sim \frac{(\alpha|h)\Gamma_\alpha(w)}{z-w}, \quad h \in \mathfrak{h}, \alpha \in P, \quad (2.18)$$

$$\Gamma_\alpha(z)\Gamma_\beta(w) = \varepsilon(\alpha, \beta)(z-w)^{(\alpha|\beta)}\Gamma_{\alpha, \beta}(z, w), \quad \alpha, \beta \in P, |z| > |w|, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\alpha, \beta}(z, w) \\ &= \exp \left\{ \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n} + \frac{w^n}{n} \beta_{-n} \right\} \exp \left\{ - \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} \alpha_n + \frac{w^{-n}}{n} \beta_n \right\} \otimes e^{\alpha+\beta} z^{\alpha_0} w^{\beta_0}. \end{aligned}$$

Из (2.19) и свойства (2.4) мы получаем, что при $\alpha \in Q$, $\beta \in P$ поля $\Gamma_\alpha(z)$ и $\Gamma_\beta(w)$ являются попарно локальными в сильном смысле [10] и в общем случае удовлетворяют разложениям операторных произведений парафермионного типа [3]. В силу (2.1) имеет место разложение (в смысле линейных пространств)

$$V_P = \bigoplus_{i \in I} V(\Lambda_i). \quad (2.20)$$

В частности, $V(\Lambda_0) \simeq V_Q = S \otimes \mathbb{C}_\varepsilon[Q]$ представляет собой рациональную алгебру вертексных операторов, а V_P — прямая сумма алгебры вертексных операторов $V(\Lambda_0)$ и всех ее представлений (см. [10]).

В алгебре $\mathfrak{g}$ рассмотрим базис Картана X_α , h_α , $\alpha \in \Delta$, где Δ — система корней этой алгебры $\mathfrak{g}$. Положим

$$X_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_\alpha t^n z^{-n-1}, \quad h_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_\alpha t^n z^{-n-1}.$$

Тогда соответствие

$$X_\alpha(z) \mapsto \Gamma_\alpha(z), \quad h_\alpha(z) \mapsto \alpha(z), \quad c \mapsto 1 \quad (2.21)$$

задает вертекс-операторное представление алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ (конструкция Френкеля–Каца [11]). Операторы (2.21) сохраняют разложение (2.20), т. е. в $V(\Lambda_0)$ имеем базисное представление в однородной реализации.

2.2. Бозонизация сплетающих операторов уровня один. Пусть снов $V(\Lambda_i)$, $i \in I$, — фундаментальные модули уровня один алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, и пусть $V(\bar{\Lambda}_i)[z]$ — соответствующие $\hat{\mathfrak{g}}$ -модули уровня 0. Для дуального модуля $V^*(\bar{\Lambda}_i)[z]$ мы имеем $V^*(\bar{\Lambda}_i)[z] \simeq V^*(\bar{\Lambda}_j)[z]$ для некоторого $j \in I$. Обозначим через $P(\bar{\Lambda}_i)$ множество весов конечномерного $\mathfrak{g}$ -модуля $V(\bar{\Lambda}_i)$ и рассмотрим базис весов $\{e_\gamma\}$, $\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)$, в $V(\bar{\Lambda}_i)$, нормированный следующим образом:

$$e_\gamma = X_{-\alpha} e_{\bar{\Lambda}_i}, \quad \text{где } \gamma = \bar{\Lambda}_i - \alpha, \alpha \in \Delta_+. \quad (2.22)$$

Определим двойственный базис $\{e_\gamma^*\}$, $\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)$, в $V^*(\bar{\Lambda}_i)$ формулой

$$e_\gamma^* = (-1)^{(\bar{\Lambda}_i | \bar{\Lambda}_i - \gamma)} \varepsilon(\alpha, \alpha) X_\alpha e_{-\bar{\Lambda}_i} \in V^*(\bar{\Lambda}_i). \quad (2.23)$$

Рассмотрим сплетающий оператор

$$\Phi^i(z): V(\Lambda_m) \rightarrow V(\Lambda_n) \otimes V^*(\bar{\Lambda}_i)[z] z^{(\bar{\Lambda}_m | \bar{\Lambda}_i)} \quad (2.24)$$

и сопряженный сплетающий оператор

$$\Psi^i(z): V(\Lambda_p) \rightarrow V(\Lambda_s) \otimes V(\bar{\Lambda}_i)[z] z^{-(\bar{\Lambda}_p | \bar{\Lambda}_i)}, \quad (2.25)$$

где $\bar{\Lambda}_m + \bar{\Lambda}_i \in \{\bar{\Lambda}_n + Q\}$ и $\bar{\Lambda}_p - \bar{\Lambda}_i \in \{\bar{\Lambda}_s + Q\}$. Каждый вектор $e \in V(\bar{\Lambda}_i)$ задает компоненту отображения $\Phi^i(z)$

$$\Phi_e^i(z): V(\Lambda_m) \rightarrow V(\Lambda_n) \otimes \mathbb{C}((z)) z^{(\bar{\Lambda}_m | \bar{\Lambda}_i)}, \quad (2.26)$$

а вектор $e^* \in V^*(\bar{\Lambda}_i)$ — компоненты отображения $\Phi_e^i(z)$

$$\Psi_{e^*}^i(z): V(\Lambda_p) \rightarrow V(\Lambda_s) \otimes \mathbb{C}((z)) z^{-(\bar{\Lambda}_p | \bar{\Lambda}_i)}. \quad (2.27)$$

Для базисов весов $\{e_\gamma\}$ и $\{e_\gamma^*\}$, $\gamma \in P(V(\bar{\Lambda}_i))$, в $V(\bar{\Lambda}_i)$ и $V^*(\bar{\Lambda}_i)$ соответственно мы будем писать

$$\Phi_\gamma^i(z) = \Phi_{e_\gamma}^i(z), \quad \Psi_\gamma^i(z) = \Phi_{e_\gamma^*}^i(z).$$

Из (2.17)–(2.18) и нормировки, задаваемой формулами

$$\Phi_{e_{\bar{\Lambda}_i}}^i(z)|0\rangle|_{z=0} = 1 \otimes e^{\bar{\Lambda}_i}, \quad \Psi_{e_{\bar{\Lambda}_i}^*}^i(z)|0\rangle|_{z=0} = 1 \otimes e^{-\bar{\Lambda}_i}, \quad (2.28)$$

мы получаем

$$\Phi_\gamma^i(z) = \varepsilon(-\alpha, \bar{\Lambda}_i) \Gamma_\gamma(z), \quad \Psi_\gamma^i(z) = (-1)^{(\bar{\Lambda}_i, \alpha)} \varepsilon(\alpha, -\bar{\Lambda}_i) \varepsilon(\alpha, \alpha) \Gamma_{-\gamma}(z), \quad (2.29)$$

где $\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)$ и $\gamma_- = \bar{\Lambda}_i - \alpha$. Действительно, для $\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)$ мы имеем $\gamma = \bar{\Lambda}_i - \alpha$, $\alpha \in \Delta_+$ и $(\bar{\Lambda}_i, \alpha) = 1$. Из этого и из формул (2.18) и (2.10) мы получаем следующее разложение операторного произведения:

$$X_{-\alpha}(z) \Gamma_{\bar{\Lambda}_i}(z) \sim \frac{\varepsilon(-\alpha, \bar{\Lambda}_i) \Gamma_\gamma(z)}{(z-w)^{(\alpha, \bar{\Lambda}_i)}} \quad \text{при } |z| > |w|. \quad (2.30)$$

Оно эквивалентно следующим коммутационным соотношениям для сплетающих операторов:

$$\begin{aligned} [X_\alpha(z), \Phi_{\bar{\Lambda}_i}^i(w)] &= \Phi_\gamma^i(z) \delta(z-w), \\ [X_\alpha(z), \Psi_{\bar{\Lambda}_i}^i(w)] &= \varepsilon(-\alpha, \alpha) \Psi_\gamma^i(z) \delta(z-w), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\Phi_\gamma^i(z)$ и $\Psi_\gamma^i(z)$ заданы формулой (2.29). Из свойств (2.4) и соотношений (2.31) мы получаем более общие коммутационные соотношения (2.24) между полями $X_\alpha(z)$, $\alpha \in Q$, и компонентами $\Phi_\gamma^i(z)$, $\Psi_\gamma^i(z)$ сплетающих операторов (2.26), (2.27):

$$\begin{aligned} [X_\beta(z), \Phi_\gamma^i(w)] &= \varepsilon(\beta, -\alpha) \Phi_{\gamma+\beta}^i(z) \delta(z-w), \\ [X_\beta(z), \Psi_\gamma^i(w)] &= \varepsilon(\beta, \alpha) \Psi_{\gamma+\beta}^i(z) \delta(z-w); \end{aligned} \quad (2.32)$$

эти соотношения совпадают с определяющими соотношениями (1.7).

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим случай $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(N, \mathbb{C})$, $N > 2$. Случай $N = 2$ будет рассмотрен в следующем параграфе.

В этом случае все фундаментальные модули $V(\Lambda_i)$, $i \in \mathbf{I} = \{0, \dots, N-1\}$, являются модулями уровня один. Мы имеем соотношения $P = \bigsqcup_{i \in \mathbf{I}} \{\bar{\Lambda}_i + Q\}$, $V^*(\bar{\Lambda}_i) \simeq V(\bar{\Lambda}_{N-i})$ и разложение

$$V_P = \bigoplus_{i=0}^{N-1} V(\Lambda_i).$$

Все $V(\Lambda_i)$ инвариантны относительно действия алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(N, \mathbb{C})$, задаваемого формулами

$$X_\alpha \mapsto \Gamma_\alpha(z), \quad h_\alpha \mapsto \alpha(z), \quad \alpha \in \Delta, \quad c \mapsto 1 \quad (2.33)$$

и

$$\Phi_\gamma^i(z) = \varepsilon(-\bar{\Lambda}_i + \gamma, \bar{\Lambda}_i) \Gamma_\gamma(z), \quad \Psi_\gamma^i(z) = (-1)^{(\bar{\Lambda}_i - \gamma, \bar{\Lambda}_i)} \varepsilon(\bar{\Lambda}_i - \gamma, \gamma) \Gamma_{-\gamma}(z)$$

для $\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)$. Заметим, что в силу определения коцикла операторы $\Psi_\gamma^i(z)$ корректно определены на V_P только для нечетных N , а для четных N — лишь на $V(\Lambda_0) \simeq V_Q$.

§3. Билинейное уравнение Хироты в терминах сплетающих операторов. Однородная конструкция

Пусть $\Phi_\gamma^i(z)$ и $\Psi_\gamma^i(z)$ — компоненты сплетающих операторов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, определенные через базисы весов $\{e_\gamma\}$ и $\{e_\gamma^*\}$ (см. (2.29)–(2.30)) в $V(\bar{\Lambda}_i)$ и $V^*(\bar{\Lambda}_i)$ соответственно.

Рассмотрим оператор

$$K^i(z) = \sum_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} \Phi_\gamma^i(z) \otimes \Psi_\gamma^i(z): V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p) \rightarrow V(\Lambda_n) \otimes V(\Lambda_s) \mathbb{C}[z, z^{-1}] z^{(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p)}, \quad (3.1)$$

где $m, p, n, s \in I$, а старшие веса связаны так же, как и в (2.24)–(2.25).

Как было указано в конце введения, для построения интегрируемой иерархии солитонных уравнений нам нужны следующие данные:

- (а) оператор $K: V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p) \rightarrow V(\Lambda_n) \otimes V(\Lambda_s)$, коммутирующий с диагональным действием алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ (и соответствующей группы Ли $\hat{G}$): $\Delta \hat{\mathfrak{g}} K = K \Delta \hat{\mathfrak{g}}$, где Δ — естественное действие алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ (группы $\hat{G}$) на тензорном произведении двух модулей.
- (б) вертекс-операторная реализация алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ и оператора K .
- (с) условие $K(|v_m\rangle \otimes |v_p\rangle) = 0$ для вектора старшего веса $|v_m\rangle \otimes |v_p\rangle \in V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p)$.

Тогда уравнение

$$K(\tau^{(m)} \otimes \tau^{(p)}) = 0, \quad \tau^{(m)} \otimes \tau^{(p)} \in V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p) \quad (3.2)$$

определяет $\hat{G}$ -орбиту вектора $\tau^{(m)} \otimes \tau^{(p)}$. Если оператор K существует и может быть представлен в бозонном виде, то мы можем переписать это уравнение как иерархию солитонных уравнений в билинейной форме Хироты [1, 14].

Оператор $K^i(z)$ имеет на $V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p)$ разложение

$$K^i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_k^i z^{-k + (\bar{\Lambda}_i | \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p)}. \quad (3.3)$$

Возьмем в качестве старшего вектора для $V(\Lambda_m)$ вектор $|m\rangle = 1 \otimes e^{\bar{\Lambda}_m}$. При

$$k > \max_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} (\bar{\Lambda}_i - \gamma | \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p)$$

мы имеем

$$K_k^i(|m\rangle \otimes |p\rangle) = 0,$$

и уравнение

$$K_k^i(\tau^{(m)} \otimes \tau^{(p)}) = 0, \quad \tau^{(m)} \otimes \tau^{(p)} \in V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p) \quad (3.4)$$

определяет иерархию солитонных уравнений. Если $\tau \in V(\Lambda_m)$, то

$$\tau = \sum_{\beta \in Q} \tau_\beta \otimes e^{\bar{\Lambda}_m + \beta}, \quad (3.5)$$

где $\tau_\beta \in S$. Мы можем отождествить пространство S с пространством $\mathbb{C}[x_n^\alpha]$, $\alpha \in \Pi$, $n = 1, 2, \dots$, где Π — базис в Q . Действие на $\mathbb{C}[x_n^\alpha]$ элементов α_m , $\alpha \in P$, $m, n \in \mathbb{Z}$, является естественно определенным представлением алгебры Гейзенберга:

$$\alpha_{-m} \mapsto mx_m^\alpha, \quad \alpha_m \mapsto \sum_{\beta \in \Pi} (\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial x_m^\beta} \quad \text{для } m > 0 \text{ и } \alpha_0 \mapsto 0, c \mapsto 1. \quad (3.6)$$

По линейности для всех $\gamma \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} Q$, $m \in \mathbb{Z}$ операторы γ_m корректно определены на $\mathbb{C}[x_n^\alpha]$. Мы будем использовать обозначения

$$\partial_{\gamma_m} = \sum_{\beta \in \Pi} (\gamma | \beta) \frac{\partial}{\partial x_m^\beta} \quad \text{для } \gamma_m, m > 0.$$

Используя (2.17), (2.29), мы можем переписать (3.4) в билинейной форме Хироты

$$\begin{aligned} \text{Res}_{|z=0} z^{k-(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p) - 1} & \left(\sum_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} (-1)^{(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_i - \gamma)} \varepsilon(\bar{\Lambda}_i - \gamma, -\bar{\Lambda}_i - \gamma) \Gamma_\gamma(z) \otimes \Gamma_{-\gamma}(z) \right) \\ & \times \left(\sum_{\beta', \delta' \in Q} \tau_{\beta'} e^{\bar{\Lambda}_m + \beta'} \otimes \tau_{\delta'} e^{\bar{\Lambda}_p + \delta'} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Мы можем произвести отождествление $V(\Lambda_m) \simeq \mathbb{C}[x_n'^\alpha] \otimes \sum_{\beta \in Q} e^{\bar{\Lambda}_m + \beta}$ и $V(\Lambda_p) \simeq \mathbb{C}[x_n''^\alpha] \otimes \sum_{\beta \in Q} e^{\bar{\Lambda}_p + \beta}$. Тогда (3.7) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \text{Res}_{|z=0} z^{k-(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p) - 1} & \left(\sum_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} (-1)^{(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_i - \gamma)} \varepsilon(\bar{\Lambda}_i - \gamma, -\bar{\Lambda}_i - \gamma) \right. \\ & \times \exp \left\{ \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} (\gamma'_{-n} - \gamma''_{-n}) \right\} \exp \left\{ - \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} (\gamma'_n - \gamma''_n) \right\} \left(\sum_{\beta', \delta' \in Q} z^{(\gamma | \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p + \beta' - \delta')} \right. \\ & \left. \left. \times \varepsilon(\gamma, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p + \beta' - \delta') \tau_{\beta'}(x') \tau_{\delta'}(x'') e^{\bar{\Lambda}_m + \beta' + \gamma} \otimes e^{\bar{\Lambda}_p + \delta' - \gamma} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Введем новые переменные

$$x_j^\alpha = \frac{1}{2}(x_j'^\alpha + x_j''^\alpha), \quad y_j^\alpha = \frac{1}{2}(x_j'^\alpha - x_j''^\alpha)$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_j'^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_j''^\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_j'^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_j''^\alpha}.$$

Операторы $2\gamma_{-n} = \gamma'_{-n} - \gamma''_{-n}$ и $\gamma_n = \gamma'_n - \gamma''_n$, $\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)$, $n > 0$, суть операторы на $\mathbb{C}[y_n^\alpha]$, $\alpha \in \Pi$, $n \in \mathbb{Z}$, определенные в соответствии с формулами (3.6). Тогда

(3.8) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \text{Res}|_{z=0} z^{k-1} & \left(\sum_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} (-1)^{(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_i - \gamma)} \varepsilon(\bar{\Lambda}_i - \gamma, -\bar{\Lambda}_i - \gamma) \right. \\ & \times \left(\sum_{\beta', \delta' \in Q} z^{(\gamma - \bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p) + (\gamma, \beta' - \delta')} \varepsilon(\gamma, \bar{\Lambda}_m + \beta') \varepsilon(-\gamma, \bar{\Lambda}_p + \delta') \right. \\ & \times \left. \left. \left(\sum_{p, s=0}^{\infty} p_s(2\gamma) p_l(-\tilde{\partial}_\gamma) z^{s-l} \right) \tau_{\beta'}(x+y) \cdot \tau_{\delta'}(x-y) e^{\bar{\Lambda}_m + \beta' + \gamma} \otimes e^{\bar{\Lambda}_p + \delta' - \gamma} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где p_s — многочлены Шура. Перепишем это уравнение в билинейной форме Хироты и посмотрим на коэффициент при

$$e^{\bar{\Lambda}_m + \bar{\Lambda}_i + \beta} \otimes e^{\bar{\Lambda}_p - \bar{\Lambda}_i + \delta}, \quad \beta, \delta \in Q.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Res}|_{z=0} z^{k-1} & \left(\sum_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} (-1)^{(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_i - \gamma)} \left(\sum_{\beta', \delta' \in Q} z^{(\gamma - \bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p)} z^{(\gamma, 2\bar{\Lambda}_i - 2\gamma + \beta - \delta)} \right. \right. \\ & \times \varepsilon(\bar{\Lambda}_i - \gamma, -\bar{\Lambda}_i - \gamma) \varepsilon(\gamma, \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p + 2\bar{\Lambda}_i - 2\gamma + \beta - \delta) \left(\sum_{p, s=0}^{\infty} p_s(2\gamma) p_l(-\tilde{D}_\gamma) z^{s-l} \right) \\ & \times \exp \left\{ \sum_{\alpha \in \Pi, s \in \mathbb{Z}_+} y_s^\alpha D_{\alpha, s} \right\} \tau_{\bar{\Lambda}_i + \beta - \gamma} \cdot \tau_{-\bar{\Lambda}_i + \gamma + \delta} \left. \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $\tilde{D}_\gamma$ обозначает $(D_{\gamma_1}, \frac{1}{2}D_{\gamma_2}, \frac{1}{3}D_{\gamma_3}, \dots)$ и $D_{\gamma_m} = \partial_{\gamma_m} = \sum_{\alpha \in \Pi} (\gamma|\alpha) \partial/\partial x_m^\alpha$.
Заметим, что все эти иерархии инвариантны по отношению к сдвигам

$$\beta \mapsto \beta + \alpha, \quad \delta \mapsto \delta + \alpha, \quad \alpha \in Q.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Неясно, эквивалентны ли эти иерархии для различных $k > \max_{\gamma \in P(\bar{\Lambda}_i)} (\bar{\Lambda}_i - \gamma | \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Мы будем называть иерархии билинейных уравнений, задаваемые соотношением (3.10), иерархиями, ассоциированными с оператором (3.1).

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим более подробно случай $\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{s}}\mathbf{l}_2$.

Имеем $I = \{0, 1\}$, $P = Q \sqcup \{\bar{\Lambda}_1 + Q\}$ и $P(\bar{\Lambda}_1) = \{\alpha/2, -\alpha/2\}$, где α — положительный корень. Бозонизация полей может быть задана формулами

$$\begin{aligned} X_{\pm\alpha}(z) &= \Gamma_{\pm\alpha}(z), & h_\alpha(z) &= \alpha(z), \\ \Phi_{\pm\alpha/2}(z) &= \Gamma_{\pm\alpha/2}(z)(-1)^{\alpha/2}, & \Psi_{\pm\alpha/2}(z) &= \pm \Gamma_{\pm\alpha/2}(z)(-1)^{\alpha/2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для $m, p \pmod{2}$, рассмотрим оператор (3.1), коммутирующий с диагональным действием алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на тензорном произведении двух фундаментальных модулей:

$$K(z) = (-1)^{\alpha/2} \Gamma_{\alpha/2}(z) \otimes (-1)^{\alpha/2} \Gamma_{-\alpha/2}(z) - (-1)^{\alpha/2} \Gamma_{-\alpha/2}(z) \otimes (-1)^{\alpha/2} \Gamma_{\alpha/2}(z): \\ V(\Lambda_m) \otimes V(\Lambda_p) \rightarrow V(\Lambda_{m+1}) \otimes V(\Lambda_{p+1}) \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] z^{(\bar{\Lambda}_1 | \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p)}. \quad (3.12)$$

Имеем

$$(\bar{\Lambda}_1 | \bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_p) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = p, \\ \pm 1/2, & \text{если } m \neq p. \end{cases}$$

Мы отождествляем пространство $V_P = V(\Lambda_0) \oplus V(\Lambda_1)$ с пространством

$$\mathbb{C}[y_1, y_2, \dots] \otimes \sum_{r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} e^{r\alpha}.$$

Произвольный вектор $\tau \in V(\Lambda_i)$ может быть записан в виде $\tau = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_n \otimes e^{n\alpha + i\alpha/2}$, $i = 0, 1$. На $V(\Lambda_0) \otimes V(\Lambda_1)$ мы получаем систему билинейных уравнений Хироты

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(y) p_{j+s-l+k}(-\tilde{D}) \exp \left\{ \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right\} \tau_s \cdot \tau_{l+1/2} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-y) p_{j+l-s+k-1}(\tilde{D}) \exp \left\{ \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right\} \tau_{s+1} \cdot \tau_{l-1/2} = 0, \quad (3.13)$$

а на $V(\Lambda_0) \otimes V(\Lambda_0)$ — систему

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(y) p_{j+s-l+k}(-\tilde{D}) \exp \left\{ \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right\} \tau_s \cdot \tau_l \\ - \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-y) p_{j+l-s-k-1}(\tilde{D}) \exp \left\{ \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right\} \tau_{s+1} \cdot \tau_{l-1} = 0, \quad (3.14)$$

где $p_j(x)$ — многочлены Шура от переменных $(x_1, x_2, \dots)$. Заметим, что эта иерархия инвариантна относительно сдвига $s \rightarrow s+r$, $l \rightarrow l+r$, $r \in \mathbb{Z}$. Для простоты зафиксируем $k = 1$. Мы смотрим на коэффициент при y_1^s и ограничиваемся случаем $l-s = 0, \pm 1, 2$. Из (3.14) мы получаем простейшие нетривиальные уравнения

$$\begin{cases} D_1^2 \tau_s \cdot \tau_s + 2\tau_{s-1} \cdot \tau_{s+1} = 0, \\ (D_1^2 + D_2) \tau_s \cdot \tau_{s+1} = 0, \\ (D_1^2 + D_2) \tau_{s-1} \cdot \tau_s = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Полагая $x = x_1$, $t = x_2$, $q(x, t) = \tau_1/\tau_0$, $q^*(x, t) = \tau_{-1}/\tau_0$, $u(x, t) = \log \tau_0$ и исключая u , мы получаем систему нелинейных уравнений Шрёдингера

$$\begin{cases} q_t = q_{xx} - 2q^2 q^*, \\ -q_t^* = q_{xx} - 2q q^{*2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Из (3.13) и (3.14) мы получаем

$$\begin{cases} (D_1^2 - D_2)\tau_s \cdot \tau_{s+1/2} = 0, \\ (D_1^2 - D_2)\tau_{s+1} \cdot \tau_{s+1/2} = 0, \\ (D_1^2 + D_2)\tau_s \cdot \tau_{s+1} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Полагая

$$q = \frac{\tau_0}{\tau_{1/2}}, \quad q^* = \frac{\tau_1}{\tau_{1/2}},$$

мы преобразуем уравнения (3.17) в следующую систему относительно функций q и q^* :

$$\begin{cases} q_t + q_{xx} - 2q_x(\log q^*)_x = 0, \\ -q_t^* + q_{xx}^* - 2q_x^*(\log q)_x = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Для любой последовательности знаков, например $++-\dots$, и чисел $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2, \dots \in \mathbb{C}^*$ мы можем построить решение иерархий нелинейных уравнений Шрёдингера и (3.18):

$$(\tau^0)_{a_1, a_2, \dots; z_1, z_2, \dots}^{++-\dots}(x, t) = \dots (1 + a_3 X_{-\alpha}(z_3))(1 + a_2 X_{\alpha}(z_2))(1 + a_1 X_{\alpha}(z_1))1 \otimes 1 \quad (3.19)$$

и

$$(\tau^1)_{a_1, a_2, \dots; z_1, z_2, \dots}^{++-\dots}(x, t) = \dots (1 + a_3 X_{-\alpha}(z_3))(1 + a_2 X_{\alpha}(z_2))(1 + a_1 X_{\alpha}(z_1))1 \otimes e^{\alpha/2}.$$

§4. Скрученная конструкция сплетающих операторов уровня один. Соответствующие интегрируемые системы

В этом параграфе мы даем бозонизацию сплетающих операторов для скрученных фундаментальных модулей $V^w(\Lambda_i)$, $i \in I$, уровня один, где w — элемент группы Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$, определенный с точностью до класса сопряженности. Пусть Q_w — ортогональная проекция решетки корней Q на неподвижное подпространство относительно действия элемента w в $Q \otimes \mathbb{C}$. Все эти операторы могут быть реализованы в пространстве

$$V_{P_w} = \bigoplus_{i \in I} V^w(\Lambda_i),$$

где P_w — решетка, двойственная к Q_w . Легко видеть, что P_w — ортогональная проекция решетки весов P на подпространство, неподвижное относительно действия элемента w в $Q \otimes \mathbb{C}$. Сумма берется по всем фундаментальным $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулям уровня один в скрученной реализации. Эти операторы образуют замкнутые операторные Γ -конформные алгебры [8] «парафермионного типа». В этом параграфе мы явно выпишем билинейные уравнения Хироты в терминах «скрученных сплетающих операторов».

4.1. Описание несопряженных подалгебр Гейзенберга. Хорошо известно [14], что различные реализации базисного (фундаментального) представления алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ приводят к различным иерархиям солитонных уравнений. Различные вертекс-операторные реализации определяются выбором подалгебры Гейзенберга в $\hat{\mathfrak{g}}$, более точно, классом сопряженности подалгебр Гейзенберга в $\hat{\mathfrak{g}}$. В свою очередь, подалгебры Гейзенберга в $\hat{\mathfrak{g}}$, рассматриваемые с точностью до калибровочных преобразований, параметризуются классами сопряженных элементов в группе Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$ [13]. Напомним конструкцию Каца–Петерсона подалгебры Гейзенберга, соответствующей заданному элементу w группы Вейля. Реализуем $\hat{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ как центральное расширение отображения окружности в конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Мы хотим описать все подалгебры Гейзенберга $\{\mathfrak{h}(t)\}$ в $\hat{\mathfrak{g}}$ с точностью до калибровочных преобразований

$$\mathfrak{h}(t) \rightarrow g(t)\mathfrak{h}(t)g^{-1}(t), \quad (4.1)$$

где $g(t) \in \hat{G}$, $t \in S^1$, $\mathfrak{h}(t): S^1 \rightarrow H$ и H обозначает множество всех подалгебр Картана в $\mathfrak{g}$. Зафиксируем систему корней в $\mathfrak{h}(0)$. Тогда при $t = 2\pi$ мы получаем автоморфизм $w \in W$ из соотношения

$$\mathfrak{h}(t) = g(t)\mathfrak{h}(0)g^{-1}(t).$$

Пусть $\{\mathfrak{h}(t)\}$ — множество классов сопряженных подалгебр Гейзенберга в $\hat{\mathfrak{g}}$. Имеем

$$\{\mathfrak{h}(t)\} \rightarrow W.$$

В этом отображении можно перейти к факторам:

$$\{\mathfrak{h}(t)\}/G^{S^1} \simeq W/\text{Int}, \quad (4.2)$$

где $G^{S^1} = \{g(t) \mid g(t) \in G, t \in S^1, g(0) = g(2\pi)\}$, а Int — группа внутренних автоморфизмов группы W . Зафиксируем $w \in W$ и зададим отображение $W \rightarrow \{\mathfrak{h}(t)\}$ формулой

$$w \rightarrow \mathfrak{h}_w(t) = g(t)\mathfrak{h}(0)g^{-1}(t), \quad (4.3)$$

где $g(0) = 1$, $g(2\pi) = w$ и $g(t) \in G$, $t \in S^1$. Тогда $g(t) \notin G^{S^1}$, и отображение (4.1) после факторизации превращается в отображение (4.2).

Если $\mathfrak{h}'(0)$ и $\mathfrak{h}''(0)$ — две подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h}'(t)_w$ и $\mathfrak{h}''(t)_w$ сопряжены в $\mathfrak{g}$ относительно действия подгруппы G^{S^1} и $\mathfrak{h}'(t)_w = \mathfrak{h}''(t)_{w'}$ при условии, что элементы w и w' сопряжены в W . Наш выбор подалгебры $\mathfrak{h}(0)$ и представителя $w \in W/\text{Int}$ будет мотивирован задачей бозонизации сплетающих операторов.

Зафиксируем элемент $w \in W$ некоторого порядка m . Пусть

$$\mathfrak{h}(0) = \mathfrak{h} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_j$$

— разложение на собственные подпространства относительно w , где через $\mathfrak{h}_k$ обозначено собственное подпространство, соответствующее собственному значению $e^{-2\pi i k/m}$, так что $\mathfrak{h}_0$ — множество неподвижных точек отображения w . Пусть σ — поднятие элемента w в группу G , т.е. σ таково, что $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно $\text{Ad } \sigma$ и $\text{Ad } \sigma|_{\mathfrak{h}} = w$. Существует (неединственный) элемент $x \in \mathfrak{g}$,

такой, что $\sigma = e^{2\pi i x}$ и $[x, \mathfrak{h}_0] = 0$. Элемент σ представляет собой внутренний автоморфизм конечного порядка ($\sigma^m = 1$) алгебры $\mathfrak{g}$; поэтому σ сопряжен автоморфизму алгебры $\mathfrak{g}$ вида

$$\sigma' = \exp \frac{2\pi i}{m} h, \quad h \in \mathfrak{h}(0).$$

Напомним некоторые факты о скрученных аффинных алгебрах (более подробно см. в [9]). Автоморфизму σ алгебры $\mathfrak{g}$ можно сопоставить подалгебру $\widehat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ следующим образом:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)_j, \quad (4.4)$$

где $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)_j = \mathfrak{g}_j \pmod{m} \otimes t^j$ и

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

— разложение на собственные подпространства относительно σ , в котором подпространство $\mathfrak{g}_j$ соответствует собственному значению ε^j ($\varepsilon^j = e^{2\pi i j/m}$). Разложение (4.4) представляет собой $\mathbb{Z}$ -градуировку на $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$. Мы можем распространить эту градуировку на

$$\widehat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \oplus \mathbb{C}k \oplus \mathbb{C}d, \quad (4.5)$$

полагая $\deg k = \deg d = 0$. Алгебра $\widehat{\mathfrak{L}}_\sigma = \widehat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ для произвольного элемента σ конечного порядка называется скрученной аффинной алгеброй. Если σ — внутренний автоморфизм, то [9]

$$\widehat{\mathfrak{L}}_\sigma \simeq \widehat{\mathfrak{g}}. \quad (4.6)$$

Пусть σ — внутренний автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда справедливо (4.6). Скрученная подалгебра Гейзенберга, соответствующая w , — это

$$\widehat{\mathfrak{h}}_w = \mathfrak{h}_w(t) = \{\mathfrak{h}_k \pmod{m} \otimes t^k \mid \mathfrak{h}_k \pmod{m} \in \mathfrak{g}_k, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.7)$$

где $\mathfrak{h}_k$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{h}_0$ в $\mathfrak{g}_k$.

4.2. Скрученные модули уровня 0 и соответствующие скрученные сплетающие операторы. Мы сохраняем обозначение $V(\Lambda_i)$, $i \in I$, для фундаментальных модулей уровня один над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ типа A , D или E . Веса $P(V(\bar{\Lambda}_i))$ модулей $V(\bar{\Lambda}_i)$ инвариантны относительно действия группы Вейля W . Зафиксируем элемент $w \in W$ и рассмотрим разложение на орбиты относительно действия этого элемента:

$$P(V(\bar{\Lambda}_i)) = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} S_j. \quad (4.8)$$

Заметим, что n_i не зависит от $\bar{\Lambda}_i$ и определяется элементом w . Поэтому мы будем писать n_w вместо n_i . Положим $s_j = |S_j|$.

Существует поднятие T элемента w в группу G , удовлетворяющее условиям

$$Te_\gamma = e_{w(\gamma)} \quad (4.9)$$

для $\gamma \in P(V(\bar{\Lambda}_i))$ и базиса весов $\{e_\gamma\}$, нормированного, как в (2.22). Пусть $\gamma_j \in S_j$ — максимальный вес в S_j , так что для $\beta \in S_j$ мы имеем $\beta = \gamma_j - \alpha$, $\alpha \in Q_+$, и $\beta = w^k(\gamma_j)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $V(\bar{\Lambda}_i)$ представляет собой свободный $\mathbb{C}[T]$ -модуль ранга n_w с образующими e_{γ_j} , $j = 1, \dots, n_w$. Обозначим через V_j линейную оболочку множества $\{e_\gamma\}_{\gamma \in S_j}$ и положим $T_j = T|_{V_j}$. Тогда $[T_j, \mathfrak{h}_0] = 0$ при $j = 1, \dots, n_w$, и $\mathfrak{h}_0$ есть множество неподвижных относительно w точек в $\mathfrak{h}$. Поэтому

$$\mathfrak{h}(0) = \mathfrak{h}_0 \bigoplus_{j=1}^{k_w} \left(\sum_{l=1}^{s_j} \mathbb{C} T_j^l \right) \quad (4.10)$$

— подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Мы можем выбрать поднятие x элемента $w \in W$ в группу G с точностью до класса сопряженности таким образом, чтобы он действовал на $V(\bar{\Lambda}_i)$ по формуле

$$x \cdot e_{w^k(\gamma_j)} = \varepsilon_j^{-k} e_{w^k(\gamma_j)}, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/s_j}. \quad (4.11)$$

Это действие определяет m -градуировку на $V(\bar{\Lambda}_i) = \sum_i V_i$, согласованную с m -градуировкой на $\mathfrak{g}$, задаваемой формулой (4.4):

$$\mathfrak{g}_j \cdot V_k \subset V_{k+j}. \quad (4.12)$$

Заметим, что ортогональные проекции элементов $\gamma^1, \dots, \gamma^s$ на $Q_w \otimes \mathbb{C}$, которые мы обозначаем через $\gamma'^1, \dots, \gamma'^s$, образуют базис Π_w в подпространстве $Q_w \otimes \mathbb{C}$, неподвижный относительно $w \in W$. В силу (4.10) и (4.11) мы можем определить следующий базис в подалгебре Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_w$:

$$H_j^l = T_j^l \otimes t^{ml/s_j}, \quad l \not\equiv 0 \pmod{s_j}, \quad \gamma_k^i = \gamma^i \otimes t^{mk}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.13)$$

Рассмотрим поля

$$\gamma^i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^i z^{-mk-1}, \quad H^j(z) = \sum_{l \not\equiv 0 \pmod{s_j}} H_j^l z^{-ml/s_j-1} \quad (4.14)$$

и соответствующие формальные интегралы этих полей по переменной z (поля Венециано):

$$\tilde{\gamma}^i(z) = i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^i \frac{z^{-mk}}{mk} - i\gamma^i - i\gamma_0^i \log z, \quad \tilde{H}^j(z) = i \sum_{l \not\equiv s_j} H_j^l \frac{z^{-ml/s_j}}{ml/s_j}. \quad (4.15)$$

Эти поля содержат все образующие подалгебры Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_w$. Определим скрученный модуль уровня 0

$$V_t^w(\bar{\Lambda}_i) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (V_{k \pmod{m}} \otimes t^k).$$

В силу (4.12) действие алгебры $\hat{\mathfrak{L}}_\sigma$ совместимо с этой градуировкой.

Каждой w -орбите $S_j \subset P(V(\bar{\Lambda}_i))$ можно сопоставить производящую функцию (поле) на $V_t^w(\bar{\Lambda}_i)[z, z^{-1}]$, полагая

$$E_j(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_{w^k(\gamma_j)} t^{km/s_j} z^{-km/s_j}. \quad (4.16)$$

Сопряженному скрученному фундаментальному модулю

$$(V_t^w(\bar{\Lambda}_i))^* \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (V_{k \pmod{m}}^* \otimes t^k)$$

и сопряженной w -орбите S_j^* можно сопоставить сопряженную производящую функцию (поле)

$$E_j^*(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_{w^k(\gamma_j)}^* t^{-km/s_j} z^{km/s_j}. \quad (4.17)$$

Известно [13], что различные реализации (вертекс-операторные конструкции) фундаментального представления $V(\Lambda_i)$ параметризованы элементами $w \in W$ (с точностью до класса сопряженности) в том смысле, что бозонизация основана на выборе подалгебры Гейзенберга $\mathfrak{h}_w(t)$, соответствующей элементу w в смысле (4.7). Мы обозначим эту конструкцию через R_w , а соответствующее пространство представления — через $V^w(\Lambda_i)$.

Рассмотрим сплетающий оператор

$$\Phi_w^i(z): V^w(\Lambda_m) \rightarrow V^w(\Lambda_n) \otimes (V_t^w(\bar{\Lambda}_i))^*[z, z^{-1}] z^{\langle \bar{\Lambda}_m | \bar{\Lambda}_i \rangle} \quad (4.18)$$

и сопряженный сплетающий оператор

$$\Psi_w^i(z): V^w(\Lambda_p) \rightarrow V^w(\Lambda_s) \otimes V^w(\bar{\Lambda}_i)[z, z^{-1}] z^{-\langle \bar{\Lambda}_p | \bar{\Lambda}_i \rangle}. \quad (4.19)$$

Каждое поле $E_j(z)$ (см. (4.16)) порождает компоненту

$$\Phi_j^i(z): V^w(\Lambda_m) \rightarrow V^w(\Lambda_n) \otimes \mathbb{C}[[t]] \otimes \mathbb{C}[[z]] z^{\langle \bar{\Lambda}_m | \bar{\Lambda}_i \rangle} \quad (4.20)$$

сплетающего оператора $\Phi_w^i(z)$. Соответственно поле $E_j^*(z)$, определяемое из (4.19), порождает оператор

$$\Psi_j^i(z): V^w(\Lambda_p) \rightarrow V^w(\Lambda_s) \otimes \mathbb{C}[[t]] \otimes \mathbb{C}[[z]] z^{-\langle \bar{\Lambda}_p | \bar{\Lambda}_i \rangle}. \quad (4.21)$$

Нормировка по z определяется общей градуировкой.

4.3. Бозонизация скрученных сплетающих операторов. Зафиксируем $w \in W$. Пусть $\mathfrak{h}_w$ — соответствующая подалгебра Гейзенберга (4.7). Мы определим пространство состояний следующим образом. Рассмотрим подрешетку Q_w в Q , неподвижную относительно действия элемента w . Пусть P_w — решетка, дуальная к Q_w . Предположим, что задан мультипликативный коцикл $\varepsilon_w(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in P_w$, на P_w , определенный свойствами (2.3)–(2.5) для решеток Q_w и P_w . Рассмотрим пространство

$$V_{P_w} = S_w \otimes \mathbb{C}_\varepsilon[P_w], \quad (4.22)$$

где S_w — симметрическая алгебра над пространством

$$\mathfrak{h}_w^{<0} = \sum_{n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \sum_{j < 0} \mathfrak{h}_n \otimes t^{-n+jm}, \quad (4.23)$$

а $\mathbb{C}_\varepsilon[P_w]$ — скрученная групповая алгебра над решеткой P_w . Пространство V_{P_w} представляет собой сумму всех представлений уровня один алгебры $\hat{\mathfrak{g}}^w = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ в реализации R_w . Это означает, что бозонизация всех операторов задается в терминах подалгебры Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_w$ (4.7), а σ — поднятие элемента w в $\text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Int } \mathfrak{g}$, определенное, как в (4.11). Рассмотрим базис в $\hat{\mathfrak{h}}_w$, определенный формулами (4.13), и сплетающие операторы (4.20), (4.21), определенные производящей функцией (4.16) на $V_t^w(\bar{\Lambda}_i)[z, z^{-1}]$. Из действия (4.9) и определения базиса на $\hat{\mathfrak{h}}_w$ вытекают коммутационные соотношения

$$[H_p^l, \Phi_j^i(z)] = \delta_{p,j} z^{ml/s_j} \Phi_j^i(z), \quad [\gamma_k^r, \Phi_j^i(z)] = \langle \gamma^r | \lambda_j \rangle z^{km} \Phi_j^i(z) \quad (4.24)$$

а также коммутационные соотношения для сопряженных операторов

$$[H_p^l, \Psi_j^i(z)] = -\delta_{p,j} z^{ml/s_j} \Psi_j^i(z), \quad [\gamma_k^r, \Psi_j^i(z)] = -\langle \gamma^r | \lambda_j \rangle z^{km} \Psi_j^i(z). \quad (4.25)$$

Эти формулы задают операторы $\Phi_j^i(z)$ и $\Psi_j^i(z)$ с точностью до действия на $\mathbb{C}_\varepsilon[P_w]$. Из общих коммутационных соотношений мы получаем следующие выражения:

$$\Phi_j^i(z) = \varepsilon_w(-\alpha'_j, \bar{\Lambda}'_i) : e^{(i/s_j)\tilde{H}^j(z) + i\tilde{\lambda}'^j(z)} :, \quad (4.26)$$

$$\Psi_j^i(z) = (-1)^{(\alpha'_j, \bar{\Lambda}'_i)} \varepsilon_w(\alpha'_j, \alpha'_j - \bar{\Lambda}'_i) : e^{-(i/s_j)\tilde{H}^j(z) - i\tilde{\lambda}'^j(z)} :, \quad (4.27)$$

где α'_j , $\bar{\Lambda}'_i$, λ' — проекции соответствующих весов на $Q_w \otimes \mathbb{C}$ вдоль подпространства $Q_w^\perp \otimes \mathbb{C}$ в P , а $\lambda_j = \bar{\Lambda}_i - \alpha_j$ при $\alpha_j \in \Delta_+$. Легко видеть, что эта проекция одна и та же для всех точек в S_j .

Подчеркнем, что компоненты операторов $\Phi_j^i(z)$, примененные к вакуумному вектору $|0\rangle = 1 \otimes 1 \in V_{P_w}$, порождают все пространство V_{P_w} , а поля

$$X_{j,l,n}^i(z) = : \Phi_j^i(z) \Psi_l^i(\varepsilon^n z) :|_{V^w(\Lambda_m)}, \quad n = 1, \dots, m, \quad (4.28)$$

где $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$, определяют реализацию R_w фундаментального представления $V(\Lambda_m)$, построенного в [13]. В силу (4.26)–(4.27) мы получаем бозонизацию полей $X_{j,l}^i$ и их выражение через скрученные операторы. Нормальное упорядочение понимается стандартным образом:

$$\Phi_j^i(z) \Psi_l^i(w) = (z^m - w^m)^{-(\lambda'^j, \lambda'^l)} : \Phi_j^i(z) \Psi_l^i(w) : \quad \text{при } |z| > |w|, \quad l \neq j, \quad (4.29)$$

где m — порядок элемента $w \in W$.

4.4. Билинейные уравнения Хироты в терминах скрученных сплетающих операторов. Мы сохраняем все обозначения предыдущих пунктов.

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} K_w^i(z) &= \sum_{j=1}^{n_w} \Phi_j^i(z) \otimes \Psi_j^i(z) : V^w(\Lambda_m) \otimes V^w(\Lambda_p) \\ &\rightarrow V^w(\Lambda_n) \otimes V^w(\Lambda_s) \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] z^{(\bar{\Lambda}'_i | \bar{\Lambda}'_m - \bar{\Lambda}'_p)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

На $V^w(\Lambda_m) \otimes V^w(\Lambda_p)$ он имеет разложение

$$K_w^i(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_k^i z^{-k + (\bar{\Lambda}'_i, \bar{\Lambda}'_m - \bar{\Lambda}'_p)}, \quad (4.31)$$

где $\bar{\Lambda}'_i$ — проекция на $Q_w \otimes \mathbb{C}$ параллельно $Q^\perp$ (см. (4.26)–(4.27)).

Возьмем в качестве вектора старшего веса в $V^w(\Lambda_m)$ вектор $|m\rangle = 1 \otimes e^{\bar{\Lambda}'_m}$. При

$$k > \max_{\gamma \in P_w(\Lambda_i)} \langle \bar{\Lambda}'_i - \gamma' | \bar{\Lambda}'_m - \bar{\Lambda}'_p \rangle \quad (4.32)$$

справедливы следующие утверждения:

(1) Оператор K_k^i , где $k = lm$, $l \in \mathbb{Z}$, а m — порядок элемента $w \in W$, коммутирует с диагональным действием алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}^w$ на $V^w(\Lambda_m) \otimes V^w(\Lambda_p)$, задаваемым формулой (4.28);

(2) $K_k^i(|m\rangle \otimes |p\rangle) = 0$ при k , удовлетворяющих условию (4.32).

(3) Уравнение

$$K_{lm}^i(\tau_1 \otimes \tau_2) = 0, \quad \tau_1 \otimes \tau_2 \in V^w(\Lambda_m) \otimes V^w(\Lambda_p), \quad (4.33)$$

определяет иерархию солитонных уравнений, ассоциированную с указанными выше данными и вертекс-операторной конструкцией R_w рассматриваемых представлений.

При $\tau \in V^w(\Lambda_m)$ имеем

$$\tau = \sum_{\beta \in P_w(\Lambda_m)} \tau_\beta \otimes e^\beta,$$

где $\tau_\beta \in S_w$, а $P_w(V(\bar{\Lambda}_m))$ (для простоты обозначаемое в дальнейшем через $P_w(\bar{\Lambda}_m)$) — множество всех проекций пространства $P(V(\bar{\Lambda}_m))$ на $Q_w \otimes \mathbb{C}$ вдоль $Q^\perp$. Мы можем отождествить S_w с пространством $\mathbb{C}[x_{k_j}^j, y_l^\gamma]$, где $j = 1, \dots, n_w$, $k_j \neq 0 \pmod{s_j}$, $\gamma \in \Pi_w$ (Π_w — базис в Q_w), а $l \in \mathbb{Z}$.

Действие на $\mathbb{C}[x_{k_j}^j, y_l^\gamma]$ подалгебры Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_w$ с базисом (4.13) задается формулами

$$\gamma_{-k} \rightarrow k m y_k^\gamma, \quad \gamma_k \rightarrow \sum_{\beta \in P_w} \langle \gamma | \beta \rangle \frac{\partial}{\partial y_k^\beta}, \quad \gamma_0 \rightarrow 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.34)$$

и

$$H_l^j \rightarrow m l x_l^j, \quad H_{-l}^j \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_l^j}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad l \neq 0 \pmod{s_j}.$$

На пространстве $\mathbb{C}_\varepsilon[P_w]$ подалгебра Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_w$ действует по формулам

$$\gamma_k \cdot e^\beta = \delta_{k,0} \langle \gamma | \beta \rangle e^\beta, \quad H_l^j \cdot e^\beta = 0, \quad \beta \in P_w.$$

По линейности для всех $\beta \in P_w$ мы имеем корректно определенный оператор β_k на V_{P_w} . По аналогии с нескрученным случаем мы будем использовать обозначение ∂_{β_l} для оператора β_l , $l > 0$.

Используя формулы бозонизации (4.26)–(4.27) для $\Phi_j^i(z)$ и $\Psi_j^i(z)$, можно явно выписать системы билинейных уравнений Хироты. Зафиксируем $k = lm$, $l \in \mathbb{Z}$,

удовлетворяющее (4.32). Тогда уравнение (4.33) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{|z=0} z^{lm-\langle \bar{\Lambda}'_i | \bar{\Lambda}'_m - \bar{\Lambda}'_p \rangle} \left(\sum_{\gamma_j \in P_w(\bar{\Lambda}_i)} (-1)^{\bar{\Lambda}'_i | \bar{\Lambda}'_i - \gamma_j} \varepsilon_w(\bar{\Lambda}'_i - \gamma_j, -\bar{\Lambda}'_i - \gamma_j) \right. \\ & \times : e^{(i/s_j) \tilde{H}^j(z) + i \tilde{\gamma}^j(z)} : \otimes : e^{-(i/s_j) \tilde{H}^j(z) - i \tilde{\gamma}^j(z)} : \left. \right) \left(\sum_{\beta \in P_w(\bar{\Lambda}_m), \delta \in P_w(\bar{\Lambda}_p)} \tau_\beta e^\beta \otimes \tau_\delta e^\delta \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Используя действие (4.34) коэффициентов полей $\tilde{H}^j(z)$ и $\tilde{\gamma}^i(z)$ на $\mathbb{C}[x_{k_j}^j, y_l^\gamma]$ и проделывая стандартные преобразования, как в (3.8)–(3.10), мы можем выписать билинейные уравнения Хироты, ассоциированные с данными (i)–(iii) из введения.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим случай $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}(N, \mathbb{C})$.

Группа Вейля W изоморфна группе S_N перестановок на множестве из N точек. Классы сопряженных элементов в W параметризуются последовательностями $(n_1, \dots, n_s)$, такими, что $n_1 \geq \dots \geq n_s$ и $\sum_{i=1}^s n_i = N$. Зафиксируем элемент $w \in W$, представляющий класс заданной последовательности $(n_1, \dots, n_s)$. Как мы уже отмечали (пример 2.1), все фундаментальные модули $V(\Lambda_i)$, $i \in I = \{0, 1, \dots, N-1\}$, являются модулями уровня один. Зафиксируем $i \in I$ и рассмотрим разбиение (4.8) на орбиты относительно действия элемента w на решетке весов:

$$P(V(\bar{\Lambda}_i)) = \bigsqcup_{j=1}^{n_w} S_j. \quad (4.36)$$

Тогда $n_w = s$, а $(s_1, \dots, s_s)$ — перестановка последовательности $(n_1, \dots, n_s)$, где $s_j = |S_j|$. Мы можем выбрать поднятие x элемента $w \in W$ в G , действующее на $V(\bar{\Lambda}_i)$ по формуле

$$x \cdot e_{w^k(\gamma_j)} = \varepsilon_j^{-k} e_{w^k(\gamma_j)}, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/s_j}, \quad (4.37)$$

где γ_j — максимальный вес в S_j . Элемент x определяет согласованные m -градуировки на $\hat{\mathfrak{g}}$ и $V(\bar{\Lambda}_i)$. Ортогональные проекции элемента γ_j удовлетворяют соотношению $\sum_{j=1}^s s_j \gamma'_j = 0$, а $\{\gamma'_j\}$, $j = 1, \dots, s-1$, образуют базис в $Q_w \otimes \mathbb{C}$.

Рассмотрим более детально случай $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$. Группа W изоморфна S_3 , и имеются три возможности выбора неизоморфных подалгебр Гейзенберга, соответствующих разбиениям $(1, 1, 1)$, $(2, 1)$, (3) . Первый случай, соответствующий однородной подалгебре Гейзенберга, был рассмотрен во втором параграфе. Третий случай соответствует главной подалгебре Гейзенберга. Он может быть получен редукцией из однокомпонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили и приводит к так называемой иерархии Буссинеска [2]. Второй случай отвечает элементу второго порядка $w \in W$. Пусть α_1, α_2 — стандартный базис в $\hat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C})$. С точностью до класса сопряженности мы можем взять в качестве $w = s_{\alpha_1}$ отражение, соответствующее α_1 . При действии элемента w на веса

модуля $V(\bar{\Lambda}_1)$ ($(V(\bar{\Lambda}_2) = V^*(\bar{\Lambda}_1))$) получаются две орбиты, а именно

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\gamma_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \gamma_2 = \gamma_1 - \alpha_1 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2\}, \\ S_2 &= \{\gamma_3 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Элемент $\gamma'_1 = \frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$ определяет одномерное пространство $Q_w \otimes \mathbb{C}$. Решетка Q_w порождается элементом $\alpha'_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$, а решетка весов P_w — элементом $\gamma'_1 = \frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$. Градуирующий элемент x имеет вид

$$x = \text{diag}(1, -1, 1).$$

Базис в градуированной подалгебре Картана $\mathfrak{h}_w$ состоит из элементов

$$\gamma'_1 = \frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \quad \text{и} \quad T = X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_1}.$$

Базис в соответствующей подалгебре Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_w$ имеет вид

$$\gamma_k = \gamma'_1 \otimes t^{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad H_l = T \otimes t^l, \quad l \neq 0 \pmod{2}.$$

Мы можем отождествить S_w с пространством $\mathbb{C}[x_1, x_3, \dots; y_2, y_4, \dots]$. Для компонент (4.20)–(4.21) сплетающих операторов (4.18)–(4.19) имеем следующую бонизацию:

$$\begin{aligned} \Phi_1^1(z) &= \exp \left\{ \sum_{k \text{ odd}, k \geq 0} x_k z^k + \sum_{k \geq 0} y_{2k} z^{2k} \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{k \text{ odd}, k \geq 0} \frac{z^{-k}}{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{6} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-2k}}{2k} \frac{\partial}{\partial y_{2k}} \right\} \otimes e^{\gamma'_1(-z)^{\gamma_0}}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\Phi_2^1(z) = \exp \left\{ -2 \sum_{k \geq 0} y_{2k} z^{2k} \right\} \exp \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-2k}}{2k} \frac{\partial}{\partial y_{2k}} \right\} \otimes e^{-2\gamma'_1(-z)^{-2\gamma_0}}$$

а для сопряженных операторов —

$$\begin{aligned} \Psi_1^1(z) &= \exp \left\{ - \sum_{k \text{ odd}, k \geq 0} x_k z^k - \sum_{k \geq 0} y_{2k} z^{2k} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{k \text{ odd}, k \geq 0} \frac{z^{-k}}{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-2k}}{2k} \frac{\partial}{\partial y_{2k}} \right\} \otimes e^{-\gamma'_1(-z)^{-\gamma_0}}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\Psi_2^1(z) = \exp \left\{ 2 \sum_{k \geq 0} y_{2k} z^{2k} \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-2k}}{2k} \frac{\partial}{\partial y_{2k}} \right\} \otimes e^{2\gamma'_1(-z)^{2\gamma_0}}.$$

При $k = 2l$, $l \geq 1$, мы можем записать уравнение (4.35) в следующем виде. Отождествим пространства

$$V^w(\bar{\Lambda}_m) \simeq \mathbb{C}[x'_n, y'_s] \otimes \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{(m/3)\alpha'_2 + r\alpha'_2}, \quad V^w(\bar{\Lambda}_p) \simeq \mathbb{C}[x''_n, y''_s] \otimes \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{(p/3)\alpha'_2 + r\alpha'_2},$$

$n, s \in \mathbb{Z}$, n нечетное, а s четное. При $\tau^m \in V^w(\bar{\Lambda}_m)$ имеем

$$\tau^m = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \tau_{(m/3)+r} \otimes e^{(m/3)\alpha'_2 + r\alpha'_2}.$$

Анализируя коэффициент при $e^{((m+1)/3+r)\alpha'_2} \otimes e^{((p-1)/3)\alpha'_2+s\alpha'}$ в (4.35), $r, s \in \mathbb{Z}$, мы получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{|z=0} z^{2l} & \left[(-z)^{r-s} \exp \left\{ \sum_{k \text{ odd}, k \geq 0} (x'_k - x''_k) z^k + \sum_{k \geq 0} (y'_{2k} - y''_{2k}) z^{2k} \right\} \right. \\ & \times \exp \left\{ - \sum_{k \text{ odd}, k \geq 0} \frac{z^{-k}}{2k} \left(\frac{\partial}{\partial x'_k} - \frac{\partial}{\partial x''_k} \right) - \frac{1}{6} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-2k}}{2k} \left(\frac{\partial}{\partial y'_{2k}} - \frac{\partial}{\partial y''_{2k}} \right) \right\} \\ & \times \tau_{m/3+r}(x', y') \tau_{p/3+s}(x'', y'') - (-z)^{(p-m)+2(r-s-2)} \exp \left\{ - 2 \sum_{k \geq 0} (y'_{2k} - y''_{2k}) z^{2k} \right\} \\ & \left. \times \exp \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-2k}}{2k} \left(\frac{\partial}{\partial y'_{2k}} - \frac{\partial}{\partial y''_{2k}} \right) \right\} \tau_{m/3+r+1}(x', y') \tau_{p/3+s-1}(x'', y'') \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Введем новые переменные

$$x_j = \frac{1}{2}(x'_j - x''_j), \quad u_j = \frac{1}{2}(x'_j + x''_j), \quad y_j = \frac{1}{2}(y'_j - y''_j), \quad v_j = \frac{1}{2}(y'_j + y''_j).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j} - \frac{\partial}{\partial x''_j}, \quad \frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j} + \frac{\partial}{\partial x''_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y'_j} - \frac{\partial}{\partial y''_j}, \quad \frac{\partial}{\partial v_j} = \frac{\partial}{\partial y'_j} + \frac{\partial}{\partial y''_j}.$$

Тогда уравнение (4.41) эквивалентно следующей системе билинейных уравнений Хироты:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} p_k(2x, 2y) p_{k+2l+1+r-s} & \left(-\frac{1}{2} \tilde{D}_x, -\frac{1}{6} \tilde{D}_y \right) \exp \left\{ \sum_{p, l \geq 1} x_{2p-1} D_{2p-1}^x + y_{2l} D_{2l}^y \right\} \\ & \times \tau_{m/3+r} \tau_{p/3+s} - (-1)^{p-m+r-s} \sum_{k \geq 0} p_k(-4y) p_{k+2l+1+p-m+2(s-r-2)} \left(\frac{1}{3} \tilde{D}_y \right) \\ & \times \exp \left\{ \sum_{l \geq 1} y_{2l} D_{2l}^y \right\} \tau_{m/3+r+1} \tau_{p/3+s-1} = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где p_s — многочлены Шура, зависящие от нечетных x и четных y , $\tilde{D}_x$ обозначает $(D_{x_1}, \frac{1}{3} D_{x_3}, \dots)$, а $\tilde{D}_y$ обозначает $(\frac{1}{2} D_{y_2}, \frac{1}{4} D_{y_4}, \dots)$. Заметим, что все эти уравнения инвариантны относительно сдвигов

$$m \rightarrow (m+k) \pmod{3}, \quad p \rightarrow (p+k) \pmod{3}, \quad r \rightarrow r+l, \quad s \rightarrow s+l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Благодарности. Авторы благодарны А. Рейману за полезные комментарии и К. Роже за гостеприимство, проявленное им во время пребывания авторов в Институте Жерара Дезарга университета Лион-1, где была завершена эта работа. М. Г.-К. благодарна факультету физики в Университете Рим-1 и Институту высших научных исследований (Париж) за гостеприимство и поддержку при подготовке этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.* Operator approach to the Kadomtsev–Petviashvili equation. Transformation group for soliton equations III. J. Phys. Soc. Japan, **50**, 3806–3812 (1981).
2. *Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.* Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18**, 1077–1110 (1982).
3. *Fateev V. A., Zamolodchikov A. B.* Parafermionic Z_N -models. Sov. J. Nucl. Phys., **43**, 1031 (1986).
4. *Frenkel Ed., Kac V., Radul A., Wang W.* $W_{1+\infty}$ and $W(\mathfrak{gl}_N)$ with central charge N . Comm. Math. Phys. **170**, 337–357 (1995).
5. *Frenkel I. B., Reshetikhin N. Yu.* Quantum affine algebras and holonomic difference equations. Comm. Math. Phys. **146**, 1–60 (1992).
6. *Gerasimov A., Khoroshkin S., Lebedev D., Mironov A., Morozov A.* Generalized Hirota equations and representation theory. The Case of $SL(2)$ and $SL_q(2)$. Internat. J. Modern Phys., **10**, No. 18, 2589–2614 (1995).
7. *Golenishcheva-Kutuzova M.* Soliton equations with Wakimoto modules symmetries. $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -case. In preparation.
8. *Golenishcheva-Kutuzova M., Kac V.* Γ -Conformal algebras, q-alg/9709006; J. Math. Phys. **39**, No. 4, 2290–2305 (1998).
9. *Kac V. G.* Infinite dimensional Lie algebras. Third edition, Cambridge Univ. Press, 1990. [Русский перевод: *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993].
10. *Kac V. G.* Vertex algebras for beginners, University lecture series, Vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
11. *Kac V. G., Kazhdan D. A., Lepowsky J., Wilson R. L.* Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras. Adv. in Math., **4**, No. 1, 83–112 (1981).
12. *Kac V. G., van de Leur J.* The n -component KP hierarchy and representation theory. In: Important Developments in Soliton Theory (A. Fokas and V. Zakharov, eds.), Springer Series in Nonlinear Dynamics, 1993, pp. 302–343.
13. *Kac V. G., Peterson D. H.* 112 constructions of the basic representation of the loop group of E_8 . In: Proc. of the Symposium “Anomalies, Geometry, Topology,” World Scientific, 1985, pp. 276–289.
14. *Kac V. G., Wakimoto M.* Exceptional hierarchies of soliton equations, Proc. Symposia in Pure Math. **141**, 191–237 (1989).
15. *Харчев С., Хорошкин С., Лебедев Д.* Сплетающие операторы и билинейные уравнения Хироты, Теор. и матем. физ., **104**, № 1, 144–157 (1995).
16. *van de Leur J.* The $[n_1, n_2, \dots, n_s]$ th reduced KP hierarchy and $W_{1+\infty}$ constrain. In Proc. of the Int. Conf. on Math. Phys., String Theory and Quant. Gravity at Alushta, 1994.
17. *Sato M.* Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold. RIMS Kokyuroku, Vol. 439, 1981, pp. 30–46.

Международный центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Ландау
email: kutuzova@vitep5.itep.ru, kutuzova@desargues.univ-lyon1.fr

Поступило в редакцию
16 сентября 1998 г.

Институт теоретической и экспериментальной физики
email: lebedev@vitep5.itep.ru, lebedev@desargues.univ-lyon1.fr