Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, Трехстраничный подход в теории узлов. Кодирование и локальные движения, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 25–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:46:35

УДК 515.164.63

Трехстраничный подход в теории узлов. Кодирование и локальные движения*

© 1999. И. А. Дынников

В настоящей работе предлагается новый комбинаторный подход в теории узлов, основанный на вложении узлов и зацеплений в объединение трех полуплоскостей с общей границей. Сама по себе идея вложения узлов в «книгу» крайне естественна и рассматривалась еще в [1]. Среди недавних работ о вложениях в книгу с неограниченным числом страниц мы упомянем [2] и [3] (см. также ссылки в этих работах).

Ограничение числа страниц тремя (или любым другим числом ≥ 3) дает удобный способ *кодирования* зацеплений словами в конечном алфавите. Для соответствующих слов мы указываем конечный набор локальных замен, реализующий эквивалентность зацеплений по аналогии с движениями Райдемайстера для плоских диаграмм зацеплений.

§ 1. Трехстраничные диаграммы

Пусть P_1, P_2, P_3 — три полуплоскости в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, границы которых совпадают: $\partial P_1 = \partial P_2 = \partial P_3 = l$ (рис. 1). Обозначим их объединение $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ через $\mathbb{Y}$. На прямой l выберем ориентацию.

Рис. 1. Трехстраничная книга $\mathbb{Y} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$

В настоящей работе под *ломаной линией* мы подразумеваем одномерное PL-подмногообразие в $\mathbb{R}^3$ (не обязательно связное и, возможно, пустое), каждая компонента которого компактна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Трехстраничной диаграммой зацепления* мы назовем замкнутую ломаную линию $L \subset \mathbb{Y}$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

1) *трансверсальность* к прямой l : пересечение $L \cap l$ конечно, $L \cap l = A_1 \cup \dots \cup A_m$, и два ребра ломаной L , примыкающие к вершине A_k , лежат в различных полуплоскостях P_i для любого $k \leq m$;

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00090).

2) *монотонность*: ограничение ортогональной проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow l \cong \mathbb{R}$ на каждую из связных компонент пересечения $L \cap P_i$ является монотонной функцией для любого $i = 1, 2, 3$.

Пример трехстраничной диаграммы зацепления показан на рис. 2.

Рис. 2. Трехстраничная диаграмма зацепления

Если ломаная L в определении 1 ориентирована, то мы называем ее *ориентированной* трехстраничной диаграммой. Число вершин $m = m(L) = \#(L \cap l)$ на прямой l называется *сложностью* диаграммы L . Связные компоненты пересечений $L \cap P_i$ называются *ребрами* диаграммы L . Условие 2) в определении 1 означает, что каждое ребро взаимно однозначно проецируется на отрезок, соединяющий ее концевые точки. Отсюда, в частности, следует, что каждая связная компонента трехстраничной диаграммы пересекает прямую l , которую мы будем называть *линией переплета*.

Если ребро соединяет соседние точки A_i и A_{i+1} или крайние точки A_1 и A_m , то оно называется *тривиальным* (мы предполагаем, что вершины $A_i \in L \cap l$ занумерованы в соответствии с направлением линии переплета l).

Каждая трехстраничная диаграмма зацепления очевидным образом задает некоторое зацепление в $\mathbb{R}^3$: нужно только взять композицию вложений $L \subset \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^3$ и «забыть» про $\mathbb{Y}$. Введем теперь преобразования трехстраничных диаграмм, приводящие к изотопным зацеплениям. Обозначим плоскость $\mathbb{Y} - (P_i - l)$ через Π_i , $i = 1, 2, 3$. Пусть L — некоторая трехстраничная диаграмма.

Рис. 3. Простое движение ($i = 3$)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что трехстраничная диаграмма L' получается из L *простым движением* в плоскости Π_i , $1 \leq i \leq 3$, если для некоторой связной компоненты γ пересечения $L \cap \Pi_i$ и некоторой связной компоненты γ' пересечения $L' \cap \Pi_i$ мы имеем (см. рис. 3)

$$L - \gamma = L' - \gamma'.$$

ТЕОРЕМА 1. *Любое зацепление можно представить трехстраничной диаграммой. Две трехстраничные диаграммы представляют изотопные зацепления тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой конечным числом простых движений.*

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Очевидно, что простые движения сохраняют класс изотопии зацепления. Поэтому нужно только доказать, что простых движений достаточно, чтобы реализовать любую изотопию между двумя трехстраничными диаграммами. Мы сделаем это в три шага.

Сначала мы определим специальный класс трехстраничных диаграмм и покажем, как по плоской диаграмме зацепления построить специальную трехстраничную диаграмму, представляющую то же зацепление (таким образом, мы попутно докажем первое утверждение теоремы). Обращение плоской диаграммы в трехстраничную не единственно, и следующим шагом мы покажем, что различные способы обращения, а также движения Райдемайстера приводят к эквивалентным трехстраничным диаграммам, т. е. диаграммам, получающимся друг из друга конечным числом простых движений. И наконец, мы покажем, что любая трехстраничная диаграмма эквивалентна некоторой специальной трехстраничной диаграмме.

Шаг 1. Скажем, что данная трехстраничная диаграмма зацепления *специальная*, если каждое ее ребро в полуплоскости P_2 имеет длину 2, т. е. соединяет некоторую вершину A_i с вершиной A_{i+2} .

Рис. 4. Превращение плоской диаграммы зацепления в трехстраничную диаграмму

Пусть D — плоская диаграмма зацепления. Для каждого перекрестка диаграммы D отметим маленький отрезок верхней дуги («мост») (см. рис. 4(a)). Пусть α — произвольный ориентированный путь в плоскости диаграммы D , обладающий следующими свойствами:

- 1) α проходит по каждому мосту ровно один раз;
- 2) α пересекает оставшуюся часть диаграммы D трансверсально;
- 3) α не имеет самопересечений;
- 4) начало и конец пути α лежат вне D (рис. 4(b)).

Диаграмму D , снабженную такой кривой α , будем называть *линеаризованной диаграммой зацепления*.

Между изотопическими классами линеаризованных плоских диаграмм и изотопическими классами трехстраничных диаграмм имеется очевидное взаимно однозначное соответствие. Для превращения линеаризованной плоской диаграммы в трехстраничную нужно деформировать плоскость так, чтобы путь α оказался отрезком некоторой прямой, затем приклеить вдоль этой прямой полуплоскость, и, наконец, вытолкнуть мосты в приклеенную полуплоскость (рис. 4(c)–(d)).

Шаг 2. Доказательство следующего утверждения очевидно.

ЛЕММА 1. *Две линеаризованные плоские диаграммы (D, α) и (D', α') представляют изотопные зацепления тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой конечной последовательностью преобразований следующих типов:*

тип А

тип В

тип С (движения Райдемайстера)

ЛЕММА 2. *Преобразования специальных трехстраничных диаграмм, соответствующие перечисленным в лемме 1 преобразованиям линеаризованных диаграмм, представляются в виде композиции простых движений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что каждое из преобразований типа А или В превращается в одно простое движение соответствующих трехстраничных диаграмм. Преобразования типа С1 и С2 разлагаются в композицию соответственно двух и трех простых движений, которые также очевидны.

Мы укажем последовательность простых движений, дающих преобразование типа С3, единственный нетривиальный случай. Для определенности предположим, что путь α на рисунке в лемме 1 направлен из левого верхнего в правый нижний угол. Первые четыре диаграммы, т.е. первые три простых движения, изображены на рис. 5. Пятая, шестая, седьмая и восьмая диаграммы симметричны четвертой, третьей, второй и первой диаграммам соответственно относительно прямой, лежащей в плоскости страницы P_2 и перпендикулярной линии переплета l . Первое преобразование есть простое движение в плоскости P_1 , второе — в плоскости P_2 , третье — в плоскости P_3 .

Рис. 5. Простые движения, реализующие движение Райдемайстера типа III

Шаг 3. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось установить следующее.

ЛЕММА 3. *Любая трехстраничная диаграмма эквивалентна некоторой специальной трехстраничной диаграмме.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что, используя простые движения, можно избавиться от всех тривиальных ребер в полуплоскости P_2 . Затем мы будем применять простые движения, показанные на рис. 6, до тех пор, пока это возможно. Нетрудно видеть, что этот процесс закончится за конечное число шагов, а результат будет специальной трехстраничной диаграммой.

Рис. 6. Приведение трехстраничной диаграммы к специальному виду

§2. Кодировка трехстраничных диаграмм

Рассмотрим множество $\mathbb{A}$, состоящее из следующих двенадцати векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & b_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & c_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & d_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, & a_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & b_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ c_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & d_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & a_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & b_3 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & c_3 &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & d_3 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть дана некоторая неориентированная трехстраничная диаграмма L . Обозначим, как и раньше, вершины из $L \cap l$ через $A_1, \dots, A_m$, занумеровав их в порядке следования на линии переплета l . Каждой вершине A_k сопоставим ее *тип* — вектор $x_k \in \mathbb{A}$, определенный по следующему правилу: i -я координата вектора x_k для $i \in \{1, 2, 3\}$ равна

$$x_k^i = \begin{cases} 1, & \text{если } A_k \text{ — левый конец некоторого ребра,} \\ & \text{лежащего в полуплоскости } P_i, \\ -1, & \text{если } A_k \text{ — правый конец некоторого ребра,} \\ & \text{лежащего в полуплоскости } P_i, \\ 0, & \text{если } A_k \text{ не является концом ребра, лежащего в } P_i. \end{cases}$$

Трехстраничной диаграмме L мы сопоставляем следующее слово в алфавите $\mathbb{A}$:

$$w_L = x_1 \dots x_m.$$

Например, трехстраничной диаграмме зацепления Уайтхеда, показанной на рис. 2, соответствует слово

$$a_1 a_2 d_1 a_3 d_2 d_1 d_3 d_2 d_1 d_3 c_2 c_3.$$

Обозначим через W множество всех слов в алфавите $\mathbb{A}$, включая пустое слово $\emptyset$. Нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для $i \in \{1, 2, 3\}$ слово $w = x_1 \dots x_m \in W$ называется i -сбалансированным, если $\sum_{k=1}^m x_k^i = 0$ и

$$\sum_{k=1}^p x_k^i \geq 0 \quad \text{для всех } 1 \leq p \leq m.$$

Если слово i -сбалансированно для всех $i \in \{1, 2, 3\}$, то мы говорим, что оно *полностью сбалансированно*.

По-другому i -сбалансированность можно определить так: если в последовательности $x_1^i \dots x_m^i$ заменить все «1» на открывающую скобку, а все «-1» — на закрывающую, то получится выражение со сбалансированными скобками. Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Слово $w \in W$ имеет вид $w = w_L$, где L — некоторая трехстраничная диаграмма, тогда и только тогда, когда оно полностью сбалансированно. Две неориентированные трехстраничные диаграммы L и L' объемлемо изотопны в $\mathbb{Y}$ тогда и только тогда, когда $w_L = w_{L'}$.

Таким образом, подмножество $W_0 \subset W$ полностью сбалансированных слов в алфавите $\mathbb{A}$ классифицирует трехстраничные диаграммы с точностью до объемлемой изотопии в $\mathbb{Y}$. В следующем параграфе мы укажем набор локальных преобразований сбалансированных слов, порождающий отношение эквивалентности трехстраничных диаграмм.

§3. Локальные движения.

Простые движения, введенные выше, нелокальны. В этом параграфе мы сведем их к «более простым». Для начала мы разложим простые движения в композицию элементарных движений трех типов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каждое простое движение реализуется конечной последовательностью простых движений следующих трех типов:

тип I (раздутие/стягивание тривиального ребра):

тип II (вставка/удаление тривиального ребра):

тип III (перестановка параллельных незацепленных ребер):

На рисунках выше подразумевается, что хвост, перпендикулярный линии переплета: $\square\square$, может быть направлен как вправо: $\square\diagup$, так и влево: $\square\diagdown$. Если на рисунке показан только один хвост, прикрепленный к данной вершине на линии переплета, то подразумевается, что второй лежит в полуплоскости, не показанной на рисунке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности предположим, что мы хотим выполнить простое движение в плоскости $P_3 = P_1 \cup P_2$, т.е. заменить некоторую связную компоненту γ пересечения $L \cap P_3$ на другой путь $\gamma' \subset P_3$, $\partial\gamma = \partial\gamma'$. Если пути γ и γ' изотопны в $P_3 - (L - \gamma)$ (например, если γ — единственная компонента пересечения $L \cap P_3$), то проблемы нет: нужно применить конечное число элементарных движений типов I и II.

Препятствием к изотопии (сохраняющей концевые точки) между γ и γ' могут быть только другие связные компоненты $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ пересечения $L \cap P_3$, отличные от γ . Чтобы получить из γ путь γ' , мы должны осуществлять изотопии в $P_3 - (\bigcup_i \gamma_i)$ и, возможно, перебросить γ через γ_i конечное число раз.

Движение типа III позволяет перебросить γ через компоненту γ_i в случае, когда последняя состоит ровно из одного ребра. Таким образом, для завершения доказательства осталось свести все к случаю, когда каждая компонента γ_i состоит ровно из одного ребра. Для этого мы каждую вершину $A_k \in \gamma_i$, находящуюся на стыке двух ребер, одно из которых лежит в P_1 , а другое — в P_2 , раздвем в ребро, лежащее в полуплоскости P_3 . $\square$

Заметим, что каждой трехстраничной диаграмме L мы можем сопоставить граф с носителем $L \cup l \cup \{\infty\}$, где точка ∞ добавлена, чтобы превратить прямую l в замкнутую окружность. Ребра этого графа естественно раскрасить в четыре цвета: для $i = 1, 2, 3$ ребра в полуплоскости P_i раскрашиваются в i -й цвет, а вся линия переплета l окрашивается в цвет 4. Такой граф с раскраской, отмеченной точкой ∞ и ориентацией на одном из ребер цвета 4 удовлетворяет определенным условиям и содержит всю комбинаторную информацию о трехстраничной диаграмме.

С точки зрения теории таких графов элементарные движения, рассмотренные выше, являются локальными и, по-видимому, могут быть использованы для нахождения инвариантов зацеплений по аналогии с работой [6]. А именно, на каждую вершину графа можно посадить тензор с четырьмя индексами (зависящий от цветов примыкающих ребер), которые соответствуют ребрам, и затем произвести суммирование по всем ребрам. Элементарные движения приводят к алгебраическим соотношениям, которым должен удовлетворять такой тензор, чтобы указанная процедура приводила к изотопическому инварианту. Мы не выписываем здесь этих соотношений, поскольку их алгебраическая природа неясна и ни одного нетривиального решения автору не известно.

Теперь мы предъявим некоторый набор движений, являющихся локальными для слов в алфавите A . Для удобства мы будем считать индекс у a_i, b_i, c_i, d_i, P_i вычетом по модулю 3.

ТЕОРЕМА 2. *Два сбалансированных слова $w, w' \in W_0$ представляют изотопные неориентированные зацепления в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда w' можно получить из w конечной последовательностью следующих локальных замен подслов:*

$$\left. \begin{aligned} a_{i+1}d_{i-1} &\leftrightarrow a_i \leftrightarrow a_{i-1}b_{i+1}, \\ d_{i+1}d_{i-1} &\leftrightarrow b_i \leftrightarrow a_{i-1}c_{i+1}, \\ d_{i+1}c_{i-1} &\leftrightarrow c_i \leftrightarrow b_{i-1}c_{i+1}, \\ a_{i+1}c_{i-1} &\leftrightarrow d_i \leftrightarrow b_{i-1}b_{i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{i-1}b_{i-1}w_i &\leftrightarrow w_i a_{i-1}b_{i-1}, \\ d_{i-1}c_{i-1}w_i &\leftrightarrow w_i d_{i-1}c_{i-1}, \\ d_{i-1}b_{i-1}w_i &\leftrightarrow w_i d_{i-1}b_{i-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$(b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1})w_i \leftrightarrow w_i(b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}), \quad (3)$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $w_i \in X_i$ и $X_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1}a_i d_{i-1}, b_{i-1}b_i d_{i-1}, b_{i-1}c_i d_{i-1}, b_{i-1}d_i d_{i-1}\}$. Все указанные преобразования сохраняют подмножество W_0 полностью сбалансированных слов.

Для двух слов $u, v \in W$ мы пишем $u \sim v$, если u можно получить из v конечным числом локальных преобразований (1)–(3).

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству теоремы 2. Прежде всего заметим, что замены (1) соответствуют раздутию/стягиванию тривиального ребра, а все замены в (2) и (3) имеют вид: i -сбалансированное подслово переставляется с подсловом, которое одновременно $(i+1)$ -сбалансированно и $(i-1)$ -сбалансированно. Легко видеть, что указанные преобразования сохраняют сбалансированность слова и изотопический класс соответствующего зацепления.

Теперь нам нужно доказать, что элементарные движения из предложения 2 сохраняют класс эквивалентности слов по модулю преобразований (1)–(3). Для начала мы выполним некоторые предварительные вычисления.

ЛЕММА 4. *Для $i \in \mathbb{Z}$ мы имеем*

$$\begin{aligned} a_i d_i b_i &\sim a_i \sim a_i b_i d_i, & b_i d_i b_i &\sim b_i \sim a_i b_i c_i, \\ b_i d_i c_i &\sim c_i \sim d_i b_i c_i, & a_i d_i c_i &\sim d_i \sim d_i b_i d_i, \end{aligned} \quad (4)$$

$$a_i b_i \sim a_{i-1} d_{i-1}, \quad d_i c_i \sim b_{i-1} c_{i-1}, \quad d_i b_i \sim b_{i-1} d_{i-1}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} a_i d_i b_i &\sim a_i b_{i-1} b_{i+1} b_i \sim a_{i+1} d_{i-1} \sim a_i \sim a_{i-1} b_{i+1} \sim a_i d_{i+1} d_{i-1} d_i \sim a_i b_i d_i, \\ b_i d_i b_i &\sim b_i b_{i-1} b_{i+1} b_i \sim d_{i+1} d_{i-1} \sim b_i \sim a_{i-1} c_{i+1} \sim a_i d_{i+1} d_{i-1} c_i \sim a_i b_i c_i, \\ b_i d_i c_i &\sim b_i b_{i-1} b_{i+1} c_i \sim d_{i+1} c_{i-1} \sim c_i \sim b_{i-1} c_{i+1} \sim d_i d_{i+1} d_{i-1} c_i \sim d_i b_i c_i, \\ a_i d_i c_i &\sim a_i b_{i-1} b_{i+1} c_i \sim a_{i+1} c_{i-1} \sim d_i \sim b_{i-1} b_{i+1} \sim d_i d_{i+1} d_{i-1} d_i \sim d_i b_i d_i, \\ a_i b_i &\sim a_{i-1} b_{i+1} b_i \sim a_{i-1} d_{i-1}, & d_i c_i &\sim b_{i-1} b_{i+1} c_i \sim b_{i-1} c_{i-1}, \\ & & d_i b_i &\sim b_{i-1} b_{i+1} b_i \sim b_{i-1} d_{i-1}. \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 5. *Для любых $i \in \mathbb{Z}$, $x \in \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ мы имеем*

$$d_{i-1} b_{i+1} b_{i-1} d_{i+1} x \sim x d_{i-1} b_{i+1} b_{i-1} d_{i+1}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}
& d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}x \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}b_{i+1}d_{i+1}x \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i+1} \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}b_{i-1}b_i b_{i-1}xd_{i-1}d_i d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}b_i b_{i-1}xd_{i-1}d_i d_{i-1}b_{i-1}d_{i+1} \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i-1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i+1}b_{i+1}d_{i-1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}b_{i+1}b_i d_{i+1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i-1}d_i b_i d_{i+1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}d_i b_i b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}xb_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}d_{i+1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}d_i b_i d_{i+1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}d_{i+1}d_i b_i b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i+1}d_{i+1}d_i d_{i+1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \sim d_{i-1}b_{i+1}d_{i+1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}d_{i-1}b_{i-1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \sim d_{i-1}b_{i-1}xd_{i-1}d_{i-1}b_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim d_{i-1}b_{i-1}xd_{i-1}d_{i-1}d_i b_{i-1}d_{i+1} \sim d_{i-1}b_{i-1}xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \\
& \sim xd_{i-1}b_{i-1}d_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1} \sim xd_{i-1}b_{i+1}b_{i-1}d_{i+1}.
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 6. Для $i \in \mathbb{Z}_3$ мы имеем

$$\begin{aligned}
b_{i-1}^2 a_i d_{i-1}^2 & \sim b_{i-1} a_i d_{i-1} d_i^2 b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i, \\
b_{i-1}^2 b_i d_{i-1}^2 & \sim b_{i-1} b_i d_{i-1} d_i^2 b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i, \\
b_{i-1}^2 c_i d_{i-1}^2 & \sim d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i^2 b_{i-1} c_i d_{i-1}, \\
b_{i-1}^2 d_i d_{i-1}^2 & \sim d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i^2 b_{i-1} d_i d_{i-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}
b_{i-1}^2 a_i d_{i-1}^2 & \sim b_{i-1}^2 a_i d_i b_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1}^2 a_{i+1} b_{i+1} b_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1} a_{i+1} b_{i+1} b_{i-1} b_i d_{i-1}^2 \\
& \sim b_{i-1} a_i d_i b_{i-1} b_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1} a_i d_i b_{i-1} b_i d_{i-1} b_{i+1} b_i \\
& \sim b_{i-1} a_i b_{i+1} d_i b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i \sim b_{i-1} a_i d_{i-1} d_i^2 b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i, \\
b_{i-1}^2 b_i d_{i-1}^2 & \sim b_{i-1}^2 b_i d_i b_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1}^2 d_{i+1} b_{i+1} b_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1} d_{i+1} b_{i+1} b_{i-1} b_i d_{i-1}^2 \\
& \sim b_{i-1} b_i d_i b_{i-1} b_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1} b_i d_i b_{i-1} b_i d_{i-1} b_{i+1} b_i \\
& \sim b_{i-1} b_i b_{i+1} d_i b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i \sim b_{i-1} b_i d_{i-1} d_i^2 b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i, \\
b_{i-1}^2 c_i d_{i-1}^2 & \sim b_{i-1}^2 d_i b_i c_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1}^2 d_i d_{i+1} c_{i+1} d_{i-1}^2 \sim b_{i-1}^2 d_i d_{i-1} d_{i+1} c_{i+1} d_{i-1} \\
& \sim b_{i-1}^2 d_i d_{i-1} b_i c_i d_{i-1} \sim d_i d_{i+1} b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i c_i d_{i-1} \\
& \sim d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i d_{i+1} c_i d_{i-1} \sim d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i^2 b_{i-1} c_i d_{i-1}, \\
b_{i-1}^2 d_i d_{i-1}^2 & \sim b_{i-1}^2 d_i b_i d_i d_{i-1}^2 \sim b_{i-1}^2 d_i d_{i+1} b_{i+1} d_{i-1}^2 \sim b_{i-1}^2 d_i d_{i-1} d_{i+1} b_{i+1} d_{i-1} \\
& \sim b_{i-1}^2 d_i d_{i-1} b_i d_i d_{i-1} \sim d_i d_{i+1} b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i d_i d_{i-1} \\
& \sim d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i d_{i+1} d_i d_{i-1} \sim d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i^2 b_{i-1} d_i d_{i-1}.
\end{aligned}$$

□

Следующее утверждение, обобщающее лемму 3, играет ключевую роль в доказательстве теоремы 2.

ЛЕММА 7. *Для любого i -сбалансированного слова $w \in W$ существует набор $w_1, \dots, w_k$ слов из X_i , такой, что $w \sim w_1 \dots w_k$.*

Обратное утверждение очевидно: если $w_j \in X_i, j = 1, \dots, k$, то слово $w_1 \dots w_k$ является i -сбалансированным. Мы будем обозначать множество всех i -сбалансированных слов через $\overline{X}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Пусть $w \in W$ — некоторое i -сбалансированное слово. Произведем в нем всевозможные замены (1) из следующего списка

$$\begin{aligned} a_{i-1} &\rightsquigarrow a_i d_{i+1}, & a_{i+1} &\rightsquigarrow a_i b_{i-1}, & c_{i-1} &\rightsquigarrow b_{i+1} c_i, \\ c_{i+1} &\rightsquigarrow d_{i-1} c_i, & b_{i+1} &\rightsquigarrow d_{i-1} d_i, & d_{i+1} &\rightsquigarrow b_i b_{i-1}. \end{aligned}$$

Мы получим новое слово w' , содержащее только буквы $a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1}, d_{i-1}$. Кроме того, поскольку слово w было сбалансированным, новое слово w' обладает следующим свойством: если заменить в нем все вхождения буквы b_{i-1} на открывающую скобку (, а все вхождения d_{i-1} — на закрывающую скобку), то получится выражение со сбалансированными скобками.

Теперь, чтобы преобразовать слово w' в композицию слов из X_i , будем применять следующие локальные замены до тех пор, пока возможно:

$$b_{i-1} d_{i-1} \rightsquigarrow d_i b_i,$$

$$b_{i-1} uv \rightsquigarrow b_{i-1} d_{i-1} b_{i-1} uv \rightsquigarrow b_{i-1} u d_{i-1} b_{i-1} v, \quad \text{где } u, v \in X_i,$$

$$b_{i-1}^2 a_i d_{i-1}^2 \rightsquigarrow b_{i-1} a_i d_{i-1} d_i^2 b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i, \quad b_{i-1}^2 b_i d_{i-1}^2 \rightsquigarrow b_{i-1} b_i d_{i-1} d_i^2 b_{i-1} b_i d_{i-1} b_i,$$

$$b_{i-1}^2 c_i d_{i-1}^2 \rightsquigarrow d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i^2 b_{i-1} c_i d_{i-1}, \quad b_{i-1}^2 d_i d_{i-1}^2 \rightsquigarrow d_i b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i^2 b_{i-1} d_i d_{i-1}.$$

Как мы показали, все указанные преобразования разлагаются в композицию локальных преобразований (1)–(3). Заменяя буквы $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ на $\bullet$, b_{i-1} на (и d_{i-1} на), получаем следующую интерпретацию указанных выше преобразований:

$$() \rightsquigarrow \bullet \bullet,$$

$$(\bullet \bullet \rightsquigarrow (\bullet)(\bullet), \quad (\bullet(\bullet) \rightsquigarrow (\bullet)((\bullet), \quad ((\bullet)\bullet \rightsquigarrow ((\bullet))(\bullet), \quad ((\bullet)(\bullet) \rightsquigarrow ((\bullet))((\bullet),$$

$$((\bullet)) \rightsquigarrow (\bullet) \bullet \bullet (\bullet) \bullet \quad \text{или} \quad \bullet (\bullet) \bullet \bullet (\bullet).$$

Легко видеть, что процесс остановится через конечное число шагов. □

Запишем теперь элементарные движения из предложения 2 алгебраически с помощью алфавита $\mathbb{A}$.

Элементарные движения типа I локальны и превращаются в точности в соотношения (1). Элементарные движения типа II записываются следующим образом:

$$a_{i-1} b_{i-1} wx \sim wy \sim a_{i+1} d_{i+1} wx, \tag{8}$$

где $w \in \overline{X}_i, x, y \in \mathbb{A}, x^i = -1 = -y^i, x^{i+1} = y^{i+1}, x^{i-1} = y^{i-1}$;

$$xwd_{i-1}c_{i-1} \sim yw \sim xwb_{i+1}c_{i+1}, \tag{9}$$

где $w \in \overline{X}_i, x, y \in \mathbb{A}, x^i = 1 = -y^i, x^{i+1} = y^{i+1}, x^{i-1} = y^{i-1}$;

$$xwd_{i-1}b_{i-1} \sim xw \sim xwb_{i+1}d_{i+1}, \tag{10}$$

где $w \in \overline{X}_i$, $x \in \mathbb{A}$, $x^i = 1$.

Докажем (8). Пусть $w \sim w_1 \dots w_k$ — разложение из леммы 7. Имеем

$$\begin{aligned} a_{i-1}b_{i-1}wx &\sim a_{i-1}b_{i-1}w_1w_2 \dots w_kx \sim w_1a_{i-1}b_{i-1}w_2 \dots w_kx \\ &\sim w_1w_2a_{i-1}b_{i-1} \dots w_kx \sim \dots \sim w_1w_2 \dots w_ka_{i-1}b_{i-1}x \\ &\sim wa_{i-1}b_{i-1}x \sim wy, \\ a_{i-1}b_{i-1}wx &\sim a_{i+1}d_{i+1}wx. \end{aligned}$$

Мы применили (2), (4) и (5). Соотношения (9) и (10) доказываются аналогично. $\square$

Чтобы разложить элементарные движения типа III в композицию преобразований (1)–(3), мы воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 8. *Мы имеем*

$$\begin{aligned} a_{i-1}a_{i+1}b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1} &\sim a_{i+1}a_{i-1}, \\ b_{i-1}a_{i+1}b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1} &\sim a_{i+1}b_{i-1}, \\ a_{i-1}d_{i+1}b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1} &\sim d_{i+1}a_{i-1}, \\ b_{i-1}d_{i+1}b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1} &\sim d_{i+1}b_{i-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}c_{i-1}c_{i+1} &\sim c_{i+1}c_{i-1}, \\ b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}c_{i+1} &\sim c_{i+1}d_{i-1}, \\ b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}c_{i-1}b_{i+1} &\sim b_{i+1}c_{i-1}, \\ b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}d_{i-1}b_{i+1} &\sim b_{i+1}d_{i-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1 \in \{a_{i-1}, b_{i-1}\}$, $x_2 \in \{a_{i+1}, d_{i+1}\}$. Из (2) и (4)–(5) мы имеем

$$\begin{aligned} x_1x_2b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1} &\sim x_1d_{i-1}x_2b_{i+1}d_{i+1}b_{i-1} \\ &\sim x_1d_{i-1}x_2b_{i-1} \sim x_2x_1d_{i-1}b_{i-1} \sim x_2x_1. \end{aligned}$$

Соотношения (12) доказываются аналогично. $\square$

Элементарные движения типа III имеют вид

$$x_1x_2wy_2y_1 \sim x_2x_1wy_1y_2, \tag{13}$$

где $w \in \overline{X}_i$, $x_1 \in \{a_{i-1}, b_{i-1}\}$, $x_2 \in \{a_{i+1}, d_{i+1}\}$, $y_1 \in \{c_{i-1}, d_{i-1}\}$, $y_2 \in \{c_{i+1}, b_{i+1}\}$. Чтобы доказать соотношение (13), мы опять воспользуемся разложением $w \sim w_1 \dots w_k$, $w_1, \dots, w_k \in X_i$. Применяя лемму 8, получаем

$$\begin{aligned} x_1x_2wy_2y_1 &\sim x_1x_2wb_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}y_1y_2 \sim x_1x_2w_1 \dots w_{k-1}w_kb_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}y_1y_2 \\ &\sim x_1x_2w_1 \dots w_{k-1}b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}w_ky_1y_2 \\ &\sim x_1x_2w_1 \dots b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}w_{k-1}w_ky_1y_2 \sim \dots \\ &\sim x_1x_2b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}w_1 \dots w_{k-1}w_ky_1y_2 \\ &\sim x_1x_2b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}wy_1y_2 \sim x_2x_1wy_1y_2. \end{aligned}$$

$\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brunn H.* Über verknotete Kurven, Mathematiker-Kongresses Zurich 1897, Leipzig, 1898, S. 256–259.
2. *Cromwell P. R., Nutt I. J.* Embedding knots and links in an open book. II: Bounds on arc index. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **119**, No. 2, 309–319 (1996).
3. *Morton H. R., Beltrami E.* Arc index and the Kauffman polynomial. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **123**, 41–48 (1998).
4. *Дынников И. А.* Трехстраничное представление зацеплений. УМН, **53**, вып. 5, 237–238 (1998).
5. *Dynnikov I. A.* A new way to represent links. One-dimensional formalism and untangling technology. Preprint, Moscow 1998, <http://mech.math.msu.su/~dynnikov>.
6. *Тураев В. Г.* Операторные инварианты связок и R -матрицы. Изв. АН СССР, сер. матем., **53**, № 5, 1073–1107 (1989).
7. *Kauffman L. H.* State models and the Jones polynomial. Topology, **26**, No. 3, 395–407 (1987).
8. *Kauffman L. H.* An invariant of regular isotopy. Trans. Amer. Math. Soc., **318**, No. 2, 417–471 (1990).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
12 мая 1999 г.