Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Минимальные поперечники метрических пространств, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 38–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:09:14

УДК 917.982.25

Минимальные поперечники метрических пространств*

© 1999. Р. С. ИСМАГИЛОВ

§ 1. Постановка задачи; изложение результатов

1. Постановка задачи. Начнем с известных определений. Пусть L — вещественное банахово пространство. *Отклонение* вектора $x \in L$ от множества $E \subset L$ и отклонение множества $A \subset L$ от E определяются формулами

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\|, \quad d(A, E) = \sup_{x \in A} d(x, E).$$

Колмогоровским k -*поперечником* множества $A \subset L$ называется величина

$$d_k(A, L) = \inf_{L_k} d(A, L_k),$$

где L_k пробегает все k -мерные линейные подпространства из L (см. [1]). (Обычно в этом определении в качестве L_k берут все k -мерные линейные многообразия из L , т.е. любые сдвиги подпространств, а не только подпространства. Отступление от этого правила не влияет на суть излагаемого ниже, но упрощает некоторые формулировки.)

Предметом нашего исследования в этой статье является следующее понятие.

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство (оно не предполагается вложенным в какое-либо банахово пространство). Назовем *минимальным k -поперечником* этого пространства нижнюю грань его колмогоровских k -поперечников при всевозможных изометрических вложениях во всевозможные банаховы пространства; обозначим эту величину через $D_k(X)$. Итак,

$$D_k(X) = \inf_{(L, i)} d_k(i(X), L), \quad (1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным парам (L, i) , состоящим из банахова пространства L и изометрического вложения $i: X \rightarrow L$.

Цель этой работы — вычисление и оценки величины $D_k(X)$. Для упрощения ограничимся конечным пространством X . Значительная часть результатов относится к простейшему метрическому пространству (X_n, ρ) , которое состоит по определению из n точек, отстоящих друг от друга на 1; можно взять для определенности $X_n = \{1, \dots, n\}$, $\rho(i, j) = 1$ при $i \neq j$. Для краткости обозначим его минимальный k -поперечник через $D_k(n)$.

2. Формула для $D_k(X)$. Всюду предполагается, что (X, ρ) — конечное метрическое пространство. Определение (1) малоприспособно для вычислений. Мы приведем более явную формулу для $D_k(X)$, но сначала введем необходимые

*Исследования поддержаны РФФИ, грант 96-15-96249.

обозначения. Пусть $\mathcal{L}(X)$ — пространство всех вещественных функций $u(x)$, $x \in X$. Положим

$$w(a, b, x, y) = \min\{\rho(x, y), \rho(x, a) + \rho(y, b) - \rho(a, b)\} \quad (a, b, x, y \in X). \quad (2)$$

Для любой функции $u \in \mathcal{L}(X)$ и точек $a, b \in X$ введем величину

$$R(u; a, b) = \max_{x, y} (u(x) - u(y) - w(a, b, x, y)).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, ρ) — конечное метрическое пространство. Тогда

$$D_k(X) = \frac{1}{2} \inf_{L_k} \max_{a \neq b} \inf_{u \in L_k} R(u; a, b), \quad (3)$$

где L_k пробегает всевозможные k -мерные линейные подпространства из $\mathcal{L}(X)$.

Равенство (3) можно переписать в виде

$$D_k(X) = \frac{1}{2} \inf_{\varphi} \max_{a \neq b} \inf_{v \in \mathbb{R}^k} R((v, \varphi); a, b), \quad (4)$$

где φ пробегает всевозможные отображения из X в $\mathbb{R}^k$, через $(\cdot, \cdot)$ обозначено обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$, а функция $(v, \varphi) \in \mathcal{L}(X)$ определяется формулой $x \mapsto (v, \varphi(x))$, $x \in X$.

Применим теорему 1 к указанному выше метрическому пространству (X_n, ρ) ; напомним обозначение $D_k(X_n) = D_k(n)$. В следующей теореме $M_u = \max_x u(x)$, $m_u = \min_x u(x)$, $u \in \mathcal{L}(X)$.

ТЕОРЕМА 2. Справедливо равенство

$$D_k(n) = \frac{1}{2} \inf_{L_k} \max_{a \neq b} \inf_{\substack{u \in L_k \\ u(a) < u(b)}} \max \left\{ \frac{M_u - u(b)}{M_u - u(a)}, \frac{u(a) - m_u}{u(b) - m_u} \right\}, \quad (5)$$

где L_k пробегает все k -мерные линейные подпространства из $\mathcal{L}(X)$, разделяющие точки пространства X .

Перепишем формулу (5) в более геометрическом виде. С этой целью для любого конечного множества $S \subset \mathbb{R}^k$ и любых точек $a \neq b$ из S обозначим через $t_{ab}(S)$ наименьшее из чисел $t \geq 0$, для которых множества $(1-t)S + ta - b$, $(1-t)S + tb - a$ отделимы при помощи $(k-1)$ -мерного линейного подпространства (последнее означает, что для некоторого вектора $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, выполняются неравенства $((1-t)x + ta - b, v) \leq 0$, $((1-t)x + tb - a, v) \geq 0$ для всех $x \in S$). Легко видеть, что

$$t_{ab}(S) = \inf_{\substack{v \in \mathbb{R}^k \\ (v, b) > (v, a)}} \max \left\{ \frac{v_+ - (v, b)}{v_+ - (v, a)}, \frac{(v, a) - v_-}{(v, b) - v_-} \right\}, \quad (6)$$

где через v_+ , v_- обозначены наибольшее и наименьшее значения функции $x \mapsto (x, v)$, $x \in S$. Положим, далее,

$$\theta(S) = \max_{a \neq b} t_{ab}(S) \quad (a \in S, b \in S). \quad (7)$$

Тогда формула (5) переписывается в виде

$$D_k(n) = \frac{1}{2} \inf_S \{\theta(S) : S \subset \mathbb{R}^k, |S| = n\} \quad (8)$$

(через $|S|$ обозначено число точек множества S).

3. Примеры явного вычисления величины $D_k(X)$. Таких примеров мало, и они относятся в основном к величинам $D_k(n)$ (т.е. к минимальным поперечникам пространства (X_n, ρ)). Легко видеть, что $D_0(n) = \frac{1}{2}$, $D_k(n) = 0$ при $n \leq 2^k$ (достаточно рассмотреть банахово пространство l_∞^k и в нем булев куб $E^k = \{0, 1\}^k$). Более содержательные примеры дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы равенства $D_1(2m+1) = 2^{-1/m-1}$, $D_1(2m) = \theta_m/2$, где θ_m — положительный корень уравнения $\theta^m + \theta^{m-1} = 1$.*

Отметим (без доказательства), что $D_2(5) = (\sqrt{5} - 2)/2$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть метрическое пространство (X, ρ) состоит из трех точек и $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$ — попарные расстояния между этими точками. Тогда $D_1(X) = (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)/4$.*

4. Оценки величины $D_k(n)$. Как уже сказано, при рассмотрении величины $D_k(n)$ можно считать, что $n \geq 2^k$.

ТЕОРЕМА 5. *При $n \geq 2^k$ справедливо неравенство*

$$D_k(n) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n^{1/k}}. \quad (9)$$

Отсюда следует, в частности, что в банаховом пространстве размерности k любой набор равноотстоящих точек содержит не более чем 2^k точек. Автор не сомневается в том, что этот факт известен, однако он не смог обнаружить его в литературе.

ТЕОРЕМА 6. *Для любого $a = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство*

$$D_k(a \cdot 2^k) \leq A/\sqrt{k}, \quad (10)$$

где число A зависит от a .

Из теорем 5 и 6 следует, что для любого $a = 2, 3, \dots$ справедливы неравенства $B/k \leq D_k(a \cdot 2^k) \leq A/\sqrt{k}$, где $A > 0$, $B > 0$ зависят от a . Несовершенство этой оценки очевидно.

§2. Доказательство теорем 1, 2

1. Дополнительные сведения о поперечниках. Здесь мы следуем книге В. М. Тихомирова [2] и статье автора [4]. Банахово пространство L с единичным шаром $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ будем иногда (в случае необходимости) обозначать через (L, B) , а норму — через $\|x\|_B$. Поперечник $d_k(A, L)$, а также его модификации, описываемые ниже, будем записывать в виде $d_k(A; L, B)$ и т.д. Введем несколько разновидностей поперечников множества A , лежащего в банаховом пространстве L , и опишем их свойства.

(а) Обозначим через $[A]$ замыкание выпуклой оболочки множества $A \cup (-A)$, т.е. замыкание множества точек вида $\sum \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in A$, $\sum |\lambda_k| \leq 1$ (суммы конечны). Гельфандовский k -поперечник множества $A \subset L$ определим формулой

$$d^{(k)}(A, L) = \inf_{L^k} \text{diam}([A] \cap L^k)$$

(здесь diam означает диаметр множества), где L^k — произвольное замкнутое подпространство из L , такое, что $\dim(L/L^k) = k$.

(b) *Линейный k -поперечник* множества $A \subset L$ определяется как

$$\delta_k(A, L) = \inf_{(L_k, \varphi)} \sup_{x \in A} \|x - \varphi(x)\|,$$

где L_k — произвольное k -мерное подпространство, а $\varphi: L \rightarrow L_k$ — произвольное непрерывное линейное отображение. Ясно, что если множество A конечно и линейно независимо, то $\delta_k(A, L) = d_k(A, L)$.

(c) *Абсолютный k -поперечник* и *абсолютный линейный k -поперечник* определяется формулами

$$d_k^a(A, L) = \inf_{(\tilde{L}, i)} d_k(i(A), \tilde{L}), \quad (11a)$$

$$\delta_k^a(A, L) = \inf_{(\tilde{L}, i)} \delta_k(i(A), \tilde{L}), \quad (11b)$$

где $(\tilde{L}, i)$ — произвольная пара, состоящая из банахова пространства $\tilde{L}$ и линейного изометрического вложения $i: L \rightarrow \tilde{L}$. Известно, что эти величины могут оказаться меньшими, чем $d_k(A, L)$, $\delta_k(A, L)$ (см. [3, 4]). Как доказано в статье автора [4],

$$\delta_k^a(A, L) = d^k(A, L). \quad (12)$$

(d) Пусть даны конечномерные линейные пространства L_1 , L_2 и невырожденная билинейная форма (x, y) , $x \in L_1$, $y \in L_2$. Поляра множества $A \subset L_1$ определяется как множество $A^\circ = \{y \in L_2 : |(x, y)| \leq 1 \text{ для всех } x \in A\}$; аналогично определяется полярна множества из L_2 . Если L_1 , L_2 — банаховы пространства с единичными шарами B_1 , B_2 , то справедливо равенство (*соотношение двойственности*)

$$d_k(B_1^\circ; L_2, B_2) = d^k(B_2^\circ; L_1, B_1) \quad (13)$$

(см. [2, гл. 2]).

Очевидно, что $d_k(A, L) = d_k([A], L)$ (то же справедливо и для других поперечников).

2. Доказательство теоремы 1. Напомним, что через $\mathcal{L}(X)$ обозначается пространство всех вещественных функций $u(x)$, $x \in X$. Это банахово пространство с нормой $\|u\|_\infty = \max_x |u(x)|$ и с единичным шаром $B_\infty = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Для любых $a \neq b$ из X обозначим через E_{ab} множество всех функций $u \in \mathcal{L}(X)$, удовлетворяющих условиям

$$|u(x) - u(y)| \leq \rho(x, y) \quad (x \in X, y \in X), \quad u(b) - u(a) = \rho(a, b).$$

Множество E_{ab} непусто, ибо содержит, например, функцию $x \mapsto \rho(x, a)$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$D_k(X) = \inf_{L_k} \max_{a \neq b} \inf_{u \in E_{ab}} d(u, L_k), \quad (14)$$

где L_k — произвольное k -мерное линейное пространство из $\mathcal{L}(X)$.

Ясно, что это равенство равносильно равенству

$$D_k(X) = \inf_G d_k(G; \mathcal{L}(X), B_\infty), \quad (15)$$

где G — любое множество, такое, что $G \cap E_{ab} \neq \emptyset$ для всех $a \neq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть P, Q — левая и правая части равенств (14), (15). Докажем, что $Q \leq P$. По определению числа P для любого $\varepsilon > 0$ существует такое банахово пространство $(L, B(L))$ и изометрическое вложение $i: X \rightarrow L$, что

$$d_k(i(X); L, B(L)) < P + \varepsilon. \quad (16)$$

Можно считать, что множество $i(X)$ линейно независимо. (Действительно, в силу свойства универсальности пространства l_∞^n в классе конечномерных банаховых пространств можно считать, что $L = l_\infty^n$. При $N > n$ имеем естественное вложение $j: l_\infty^n \rightarrow l_\infty^N$. Взяв достаточно большое N и сколь угодно мало меняя вложение $j \circ i: X \rightarrow l_\infty^N$, можно сделать множество $(j \circ i)(X)$ линейно независимым.)

Пусть M — линейная оболочка множества $i(X)$. Положим $B = B(L) \cap M$. Мы получили банахово пространство (M, B) . Через M' обозначим пространство всех линейных функций на M . Имеем естественную билинейную форму $\langle f, x \rangle$, $f \in M'$, $x \in M$. Из неравенства (16) очевидным образом вытекает, что

$$d_k^a(i(X); M, B) < P + \varepsilon. \quad (17)$$

Преобразуем левую часть этого неравенства. Во-первых, в силу линейной независимости множества $i(X)$ здесь можно заменить d_k^a на δ_k^a . Далее, используя равенство (12), можно заменить δ_k^a на d^k . Наконец, применяя равенство (13), получаем, что левая часть неравенства совпадает с $d_k(B^\circ; M', (i(X))^\circ)$. Итак, мы пришли к неравенству

$$d_k(B^\circ; M', (i(X))^\circ) < P + \varepsilon. \quad (18)$$

Теперь перенесем его в банахово пространство $(\mathcal{L}(X), B_\infty)$. С этой целью поставим в соответствие любому вектору $f \in M'$ функцию $\hat{f} \in \mathcal{L}(X)$, $\hat{f}(x) = \langle f, i(x) \rangle$, $x \in X$. Соответствие $f \mapsto \hat{f}$ дает изометрический изоморфизм банаховых пространств $(M', (i(X))^\circ)$ и $(\mathcal{L}(X), B_\infty)$. Действительно, оно биективно, ибо $i(X)$ — базис в M , и сохраняет нормы, ибо для любого $f \in M'$ имеем

$$\|\hat{f}\|_\infty = \max_x |\hat{f}(x)| = \max_x |\langle f, i(x) \rangle| = \max_{y \in i(X)} |\langle f, y \rangle| = \|f\|_{(i(X))^\circ}.$$

Итак, обозначив через $\widehat{B^\circ}$ образ множества B° при отображении $f \mapsto \hat{f}$, можно переписать неравенство (18) в виде

$$d_k(\widehat{B^\circ}; \mathcal{L}(X), B_\infty) < P + \varepsilon. \quad (19)$$

Докажем, что $\widehat{B^\circ} \cap E_{ab} \neq \emptyset$ для всех $a \neq b$ из X . Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(a, b) &= \|i(a) - i(b)\|_B = \max_{f \in B^\circ} |\langle f, i(a) - i(b) \rangle| \\ &= \max_{f \in B^\circ} |\hat{f}(a) - \hat{f}(b)| = \max_{\varphi \in \widehat{B^\circ}} |\varphi(a) - \varphi(b)|. \end{aligned}$$

Таким образом, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \rho(a, b)$ для всех a, b из X и всех $\varphi \in B^\circ$, и существует такая функция $\varphi = \varphi_{ab} \in \widehat{B^\circ}$, что $|\varphi(a) - \varphi(b)| = \rho(a, b)$. Можно считать, что $\varphi(b) - \varphi(a) = \rho(a, b)$ (заменяя, если надо, φ на $-\varphi$). Этим доказано, что $\widehat{B^\circ} \cap E_{ab} \neq \emptyset$ при $a \neq b$. Вспомним, что Q — это правая часть равенства (15).

Поэтому из (19) вытекает неравенство $Q \leq P + \varepsilon$. Так как число ε произвольно, то $Q \leq P$.

Докажем, что $P \leq Q$. По существу нам придется проделать предыдущие рассуждения в обратном порядке; однако, ради удобства читателя, мы не будем опускать подробности. По определению числа Q для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $H = \{\psi_{ab} : a, b \in X, a \neq b\}$, такое, что $\psi_{ab} \in E_{ab}$ для всех $a \neq b$ из X и $d_k(H; \mathcal{L}(X), B_\infty) < Q + \varepsilon$. Присоединим к H множество $F \subset \mathcal{L}(X)$ (возможно, пустое), такое, что линейная оболочка множества $G = H \cup F$ совпадает с $\mathcal{L}(X)$, а нормы всех функций из F достаточно малы (для дальнейшего достаточно, чтобы они были меньше, чем $\min\{\varepsilon, \rho(x, y), x \neq y\}/2$). Тогда

$$d_k(G; \mathcal{L}(X), B_\infty) < Q + 2\varepsilon. \quad (20)$$

Рассмотрим билинейную форму $(u, v) = \sum_x u(x)v(x)$, $u, v \in \mathcal{L}(X)$; далее используются полярные множества относительно этой формы. Используя соотношение (13), заменим левую часть неравенства (20) на $d^k(B_\infty^\circ; \mathcal{L}(X), G^\circ)$, а затем, применяя равенство (12), — на $\delta_k^a(B_\infty^\circ; \mathcal{L}(X), G^\circ)$. Так как $d_k^a \leq \delta_k^a$, то можно заменить левую часть неравенства (20) на $d_k^a(B_\infty^\circ; \mathcal{L}(X), G^\circ)$. Чтобы совершить еще один (последний) шаг в преобразовании неравенства (20), введем отображение $i: X \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $a \mapsto \delta_a$, где функция δ_a определена равенствами $\delta_a(x) = 0$ при $x \neq a$, $\delta_a(a) = 1$. Ясно, что множество B_∞° есть выпуклая оболочка множества $\{\pm\delta_a, a \in X\}$. Поэтому

$$d_k^a(i(X); \mathcal{L}(X), G^\circ) < Q + 2\varepsilon. \quad (21)$$

Докажем, что построенное выше отображение $i: (X, \rho) \rightarrow (\mathcal{L}(X), G^\circ)$ изометрично. Действительно,

$$\begin{aligned} \|i(x) - i(y)\| &= \sup_{f \in G} |(f, i(x) - i(y))| = \sup_{f \in G} |f(x) - f(y)| \\ &= \max \left\{ \sup_{f \in H} |f(x) - f(y)|, \sup_{f \in F} |f(x) - f(y)| \right\}. \end{aligned}$$

(Если $F = \emptyset$, то последний $\sup$ отсутствует.) В силу выбора множеств H и F имеем $\sup_{f \in H} |f(x) - f(y)| = \rho(x, y)$, $\sup_{f \in F} |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$. Следовательно, $\|i(x) - i(y)\|_{G^\circ} = \rho(x, y)$, а потому отображение i изометрично. Но тогда из (21) вытекает, что $P = D_k(X) < Q + 2\varepsilon$. Таким образом, $P \leq Q$. Лемма 1 доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, упростим правую часть доказанного равенства (14). Начнем со следующей задачи. Пусть даны функции $A_i(x)$, $B_i(x)$, $x \in X$, $1 \leq i \leq m$; требуется выяснить, при каких ограничениях на них существует функция $s(x)$, $x \in X$, удовлетворяющая неравенствам

$$|s(x) - s(y)| \leq \rho(x, y), \quad (22a)$$

$$A_i(x) \leq s(x) \leq B_i(x) \quad (i = 1, \dots, m, x, y \in X). \quad (22b)$$

ЛЕММА 2. Для существования функции $s \in \mathcal{L}(X)$, удовлетворяющей условиям (22a), (22b), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$A_i(x) \leq B_k(y) + \rho(x, y) \quad (i, k = 1, \dots, m, x, y \in X). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнены неравенства (22a), (22b), то $A_i(x) \leq s(x)$, $s(x) \leq s(y) + \rho(x, y)$, откуда следует (23). Пусть теперь выполнены неравенства (23). Положим $s(x) = \min_{k,y} (B_k(y) + \rho(x, y))$. Из этого определения и неравенства (23) вытекает (22b). Далее, для фиксированных x, y имеем $s(y) = B_k(z_0) + \rho(y, z_0)$ для некоторых k, z_0 и $s(x) \leq B_k(z_0) + \rho(x, z_0)$. Значит, $s(x) - s(y) \leq \rho(x, z_0) - \rho(y, z_0) \leq \rho(x, y)$. Отсюда вытекает (22a). Лемма доказана.

В следующей лемме используется функция $w(a, b, x, y)$ из формулы (2).

ЛЕММА 3. Если $u \in \mathcal{L}(X)$, $a \in X$, $b \in X$ и $a \neq b$, то

$$d(u, E_{ab}) = \frac{1}{2} \max_{x,y} (u(x) - u(y) - w(a, b, x, y)). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть равенства (24) — это наименьшее из чисел r , для которых существует функция $w \in \mathcal{L}(X)$, такая, что $\|u - w\|_\infty \leq r$ и $w \in E_{ab}$, т. е.

$$|w(x) - w(y)| \leq \rho(x, y), \quad |w(x) - u(x)| \leq r, \quad w(b) - w(a) = \rho(a, b). \quad (25)$$

Положим $X_1 = X \setminus \{a, b\}$, $w(a) = t$. Тогда условия (25) равносильны следующим ограничениям на функцию $w(x)$, $x \in X_1$, и на число t :

$$\begin{aligned} |w(x) - w(y)| &\leq \rho(x, y), & t - \rho(x, a) &\leq w(x) \leq t + \rho(x, a), \\ t + \rho(a, b) - \rho(x, b) &\leq w(x) \leq t + \rho(a, b) + \rho(x, b), \\ u(x) - r &\leq w(x) \leq u(x) + r & (x \in X_1, y \in X_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Временно зафиксируем t . По лемме 2 существование функции $w(x)$, $x \in X_1$, равносильно выполнению неравенств типа (23). Эти неравенства принимают вид (мы опускаем те из них, которые вытекают из остальных)

$$\begin{aligned} t &\geq u(x) - r - \rho(y, a) - \rho(x, y), & t &\leq u(y) + r + \rho(x, y) + \rho(x, b) - \rho(a, b), \\ 2r &\geq u(x) - u(y) - \rho(x, y) & (x \in X_1, y \in X_1). \end{aligned}$$

Первые два неравенства равносильны тому, что $t \geq u(x) - r - \rho(a, x)$, $t \leq u(y) + r + \rho(y, b) - \rho(a, b)$. Исключив t , получаем отсюда неравенства $2r \geq u(x) - u(y) - \rho(a, x) - \rho(b, y) + \rho(a, b)$, $2r \geq u(x) - u(y) - \rho(x, y)$, т. е. $2r \geq u(x) - u(y) - w(a, b, x, y)$. Лемма доказана.

Из лемм 1–3 вытекает теорема 1.

Докажем равенство (4). В формуле (3) можно взять в качестве L_k любое подпространство размерности $\leq k$; оно задается как линейная оболочка набора функций $u_i(x)$, $x \in X$, $1 \leq i \leq k$. Этот набор отождествим с отображением $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\varphi(x) = (u_1(x), \dots, u_k(x))$. Любую функцию $u \in L_k$ можно записать в виде $u(x) = (v, \varphi(x))$, $x \in X$, для некоторого $v \in \mathbb{R}^k$. Таким образом, формула (3) переходит в (4).

3. Доказательство теоремы 2. Обратимся к метрическому пространству (X_n, ρ) , где $X_n = \{1, \dots, n\}$ и $\rho(i, j) = 1$ при $i \neq j$. Легко подсчитать, что функция $R(u; a, b)$, использованная в теореме 1, выражается следующей формулой (мы пользуемся обозначениями $M_u = \max_x u(x)$, $m_u = \min_x u(x)$):

$$R(u; a, b) = \max\{M_u - m_u - 1, M_u - u(b), u(a) - m_u, u(a) - u(b) - 1\}.$$

Ясно, что в теореме 1 достаточно использовать только подпространства L_k , разделяющие точки из X . Если L_k — такое подпространство, $u \in L_k$ и $u(a) \neq u(b)$, то, как легко проверить,

$$\inf_{t \geq 0} R(tu; a, b) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{M_u - u(b)}{M_u - u(a)}, \frac{u(a) - m_u}{u(b) - m_u} \right\} & \text{при } u(a) < u(b), \\ 1 & \text{при } u(a) \geq u(b). \end{cases}$$

Тем самым из формулы (3) получаем формулу (5).

Наконец, преобразуем формулу (5) при помощи тех же рассуждений, которые привели нас от формулы (3) к (4) (см. конец разд. 2 этого параграфа). Используя введенное там отображение $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ и полагая $\varphi(X) = S$, приходим к формуле (8).

§3. Доказательство теорем 3, 4

1. Доказательство теоремы 3. Рассматривается пространство (X_n, ρ) , где $X_n = \{1, \dots, n\}$ и $\rho(i, j) = 1$ при $i \neq j$. Применяем теорему 2 при $k = 1$. Одномерное подпространство $L_1 \subset \mathcal{L}(X)$, участвующее в формуле (5), задается функцией $u(x)$, $x \in X$. Можно считать, что числа $c_i = u(i)$, $i \in X_n = \{1, \dots, n\}$, подчинены условиям $0 = c_1 < \dots < c_n = 1$ (этого можно добиться, заменив функцию $u(x)$ на $\alpha u(x) + \beta$, $\alpha \neq 0$, и переставив точки из X_n). Простые преобразования формулы (5) дают равенство

$$D_1(n) = \frac{1}{2} \inf_{\{c_i\}} \max_{2 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1 - c_k}{1 - c_{k-1}}, \frac{c_{k-1}}{c_k} \right\}, \quad (27)$$

где

$$0 = c_1 < \dots < c_n = 1. \quad (28)$$

Положим $2D_1(n) = t_n$. Из (27) видно, что t_n — это наименьшее из чисел t , для которых существует последовательность $\{c_i, 1 \leq i \leq n\}$, удовлетворяющая условиям (28), а также неравенствам $1 - c_k \leq t(1 - c_{k-1})$, $c_{k-1} \leq tc_k$. Последние неравенства можно переписать в виде

$$c_k \geq \max\{c_{k-1}/t, 1 - t + tc_{k-1}\}, \quad k = 2, \dots, n, \quad c_1 = 0. \quad (29)$$

Временно заменим здесь знаки неравенств на равенства и введем функции $f_k(t)$, $t \in (0, 1]$, $k \geq 1$, по формулам

$$f_1(t) = 0, \quad f_k(t) = \max\{f_{k-1}(t)/t, 1 - t + tf_{k-1}(t)\}.$$

Обозначим через θ_k положительный корень уравнения $\theta^k + \theta^{k-1} = 1$. Несложный подсчет приводит к формулам

$$f_{2k}(t) = (1 - t^p)t^{p-2k+1}, \quad f_{2k+1}(t) = (1 - t^p)t^{p-2k} \quad \text{при } t \in [\theta_p, \theta_{p+1}], \quad p \leq 2k - 1, \\ f_{2k}(t) = f_{2k+1}(t) = 1 - t^p \quad \text{при } t \in [\theta_{2k}, 1].$$

Ясно, что любая последовательность $\{c_k, k \geq 1\}$, удовлетворяющая условиям (29), удовлетворяет также неравенствам $c_k \geq f_k(t)$, а искомое число t_n — это корень уравнения $f_n(t) = 1$. Отсюда $t_{2k} = \theta_k$, $t_{2k+1} = 2^{-1/k}$, чем доказано утверждение теоремы 3.

2. Замечания к доказательству теоремы 4. Рассматривается пространство (X, ρ) , $|X| = 3$. Легко проверяется, что в этом случае $w(a, b, x, y) = \rho(a, x) + \rho(b, y) - \rho(a, b)$. Одномерное пространство $L_1 \subset \mathcal{L}(X)$, указанное в теореме 1, задается базисом $u \in \mathcal{L}(X)$. Можно считать, что эта функция принимает лишь значения t , $0 < t < 1$ (достаточно заменить ее на $\alpha u + \beta$, $\alpha \neq 0$). Теперь легко найти правую часть равенства (3).

§ 4. Доказательство теорем 5, 6

1. Доказательство теоремы 5. Пусть L — конечномерное банахово пространство (вещественное) и L_k — его k -мерное линейное подпространство, $k \geq 1$. Возьмем набор точек $A = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, такой, что

$$\|x_i - x_j\| = 1 \quad (i \neq j). \quad (30)$$

Положим $h = d(A, L_k) = \max_i d(x_i, L_k)$.

ЛЕММА 4. *Справедливо неравенство*

$$h \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n^{1/(k+1)}}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что в некотором конечномерном банаховом пространстве $\tilde{L} \supset L$ (L вложено линейно и изометрически в $\tilde{L}$) существует такой вектор y_0 , что

$$\|y_0 - x_i\| = 1/2 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для доказательства вложим L в $C[0, 1]$ и возьмем в качестве y_0 функцию $y_0(t) = (\max_i x_i(t) + \min_i x_i(t))/2$, а в качестве $\tilde{L}$ линейную оболочку множества $\{y_0\} \cup L$.

Дальнейшие построения производятся в пространстве $\tilde{L}$. Докажем неравенство (31) при $h < \frac{1}{2}$ (ибо при $h \geq \frac{1}{2}$ оно очевидно). Пусть M — линейная оболочка множества $\{y_0\} \cup L_k$; таким образом, $\dim M \leq k+1$. Пусть z_i , $1 \leq i \leq n$, — ближайшая к x_i точка из L_k . Ясно, что $\|x_i - z_i\| \leq h$, $\|z_i - z_j\| \geq 1 - 2h$ при $i \neq j$. Следовательно, шары $B_i = \{x : x \in M, \|x - z_i\| \leq \frac{1}{2} - h\}$ попарно не пересекаются. Все эти шары целиком содержатся в шаре $B = \{x : x \in M, \|x - y_0\| \leq 1\}$, ибо если $x \in B_i$, то $\|x - y_0\| \leq \|x - z_i\| + \|z_i - x_i\| + \|x_i - y_0\| \leq \frac{1}{2} - h + h + \frac{1}{2} = 1$. Введем в M объем (меру Лебега), нормированный условием $v(B) = 1$. Тогда $v(B_i) = (\frac{1}{2} - h)^r$, $r = \dim M$. Так как шары B_i , $1 \leq i \leq n$, попарно не пересекаются и лежат в шаре B , то $n(\frac{1}{2} - h)^r \leq 1$. Так как $r \leq k+1$, то $n(\frac{1}{2} - h)^{k+1} \leq 1$. Отсюда следует неравенство (31). Лемма доказана.

Из (31) вытекает неравенство

$$D_k(n) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n^{1/(k+1)}}. \quad (32)$$

Эта оценка хуже, чем (9); следующая лемма позволит улучшить ее.

ЛЕММА 5. *Справедливо неравенство*

$$D_{kp}(n^p) \leq D_k(n) \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L , L_k , $A = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, и h те же, что в начале этого параграфа. Рассмотрим банахово пространство $L^p = L \oplus \dots \oplus L$

(p раз) с нормой $\|(y_1, \dots, y_p)\| = \max_i \|y_i\|$. Возьмем в нем линейное подпространство $L_k^p = L_k \oplus \dots \oplus L_k$ (p раз) и множество $A^p = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}), x_{i_k} \in A\}$. Тогда $|A^p| = n^p$, $\dim L_k^p = kp$. Если z_i — ближайшая к x_i точка из L_k , то $\|(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) - (z_{i_1}, \dots, z_{i_p})\| = \max_k \|x_{i_k} - z_{i_k}\| \leq h$, откуда $d(A^p, L_k^p) \leq h$. Этим доказана лемма.

Продолжим оценку величины $D_k(n)$. Запишем неравенство (32), заменив в нем k и n на kp и n^p соответственно. Сочетая полученное неравенство с (33), приходим к неравенству

$$D_k(n) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n^{p/(kp+1)}}.$$

Предельный переход при $p \rightarrow \infty$ дает неравенство (9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Соображения, связанные со сравнением объемов, часто применяются в задачах о выпуклых телах (см., например, [5, с. 225]).

2. Доказательство теоремы 6. Для оценки величины $D_k(n)$ применяем равенство (8). Наша цель — построить множество $S \subset \mathbb{R}^k$ с достаточно малым значением величины $\theta(S)$. Ясно, что вместо $\mathbb{R}^k$ в формуле (8) можно взять любое k -мерное евклидово пространство. Сейчас мы построим такое пространство V и нужное множество $S \subset V$.

Возьмем сначала пространство $\mathbb{R}^{k+1}$ с обычным скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i$. Определим искомое евклидово пространство как

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0 \right\}.$$

В дальнейшем нам понадобится ортогональный проектор $P: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow V$. Теперь построим множество $S \subset V$. Сначала возьмем булев куб $E^{k+1} = \{(x_1, \dots, x_{k+1})\}$, $x_i \in \{0, 1\}$. Зафиксируем целое число r , $0 < r \leq (k+1)/2$, и определим множество $E_r^{k+1} \subset E^{k+1}$ формулой

$$E_r^{k+1} = \left\{ (x_1, \dots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : \left| \sum_{i=1}^{k+1} x_i - \frac{k+1}{2} \right| \leq r \right\}. \quad (34)$$

Наконец, используя проектор $P: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow V$, введем искомое множество

$$S = S_r^{k+1} = P(E_r^{k+1}).$$

ЛЕММА 6. *Справедливо неравенство*

$$\theta(S) \leq 2r/k. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число k нечетно. Мы должны оценить сверху числа t_{ab} , $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$. Из равенства (6) вытекает, что

$$t_{ab}(S) = \inf_v \left\{ \max \left\{ \frac{v_+ - (v, \bar{b})}{v_+ - (v, \bar{a})}, \frac{(v, \bar{a}) - v_-}{(v, \bar{b}) - v_-} \right\} \right\}, \quad (36)$$

где $v \in V$, $(v, \bar{a}) < (v, \bar{b})$, $v_+ = \max_{x \in E_r^{k+1}} (v, x)$, $v_- = \min_{x \in E_r^{k+1}} (v, x)$, а векторы $\bar{a} \in E_r^{k+1}$, $\bar{b} \in E_r^{k+1}$ определены равенствами $a = P(\bar{a})$, $b = P(\bar{b})$. Векторы

$\bar{a}$, $\bar{b}$ удобно задать соответствующими им множествами $A = \{i : \bar{a}_i = 1\}$, $B = \{i : \bar{b}_i = 1\}$.

Пусть сначала $A \setminus B \neq \emptyset$, $B \setminus A \neq \emptyset$. Определим вектор $v \in V$ равенствами

$$v_i = \begin{cases} h_1 & \text{при } i \in B \setminus A, \\ h_2 & \text{при } i \in A \setminus B, \\ 0 & \text{при } i \notin A \Delta B, \end{cases}$$

где $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $h_1|B \setminus A| + h_2|A \setminus B| = 0$ (последнее условие диктуется требованием $v \in V$). Тогда $v_+ = (v, \bar{b})$, $v_- = (v, \bar{a})$ и, как видно из равенства (36), $t_{ab}(S) = 0$.

Пусть теперь $A \subset B$. Положим $\alpha = |A|$, $\beta = |B \setminus A|$, $\gamma = k + 1 - \alpha - \beta$. Возьмем числа x, y, z , удовлетворяющие условиям $x < z < 0$ и $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, и определим вектор $v = (v_1, \dots, v_{k+1})$ равенствами $v_i = x$ при $i \in A$, $v_i = y$ при $i \in B \setminus A$ и $v_i = z$ при $i \in \{1, \dots, k+1\} \setminus B$. Тогда $y > 0$ и $v \in V$. Несложный подсчет дает

$$v_+ = \beta y + \left(\frac{1}{2}(k+1) - r - \beta\right)z, \quad v_- = \alpha x + \left(\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha\right)z, \\ (v, \bar{b}) = \alpha x + \beta y, \quad (v, \bar{a}) = \alpha x.$$

Положим $s = z/x$. Тогда $0 \leq s \leq 1$, и из (36) вытекает неравенство

$$t_{ab}(S) \leq \max \left\{ \frac{\alpha - (\alpha + \gamma - \frac{1}{2}(k+1) - r)s}{2\alpha + (\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha)s}, \frac{(\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha)s}{\alpha + (\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha + \gamma)s} \right\} \quad (37)$$

для любого $s \in [0, 1]$. Функции, стоящие в фигурных скобках в правой части этого неравенства, принимают одинаковые значения при $s = \alpha/\gamma$, причем первая из них убывает, а вторая возрастает при $s \geq 0$. Это позволяет легко найти минимум правой части неравенства (37) при $s \in [0, 1]$. В результате получаем

$$t_{ab}(S) \leq \frac{\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha}{\frac{1}{2}(k+1) + r + \alpha} \quad \text{при } \alpha \geq \gamma, \\ t_{ab}(S) \leq \frac{\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha}{\frac{1}{2}(k+1) + r - \alpha + 2\gamma} \quad \text{при } \alpha \leq \gamma.$$

Наконец, вспоминая, что $|\alpha - \frac{1}{2}(k+1)| \leq r$, $|\gamma - \frac{1}{2}(k+1)| \leq r$, приходим к неравенству $\theta(S) \leq 2r/(k+1)$ при нечетном k . Отсюда вытекает (35).

До сих пор число r было произвольным; теперь оценим число $|S|$ для подходящих r . С этой целью фиксируем число h_0 , $1 < h_0 < 2$, и определим по нему число s_0 равенством

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2s_0}^{2s_0} e^{-x^2/2} dx = \frac{h_0}{2}.$$

ЛЕММА 7. Пусть числа k, r стремятся к ∞ , подчиняясь условию $r \sim s_0 \sqrt{k}$. Тогда

$$|S| = |S_r^{k+1}| \sim 2^k h_0. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $P: E_r^{k+1} \rightarrow S$ становится биективным, если удалить точки $(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$; поэтому достаточно оценить величину

$|E_r^{k+1}|$. Используя асимптотику для факториала (либо стандартные оценки из теории вероятностей), получаем

$$|S_r^{k+1}| \sim |E_r^{k+1}| = \sum_{\frac{1}{2}(k+1)-r}^{\frac{1}{2}(k+1)+r} \binom{k+1}{i} \sim \frac{2^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \leq 2r/\sqrt{k}} e^{-x^2/2} dx \sim 2^k h_0.$$

Лемма доказана.

Положим в этой лемме $h_0 = \frac{3}{2}$. Из неравенства (35), соотношения (38) и равенства (8) вытекает оценка

$$D_k \left(\frac{3}{2} \cdot 2^k \right) \leq \frac{A}{\sqrt{k}}.$$

Из леммы 5 следует, что эта оценка остается в силе при замене $\frac{3}{2}$ на $(\frac{3}{2})^p$ (разумеется, с другой константой A). Это доказывает теорему 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogorov A. N. Über die beste Annäherung von Funktionen liner gegebenen Funktionenklasse. Ann. of Math., **37**, 107–110 (1936).
2. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Издательство МГУ, 1976.
3. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений. УМН, **1**, вып. 3, 81–120 (1960).
4. Исмаилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. УМН, **29**, вып. 3, 161–178 (1974).
5. Пич А. Ядерные локально-выпуклые пространства. Мир, М., 1967.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
16 марта 1998 г.