Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Некоторые непрерывные аналоги разложения по многочленам Якоби и векторнозначные ортогональные базисы, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 31–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:55:46

Некоторые непрерывные аналоги разложения по многочленам Якоби и векторнозначные ортогональные базисы

© 2005. Ю. А. НЕРЕТИН

§1. Теоретико-представленческая мотивировка и формулировка результатов

1.1. Непрерывные аналоги разложения по многочленам Якоби. Настоящая работа является спецфункциональным аналогом работы Молчанова [17] о тензорных произведениях унитарных представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$.

В классическом анализе хорошо известно разложение по многочленам Якоби и его непрерывный аналог — индексное гипергеометрическое преобразование Г. Вейля [33] (оно также называется преобразованием Олевского [23], преобразованием Якоби, обобщенным преобразованием Фурье; см. обзор Коорнвиндера [13], а также [8, 12, 20]). Эти классические конструкции имеют важный теоретико-представленческий смысл (см. [32]). Сферические функции проективных пространств

$$O(n+1)/O(n) \times O(1), \quad U(n+1)/U(n) \times U(1), \quad Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1) \quad (1.1)$$

над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и телом кватернионов $\mathbb{H}$ являются многочленами Якоби $P_m^{\alpha, \beta}$ при некоторых специальных значениях параметров α, β . Задача о разложении пространства L^2 на этих однородных пространствах в прямую сумму неприводимых представлений сводится к теореме о разложении функции в ряд по многочленам Якоби.

В случае гиперболических пространств

$$O(n, 1)/O(n) \times O(1), \quad U(n, 1)/U(n) \times U(1), \quad Sp(n, 1)/Sp(n) \times Sp(1) \quad (1.2)$$

аналогичную роль (см. [13, 23]) играет *индексное гипергеометрическое преобразование*

$$g(s) = \frac{1}{\Gamma(b+c)} \int_0^\infty f(x) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx. \quad (1.3)$$

Задача о разложении пространства L^2 на этих пространствах сводится к формуле обращения

$$f(x) = \frac{1}{\pi \Gamma(b+c)} \int_0^\infty g(s) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds$$

для этого интегрального преобразования.

Однако этих двух классических конструкций — многочленов Якоби и индексного преобразования — недостаточно для изучения анализа на псевдоримановых симметрических пространствах ранга 1 (этот класс пространств включает

в себя, в частности, другие вещественные формы пространств (1.1)–(1.2)). Это заставляет предположить, что существует какой-то иной аналог (или аналогии) индексного преобразования (1.3). Мы (одно) такое преобразование строим¹⁾ 2).

1.2. Задача о векторнозначных базисах. Хорошо известна иерархия Аски–Вильсона гипергеометрических ортогональных многочленов, см. [11] и [1, Ch. 6]. Почти все (и скорее всего, все) эти многочлены встречаются в теории представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ (см., например, [31, 28, 29]).

Рассмотрим тензорное произведение унитарного представления группы $SL_2(\mathbb{R})$ со старшим весом на представление с младшим весом. В каждом сомножителе есть канонический ортогональный базис, состоящий из $SO(2)$ -собственных функций; поэтому есть и канонический базис в тензорном произведении. Соответственно возникает канонический ортогональный базис в спектральном разложении тензорного произведения. Этот базис состоит из непрерывных двойственных многочленов Хана (см. [34]). Напомним (см. [1, 6.10] и [11]), что это многочлены $p_n(s^2)$, ортогональные по мере

$$\left| \frac{\Gamma(a + is)\Gamma(b + is)\Gamma(c + is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds$$

на прямой $s \in \mathbb{R}$; они задаются формулой

$$p_n(s^2) = (a + b)_n (a + c)_n {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, a + is, a - is \\ a + b, a + c \end{matrix}; 1 \right]. \quad (1.4)$$

Но та же задача имеет смысл для любой пары унитарных представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ или ее универсальной накрывающей. Эти тензорные произведения, вообще говоря, имеют двукратные спектры (см. [26, 17]). Таким образом, мы должны получить ортогональные базисы, состоящие из $\mathbb{C}^2$ -значных функций.

1.3. Обозначения. Мы используем стандартные обозначения для символа Похгаммера $(a)_n = a(a + 1) \cdots (a + n - 1)$ и для гипергеометрических функций

$${}_2F_1[a, b; c; z] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \quad {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; z \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(d)_n (e)_n n!} z^n.$$

1.4. Двойное индексное гипергеометрическое преобразование. Фиксируем $0 \leq \alpha \leq 1/2$, $\beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\alpha + i\beta \neq 0$.

¹⁾ Молчанов [17–19] использует другой метод. Ниже мы вводим дифференциальный оператор (2.1). Он возникает при ограничении оператора Лапласа (см. наш §4) в тензорном произведении унитарных представлений универсальной накрывающей группы $SL_2(\mathbb{R}) \sim$ группы $SL_2(\mathbb{R})$ на подпространства, собственные относительно группы вращений $SO(2)$. Молчанов в [17] (он рассматривает только саму группу $SL_2(\mathbb{R})$) ограничивает оператор Лапласа на функции, инвариантные относительно группы диагональных матриц. В итоге у него получается дифференциальный оператор Лежандра на некотором контуре, содержащем особые точки уравнения Лежандра.

²⁾ Было бы интересно понять, достаточно ли классического индексного преобразования (в варианте [5, XIII] или [8]) и построенного ниже в разд. 1.4 двойного индексного преобразования для получения другого доказательства формулы Планшереля [18] на псевдоримановых симметрических пространствах G/H ранга 1. Точнее, пусть K — максимальная компактная подгруппа в G , и пусть V — неприводимый K -модуль. Рассмотрим действие оператора Лапласа на $\text{Hom}_K(V, L^2(G/H))$. Верно ли, что мы во всех случаях получим гипергеометрический дифференциальный оператор (2.3) на отрезке $[0, 1]$ (классический случай) или на контуре $\text{Re } z = 1/2$ (наш случай)?

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^2$ -значных функций на полупрямой $s > 0$. Элемент такого пространства можно рассматривать как пару скалярнозначных функций $(\varphi_1(s), \varphi_2(s))$. Введем в этом пространстве скалярное произведение

$$\langle (\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [r_{11}(s)\varphi_1(s)\overline{\psi_1(s)} + r_{12}(s)\varphi_1(s)\overline{\psi_2(s)} + r_{21}(s)\varphi_2(s)\overline{\psi_1(s)} + r_{22}(s)\varphi_2(s)\overline{\psi_2(s)}] \frac{ds}{|\Gamma(2is)|^2},$$

где $r_{ij}(s)$ задаются формулой

$$R(s) = \begin{pmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma(\frac{1}{2} - \alpha - is)\Gamma(\frac{1}{2} - \alpha + is) & \Gamma(\frac{1}{2} - i\beta - is)\Gamma(\frac{1}{2} - i\beta + is) \\ \Gamma(\frac{1}{2} + i\beta - is)\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta + is) & \Gamma(\frac{1}{2} + \alpha - is)\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha + is) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Удобно записывать это скалярное произведение в векторном виде:

$$\langle (\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \end{pmatrix} R(s) \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(s)} \\ \overline{\psi_2(s)} \end{pmatrix} \frac{ds}{|\Gamma(2is)|^2}.$$

Обозначим полученное гильбертово пространство $\mathbb{C}^2$ -значных функций через $H_{\alpha, \beta}$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$. Рассмотрим две функции $Q_1(\alpha, \beta; x, s)$, $Q_2(\alpha, \beta; x, s)$, заданные формулами¹⁾

$$Q_1(\alpha, \beta; x, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + i\beta)} \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha + i\beta)/2} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{(\alpha + i\beta)/2 - is - 1/2} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2 - \alpha + is, 1/2 - i\beta + is \\ 1 - \alpha - i\beta \end{matrix}; \frac{ix + 1/2}{ix - 1/2} \right], \quad (1.6)$$

$$Q_2(\alpha, \beta; x, s) = Q_1(-\alpha, -\beta; x, s).$$

Для функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ мы определим пару функций $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ по формуле

$$\varphi_j(s) := \int_{-\infty}^\infty f(x) \overline{Q_j(\alpha, \beta; x, s)} dx, \quad j = 1, 2. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $0 \leq \alpha < 1/2$, $\alpha + i\beta \neq 0$.

(а) Оператор $f \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)$ является унитарным биективным оператором из $L^2(\mathbb{R})$ в $H_{\alpha, \beta}$.

(б) Формула обращения имеет вид

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \begin{pmatrix} Q_1(\alpha, \beta; x, s) & Q_2(\alpha, \beta; x, s) \end{pmatrix} R(s) \begin{pmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \end{pmatrix} \frac{ds}{|\Gamma(2is)|^2}. \quad (1.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $A(s)$ — функция на $\mathbb{R}$, принимающая значения в 2×2 -матрицах. Любая калибровка вида

$$(Q_1^\circ(s), Q_2^\circ(s)) := (Q_1(s), Q_2(s))A(s)^{-1}, \quad R^\circ(s) := A(s)^* R(s) A(s)$$

¹⁾ Это собственные функции введенного ниже дифференциального оператора (2.1), почти лежащие в L^2 .

дает другую форму нашего интегрального преобразования. Было бы интересно найти функции $A(s)$, для которых матрица $R^\circ(s)$ и вектор $(Q_1^\circ(s), Q_2^\circ(s))$ остаются относительно простыми.

1.5. Обобщение на случай $\alpha > 1/2$. Пусть теперь $\alpha > 1/2$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha + i\beta \neq 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через n целую часть числа $\alpha - 1/2$. Рассмотрим конечномерное линейное пространство $W_{\alpha, \beta}$, состоящее из векторов $(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Скалярное произведение в $W_{\alpha, \beta}$ мы зададим формулой

$$\langle c, c' \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \frac{2\alpha - 2k - 1}{\Gamma(2\alpha - k)k!} c_k \bar{c}'_k.$$

Далее введем функции¹⁾

$$R(\alpha, \beta; x; k) := \frac{1}{\Gamma(\alpha + i\beta)} \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha + i\beta)/2} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{-(\alpha - i\beta)/2} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -k, k - 2\alpha + 1 \\ 1 - \alpha - i\beta \end{matrix}; \frac{1}{2} + ix \right]. \quad (1.9)$$

Теперь мы рассмотрим линейный оператор

$$J_{\alpha, \beta}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H_{\alpha, \beta} \oplus W_{\alpha, \beta}, \quad (1.10)$$

заданный формулой

$$f \mapsto (\varphi_1, \varphi_2, \theta),$$

где φ_1, φ_2 , как и выше, задаются формулой (1.7), а координаты вектора $\theta \in W_{\alpha, \beta}$ имеют вид

$$\theta_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{R(\alpha, \beta; x; k)} dx.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Оператор $J_{\alpha, \beta}$ является унитарным биективным оператором.

1.6. Многочлены Романовского. Многочлены Романовского [27] — это многочлены на $\mathbb{R}$, ортогональные по весу

$$\left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha + i\beta)} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{-(\alpha - i\beta)} dx.$$

Этот вес убывает со скоростью $x^{-2\alpha}$, и поэтому можно ортогонализировать лишь конечное число степеней $1, x, x^2, \dots$. Многочлены Романовского задаются формулой

$${}_2F_1[-k, k - 2\alpha + 1; 1 - \alpha - i\beta; \frac{1}{2} + ix],$$

т. е., с точностью до элементарного множителя, формулой (1.9).

Напомним, что многочлены Якоби задаются формулой

$$P_n^{\gamma, \delta}(x) = \text{const} \cdot {}_2F_1[-n, n + \gamma + \delta, \delta + 1; (1 + x)/2]$$

Мы видим, что многочлены Романовского являются аналитическими продолжениями многочленов Якоби по верхним индексам.

Таких конечных систем известно довольно много, см. [2, 14–16, 3, 21], некоторые приложения рассматриваются в [24, 3, 4]. Такого рода многочлены являются собственными функциями некоторых дифференциальных или разностных

¹⁾Это собственные функции введенного ниже дифференциального оператора (2.1), лежащие в L^2 .

операторов второго порядка. Соответственно мы получаем хороший набор спектральных задач (что, в свою очередь, должно дать набор «новых» интегральных преобразований)¹⁾. Недавно одна из самых сложных задач такого рода (связанная с ${}_4F_3$ -многочленами из [21]) была решена Груневельтом [9].

1.7. Векторнозначные базисы. Фиксируем параметры $0 < \alpha < 1/2$, $\beta, p, q \in \mathbb{R}$. Мы рассматриваем гильбертово пространство $Y(\alpha, \beta; q)$, состоящее из $\mathbb{C}^2$ -значных функций на полуоси $s \geq 0$, со скалярным произведением

$$\begin{aligned} & \langle (\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \end{pmatrix} R(s) \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(s)} \\ \overline{\psi_2(s)} \end{pmatrix} \left| \frac{\Gamma(1+iq+is)\Gamma(1-iq+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где матрица R — та же, что и выше (1.5).

Далее, определим функции $\Xi_n^{(1)}(\alpha, \beta; p, q; s)$, $\Xi_n^{(2)}(\alpha, \beta; p, q; s)$ от переменной s формулами

$$\begin{aligned} \Xi_n^{(1)}(\alpha, \beta; p, q; s) &= \frac{\cos((p - \alpha - iq + i\beta)\pi/2)\Gamma(1 - \alpha + i\beta)}{\Gamma(\alpha - i\beta)\Gamma(1 + iq + i\beta)\Gamma(1 + iq - \alpha)} \\ &\quad \times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} (1 - \alpha + i\beta - p + iq)/2 - n, 1/2 + iq + is, 1/2 + iq - is \\ 1 + iq + i\beta, 1 + iq - \alpha \end{matrix}; 1 \right], \quad (1.12) \\ \Xi_n^{(2)}(\alpha, \beta; p, q; s) &= \Xi_n^{(1)}(-\alpha, -\beta; p, q; x). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Гипергеометрический ряд ${}_3F_2(a_1, a_2, a_2; b_1, b_2; 1)$ сходится абсолютно при $\sum a_i < \sum b_j$ и продолжается как мероморфная (однозначная) функция на произвольные значения параметров a_1, a_2, a_2, b_1, b_2 . Мы понимаем (1.12) как значение этой мероморфной функции. Ниже, в (3.4), функция $\Xi_n^{(1)}$ представлена в виде гипергеометрического ряда, который сходится при всех интересующих нас значениях параметров.

ТЕОРЕМА 1.3. Система функций $(\Xi_n^{(1)}, \Xi_n^{(2)})$, где n пробегает $\mathbb{Z}$, является ортонормированным базисом гильбертова пространства $Y(\alpha, \beta; q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что выражение (1.12) имеет структуру

$$\text{const} \cdot {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n + h, a + is, a - is \\ a + b, a + c \end{matrix}; 1 \right] \quad (1.13)$$

с $\text{Re } a = 1/2$, $\text{Re } b = 1/2$, $c \in \mathbb{R}$. Кроме того, по сравнению с формулой (1.4) для многочленов Хана параметр n сдвигается на некоторую комплексную величину h .

¹⁾ Кажется, сейчас лишь разностные операторы остаются интересными. Есть 3 типа разностных операторов, связанных со следующими операторами сдвига:

(а) сдвиг на решетке $\mathbb{Z}$: $Tf(n) = f(n+1)$,

(б) сдвиг на прямой $\mathbb{R}$: $Tf(x) = f(x+1)$,

(с) сдвиг на прямой $\mathbb{R}$ в мнимом направлении: $Tf(x) = f(x+i)$.

Кажется, в случае (б) мы получим бесконечные кратности. Так или иначе, варианты (а) и (с) интересны для наших целей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные возмущения для нескольких более простых гипергеометрических ортогональных систем (Лагерра, Якоби, Мейкснера–Поллачека, Мейкснера) построены в [22]¹⁾.

1.8. Дальнейшая структура статьи. Теоремы 1.1, 1.2 доказаны в §2, теорема 1.3 — в §3. В §4 мы сводим задачу о разложении тензорного произведения представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ основной серии к теореме 1.2.

§2. Спектральное разложение гипергеометрического дифференциального оператора на контуре $\operatorname{Re} z = 1/2$

Предлагаемый ниже вывод теорем 1.1, 1.2 является прямым, но очень утомительным. Мы просто применяем теорему Г. Вейля–Титчмарша–Кодаиры к подходящему дифференциальному оператору. Сама эта теорема с большим количеством примеров разобрана в гл. XIII книги Данфорда–Шварца [5]; см. также книгу Титчмарша [31].

Для классического индексного гипергеометрического преобразования (1.3) известно несколько доказательств формулы обращения, см. [13, 23] и [32, 7.8.8]. Было бы интересно найти более короткое доказательство теоремы 1.1.

2.1. Гипергеометрический оператор. Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Мы рассматриваем дифференциальный оператор

$$D := \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + \frac{(\alpha + i\beta)^2}{4(1/2 + ix)} + \frac{(\alpha - i\beta)^2}{4(1/2 - ix)} + \frac{1}{4}. \quad (2.1)$$

Этот оператор формально самосопряжен в $L^2(\mathbb{R})$. Его резольвента $(D - \lambda)^{-1}$ ниже будет явно вычислена, и окажется, что она корректно определена при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Поэтому индексы дефекта оператора D равны 0; это влечет за собой существенную самосопряженность нашего оператора. Наша цель — построить спектральное разложение оператора D .

Положим

$$r(x) := \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha + i\beta)/2} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{-(\alpha - i\beta)/2}.$$

Вычисляя непосредственно дифференциальный оператор

$$Bf := r^{-1} D(rf),$$

получаем

$$B = \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) \frac{d^2}{dx^2} + (\beta + x(2 - 2\alpha)) \frac{d}{dx} + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Переходя в этом выражении к комплексной переменной

$$z = 1/2 + ix,$$

получаем оператор

$$A := -z(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} - (1 - \alpha - i\beta - z(2 - 2\alpha)) \frac{d}{dz} - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (2.2)$$

¹⁾ В [6, 30] содержится попытка найти подход к векторнозначным специальным функциям с помощью сферических функций; дальнейшие ссылки см. в этой же работе. Этот подход отличен от нашего, основанного на спектральных задачах с кратными спектрами.

Поэтому уравнение $Af = \mu^2 f$ оказывается гипергеометрическим дифференциальным уравнением

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{d}{dz} - ab \right] f = 0 \quad (2.3)$$

с

$$a = 1/2 - \alpha + \mu, \quad b = 1/2 - \alpha - \mu, \quad c := 1 - \alpha - i\beta.$$

Теперь мы можем использовать куммеровские ряды для решения уравнения $Df = \mu^2 f$. Ниже мы следуем стандартным обозначениям $u_1, \dots, u_6$ из [7] для куммеровских решений стандартного гипергеометрического уравнения (2.3) и используем явные формулы (2.9.1)–(2.9.24) из [7] для их разложений в ряды.

2.2. Базисы в пространстве решений гипергеометрического уравнения. Мы будем использовать четыре базиса в пространстве решений уравнения $(D - \mu^2)f = 0$.

Базис S_1, S_2 . Выписывая решения Куммера u_1, u_5 стандартного гипергеометрического уравнения (2.3), мы получаем следующую пару решений S_1, S_2 уравнения (2.1):

$$S_1(\alpha, \beta; \mu; x) := \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha+i\beta)/2} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{(\alpha+i\beta)/2 - \mu - 1/2} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2 - \alpha + \mu, 1/2 - i\beta + \mu \\ 1 - \alpha - i\beta \end{matrix}; \frac{ix + 1/2}{ix - 1/2} \right], \quad (2.4)$$

$$S_2(\alpha, \beta; \mu; x) = S_1(-\alpha, -\beta; \mu; x).$$

Гипергеометрический ряд в (2.4) абсолютно сходится при $\operatorname{Im} x > 0$, или, что то же самое, при $\operatorname{Re} z < 1/2$. На прямой $\operatorname{Im} x = 0$ он сходится условно. Он, однако, аналитически продолжается через эту прямую, и удобнее считать, что мы рассматриваем это аналитическое продолжение.

Далее предположим, что при $x = iy$ с $-1/2 < y < 1/2$ (или, что то же самое, при $0 < z < 1$)

$$\left(\frac{1}{2} + ix \right)^\lambda := e^{\lambda \ln(1/2 + ix)}, \quad \left(\frac{1}{2} - ix \right)^\nu := e^{\nu \ln(1/2 - ix)}.$$

Теперь мы можем считать, что наши решения S_1, S_2 определены в области $\{\operatorname{Re} z \leq 1/2\} \setminus [-\infty, 0)$.

Решения S_1, S_2 имеют асимптотики

$$S_1(x) \sim \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{(\alpha+i\beta)/2}, \quad S_2(x) \sim \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha+i\beta)/2} \quad \text{при } x \rightarrow i/2. \quad (2.5)$$

Мы также можем задать S_1 формулой

$$\left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-(\alpha+i\beta)/2} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{-(\alpha-i\beta)/2} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2 - \alpha + \mu, 1/2 - \alpha - \mu \\ 1 - \alpha - i\beta \end{matrix}; ix + 1/2 \right]. \quad (2.6)$$

Здесь гипергеометрический ряд сходится при $|1/2 - ix| < 1/2$, т.е. явной формулы на всей прямой $\operatorname{Im} x = 0$ мы, вообще говоря, не получаем.

Отметим, что

$$S_1(\alpha, \beta; -\mu; x) = S_1(\alpha, \beta; \mu; x).$$

Базис T_1, T_2 . Выписывая пару куммеровских решений u_2, u_6 , мы получаем следующую пару решений T_1, T_2 уравнения $(D - \mu^2)f = 0$:

$$T_{1,2}(\alpha, \beta; \mu; x) := S_{1,2}(\alpha, -\beta; \mu; -x).$$

Эти решения определены в области $\{\operatorname{Re} z \geq 1/2\} \setminus [1, \infty)$.

Базисы V_-, V_+ и W_-, W_+ . Куммеровские решения u_3, u_4 определены вне лунки $|z| < 1, |z - 1| < 1$; эта лунка, в частности, содержит отрезок $-\sqrt{3}/2 < x < \sqrt{3}/2$. Мы определяем решение V_- уравнения $(D - \mu^2)f = 0$ как решение, которое при $x > \sqrt{3}/2$ задается формулой

$$V_-(\alpha, \beta; \mu; x) = e^{(-1/2 + \alpha + i\beta - \mu)\pi i/2} \left(\frac{1}{2} + ix\right)^{-(\alpha + i\beta)/2} \left(\frac{1}{2} - ix\right)^{-1/2 + (\alpha + i\beta)/2 - \mu} \\ \times {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1/2 - \alpha + \mu, 1/2 - i\beta + \mu \\ 1 + 2\mu \end{matrix}; \frac{1}{1/2 - ix}\right]. \quad (2.7)$$

Далее, мы полагаем

$$V_+(\alpha, \beta; \mu; x) = V_-(\alpha, \beta; -\mu; x).$$

Асимптотика $V_{\pm}$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$V_{\pm} \sim x^{1/2 \pm \mu}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Решения $W_{\pm}$ мы определяем из условия

$$W_{\pm} \sim x^{1/2 \pm \mu}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.9)$$

Чтобы получить формулу для W_- при $x < \sqrt{3}/2$, мы должны сменить знак в показателе экспоненциальной функции в (2.7). Далее, $W_+(\alpha, \beta; \mu; x) = W_-(\alpha, \beta; -\mu; x)$.

2.3. Матрицы перехода. Определим константы

$$C(\alpha, \beta; \mu) := \frac{\Gamma(\alpha + i\beta)\Gamma(1 + 2\mu)}{\Gamma(1/2 + \alpha + \mu)\Gamma(1/2 + i\beta + \mu)}, \quad (2.10)$$

$$\chi(\alpha, \beta; \mu) := e^{-(1/2 + \alpha + i\beta - \mu)\pi i/2}. \quad (2.11)$$

В этих обозначениях (мы используем [7, (2.9.37), (2.9.39)])

$$V_-(\alpha, \beta; \mu; x) = C(\alpha, \beta; \mu)\chi(\alpha, \beta; \mu)S_1(\alpha, \beta; \mu; x) \\ + C(-\alpha, -\beta; \mu)\chi(-\alpha, -\beta; \mu)S_2(\alpha, \beta; \mu; x), \quad (2.12)$$

$$V_+(\alpha, \beta; \mu; x) = C(\alpha, \beta; -\mu)\chi(\alpha, \beta; -\mu)S_1(\alpha, \beta; \mu; x) \\ + C(-\alpha, -\beta; -\mu)\chi(-\alpha, -\beta; -\mu)S_2(\alpha, \beta; \mu; x). \quad (2.13)$$

Формулы, выражающие W_-, W_+ через S_1, S_2 , получаются из (2.12), (2.13) заменой $\chi \mapsto \chi^{-1}$.

Нам также нужно будет выразить $W_{\pm}$ через T_1, T_2 . Аналогично, используя [7, (2.9.38), (2.9.40)], получаем

$$W_-(\alpha, \beta; \mu; x) = -C(\alpha, -\beta; \mu)\chi^{-1}(-\alpha, \beta; -\mu)T_1(\alpha, \beta; \mu; x) \\ - C(-\alpha, \beta; \mu)\chi^{-1}(\alpha, -\beta; -\mu)T_2(\alpha, \beta; \mu; x); \quad (2.14)$$

в формуле для W_+ нужно сменить знак перед μ в $C(\alpha, \beta; \mu)$ и в $\chi(\alpha, \beta; \mu)$.

2.4. Вычисление вронскианов. Обозначим через $\mathbf{wr}(P, Q) := \det \begin{pmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{pmatrix}$

вронскиан двух каких-либо решений P, Q уравнения $(D - \mu^2)f = 0$. Это выражение должно иметь вид

$$\mathbf{wr}(P, Q) = \frac{\sigma(P, Q)}{1/4 + x^2},$$

где $\sigma(P, Q)$ — постоянная, см. [10, I.17.1].

Величина $\sigma(S_1, S_2)$ легко находится из асимптотик (2.5):

$$\sigma(S_1, S_2) = i(\alpha + i\beta).$$

Ниже нам будет нужно знать $\sigma(V_-, W_-)$. Определитель Δ матрицы перехода от базиса (S_1, S_2) к базису (V_-, W_-) легко считается, и это дает

$$\sigma(V_-, W_-) = \Delta \cdot \sigma(S_1, S_2) = \frac{2\pi i C(\alpha, \beta; \mu) C(-\alpha, -\beta; \mu)}{\Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(-\alpha - i\beta)}. \quad (2.15)$$

2.5. Ядро резольвенты. Теперь мы готовы выписать ядро $K(x, y; \lambda)$ резольвенты

$$R(\lambda) := (D - \lambda)^{-1}$$

оператора D ,

$$R(\lambda)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y; \lambda) f(y) dy.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. Тогда решение V_- лежит в $L^2(0, +\infty)$, а W_- — в $L^2(0, -\infty)$, см. (2.8), (2.9). Следовательно (см. [5, XIII.3.6]),

$$K(x, y; \lambda) = \begin{cases} \frac{V_-(x)W_-(y)}{\sigma(V_-, W_-)} & \text{при } y < x, \\ \frac{V_-(y)W_-(x)}{\sigma(V_-, W_-)} & \text{при } x < y; \end{cases}$$

величина $\sigma(V_-, W_-)$ вычислена выше (2.15).

Мы хотим написать разложение дифференциального оператора R по собственным функциям. Согласно рецепту, ведущему к работе Вейля [33] (см. [31] и обстоятельное изложение у Данфорда–Шварца [5, XIII.5.18]), мы должны вычислить скачок резольвенты на вещественной оси

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda, \quad (2.16)$$

и представить его в виде

$$Lf(x) = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i(x, \lambda) \overline{\sigma_j(y, \lambda)} f(y) d\mu_{ij}(\lambda) \right) dy \quad (2.17)$$

для некоторых решений σ_1, σ_2 уравнения $Df = \lambda f$. Здесь $\mu_{ij}(\lambda)$ — меры (комплекснозначные) на $\mathbb{R}$. Тогда μ_{ij} — спектральная мера. Точнее, оператор

$$f \mapsto \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\sigma_1(x)} dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\sigma_2(x)} dx \right)$$

является унитарным оператором из $L^2(\mathbb{R})$ в пространство $\mathbb{C}^2$ -значных функций $(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda))$ со скалярным произведением

$$\langle (\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)), (\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)) \rangle = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\lambda) \overline{\psi_j(\lambda)} d\mu_{ij}(\lambda)$$

(в частности, правая часть равенства — действительно положительно определенное скалярное произведение).

2.6. Формула для резольвенты. Для вычисления скачка резольвенты при $\lambda \geq 0$ и при $\lambda \leq 0$ нам понадобятся две явные формулы для ее ядра $K(x, y; \lambda)$.

Выражая V_- через S_1, S_2 , а W_- через T_1, T_2 , получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} K(x, y; \lambda) = \frac{-1}{2\pi} \Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(-\alpha - i\beta) & \left[\frac{C(\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})}{C(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})} e^{(-1/2 + \alpha - \sqrt{\lambda})\pi i} S_1(x) T_1(y) \right. \\ & + \frac{C(-\alpha, \beta; \sqrt{\lambda})}{C(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})} e^{(-1/2 + i\beta - \sqrt{\lambda})\pi i} S_1(x) T_2(y) \\ & + \frac{C(\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})}{C(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda})} e^{(-1/2 - i\beta - \sqrt{\lambda})\pi i} S_2(x) T_1(y) \\ & \left. + \frac{C(-\alpha, \beta; \sqrt{\lambda})}{C(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda})} e^{(-1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})\pi i} S_2(x) T_2(y) \right], \quad (2.18) \end{aligned}$$

где $C(\dots)$ задано формулой (2.10).

Если мы выразим V_- , W_- через S_1, S_2 , то получим

$$\begin{aligned} K(x, y; \lambda) = \frac{\Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(-\alpha - i\beta)}{2\pi C(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda}) C(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})} \\ \times [C(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda}) \chi(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda}) S_1(x) + C(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda}) \chi(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda}) S_2(x)] \\ \times [C(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda}) \chi^{-1}(\alpha, \beta; \sqrt{\lambda}) S_1(x) + C(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda}) \chi^{-1}(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda}) S_2(x)], \quad (2.19) \end{aligned}$$

где χ задано формулой (2.11).

Эти два выражения являются мероморфными в плоскости $\lambda \in \mathbb{C}$, разрезанной по отрицательной полуоси $\lambda < 0$.

2.7. Скачок резольвенты при $\lambda > 0$. Вычисление величины

$$L^{[0, \infty)} := \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda \quad (2.20)$$

сводится к вычислению вычетов. Выражение (2.19) имеет полюсы первого порядка в точках $\lambda = (\alpha - k - 1/2)^2$ при целых k , удовлетворяющих условиям $0 \leq k \leq \alpha - 1/2$. При этом лишь коэффициент при $S_1(x)S_1(y)$ действительно имеет ненулевые вычеты, три других коэффициента голоморфны в данных точках.

В итоге интегральный оператор (2.20) оказывается равным

$$L^{[0,\infty)} f(x) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(\alpha - i\beta) \sum_{0 \leq k < \alpha - 1/2} \frac{(2\alpha - 2k - 1)(1 - \alpha - i\beta)_k}{\Gamma(2\alpha - k)(1 - \alpha + i\beta)_k k!} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\alpha, \beta; \alpha - k - 1/2; x) S_1(\alpha, \beta; \alpha - k - 1/2; y) f(y) dy.$$

Записывая функцию S_1 в форме (2.6), мы получаем ее представление через многочлен Романовского. С помощью тождества (10.8.16) из [7] для многочленов Якоби мы приводим это выражение к виду

$$\frac{1}{2\pi} \Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(\alpha - i\beta) \sum_{0 \leq k < \alpha - 1/2} \frac{2\alpha - 2k - 1}{\Gamma(2\alpha - k) k!} S_1(\alpha, \beta; \alpha - k - 1/2; x) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_1(\alpha, \beta; \alpha - k - 1/2; y)} f(y) dy$$

и это дает искомое представление.

2.8. Скачок резольвенты при $\lambda < 0$. Мы должны вычислить

$$K(x, y; \sqrt{\lambda}) - K(x, y; -\sqrt{\lambda}),$$

считая, что λ — отрицательное число, а $\text{Im } \sqrt{\lambda} > 0$.

Мы для определенности проведем вычисление коэффициента при $S_1(x)T_1(y)$.

В трех других случаях вычисление почти идентично¹⁾.

Итак (см. (2.18)), мы хотим найти

$$\frac{1}{-2\pi} \Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(-\alpha - i\beta) \\ \times \left\{ \frac{C(\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})}{C(-\alpha, -\beta; \sqrt{\lambda})} e^{-(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda})\pi i} - \frac{C(\alpha, -\beta; -\sqrt{\lambda})}{C(-\alpha, -\beta; -\sqrt{\lambda})} e^{-(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})\pi i} \right\}.$$

После непосредственных сокращений получаем

$$\frac{1}{-2\pi} \Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(\alpha - i\beta) \\ \times \left\{ \frac{\Gamma(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda})}{\Gamma(1/2 + \alpha + \sqrt{\lambda})} e^{-(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda})\pi i} + \frac{\Gamma(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})}{\Gamma(1/2 + \alpha - \sqrt{\lambda})} e^{-(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})\pi i} \right\}.$$

Мы преобразуем это к виду

$$\frac{1}{-2\pi} \Gamma(\alpha + i\beta) \Gamma(\alpha - i\beta) \Gamma(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda}) \Gamma(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda}) \\ \times \left\{ \frac{e^{-(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda})\pi i}}{\Gamma(1/2 + \alpha + \sqrt{\lambda}) \Gamma(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})} - \frac{e^{-(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})\pi i}}{\Gamma(1/2 + \alpha - \sqrt{\lambda}) \Gamma(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda})} \right\}.$$

Теперь мы будем преобразовывать лишь выражение в фигурных скобках:

$$\pi \{ \dots \} = \cos(\pi(\alpha + \sqrt{\lambda})) e^{-(1/2 - \alpha + \sqrt{\lambda})\pi i} - \cos(\pi(\alpha - \sqrt{\lambda})) e^{-(1/2 - \alpha - \sqrt{\lambda})\pi i}.$$

¹⁾ Это обеспечивается естественными симметриями $(\alpha, \beta) \sim (-\alpha, -\beta) \sim (i\beta, -i\alpha)$ в уравнении (2.1).

Далее мы применяем формулу Эйлера для $\cos$, приводим подобные члены в линейной комбинации экспонент и еще раз применяем формулу Эйлера. Получаем

$$i \sin(2\sqrt{\lambda}\pi i),$$

и это завершает вычисление коэффициента при $S_1(x)T_1(y)$.

После всего этого мы получим для скачка резольвенты $L^{(-\infty, 0]}$ на полуоси $(-\infty, 0]$ выражение вида

$$L^{(-\infty, 0)} f(x) = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} \int_{-\infty}^0 d\lambda \left\{ \theta_{ij}(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} S_i(x) T_j(y) f(y) dy \right\},$$

где θ_{ij} — явные произведения Γ -функций.

Далее мы замечаем, что при $\lambda < 0$ и при $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $T_j(y) = \overline{S_j(y)}$. Мы получаем выражение вида (2.17), и это завершает вычисление спектрального разложения дифференциального оператора (2.1).

Параметр s из разд. 1.4 есть $\sqrt{\lambda}$.

§3. Построение базисов

3.1. Один базис в $L^2(\mathbb{R})$. Фиксируем вещественные параметры p и q .

ЛЕММА 3.1. Система функций

$$r_{p,q}^{(n)}(x) := \left(\frac{1}{2} + ix \right)^{-1/2-n-(p+iq)/2} \left(\frac{1}{2} - ix \right)^{-1/2+n+(p-iq)/2}, \quad (3.1)$$

где n пробегает целые числа, образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}, dx/2\pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к новой переменной $\psi \in [0, 2\pi]$ по формуле

$$e^{i\psi} = \frac{1/2 + ix}{1/2 - ix}, \quad d\psi = \frac{dx}{1/4 + x^2}.$$

Наша система функций переходит в $e^{-in\psi} \cdot e^{-ip\psi/2} (2 \cos \psi/2)^{iq}$. Мы получили стандартную ортогональную систему $e^{-in\psi}$ с точностью до умножения на функцию, по модулю равную 1. $\square$

Отметим, что ортогональность нашей системы легко может быть проверена непосредственно (скалярные произведения легко вычисляются с помощью вычетов).

3.2. Построение базисов. Базисы (1.13) получаются применением нашего интегрального преобразования к ортогональной системе (3.1).

Объясним, как провести вычисление. Мы должны найти

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_{p,q}^{(n)}(x) \overline{Q_1(\alpha, \beta; x; s)} dx, \quad (3.2)$$

где функция Q_1 задана формулой (1.6). Для этого мы разлагаем ${}_2F_1$ из формулы (1.6) в гипергеометрический ряд по степеням $(ix + 1/2)/(ix - 1/2)$ и интегрируем его почленно с помощью бета-интеграла Коши

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1/2 + ix)^\sigma (1/2 - ix)^\tau} = \frac{2\pi\Gamma(\sigma + \tau - 1)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau)} \quad (3.3)$$

(см. [25, т. 1, (2.2.6.31)] или [1, ch. 1, ex. 13]). В итоге для (3.2) получается выражение

$$\frac{2\pi\Gamma(1/2 + iq - is)}{\Gamma(\alpha - i\beta)\Gamma((p + iq - \alpha + i\beta)/2 + n + 1 - is)\Gamma((-p + iq + \alpha - i\beta + 1)/2 - n)} \\ \times {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1/2 - \alpha - is, 1/2 + i\beta - is, 1/2 + (p - iq - \alpha + i\beta)/2 + n \\ 1 - \alpha + i\beta, (p + iq - \alpha + i\beta)/2 + n + 1 - is \end{matrix}; 1\right]. \quad (3.4)$$

Эта формула является вариантом окончательного ответа; более симметричная форма (1.13) получается с помощью преобразования Томе, см. [1, corollary 3.3.6] и [25, т. 3, (7.4.4.2)]:

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(r)}{\Gamma(a)\Gamma(b+r)\Gamma(c+r)} {}_3F_2\left[\begin{matrix} d-a, e-a, r \\ b+r, c+r \end{matrix}; 1\right],$$

где $r = d + e - a - b - c$.

§4. Приложение к тензорным произведениям унитарных представлений $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

4.1. Модели представлений. Мы реализуем группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ как группу комплексных 2×2 -матриц вида $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, таких, что $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Эта группа действует на окружности S^1 : $|z| = 1$ мёбиусовскими преобразованиями $z \mapsto (az + b)/(\bar{b}z + \bar{a})$.

Для фиксированных $\theta, \tau \in \mathbb{C}$ определим представление $T_{\theta, \tau}$ группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ в пространстве $C^\infty(S^1)$ по формуле

$$T_{\theta, \tau}(g)f(z) = f((az + b)/(\bar{b}z + \bar{a}))(\bar{b}z + \bar{a})^{-\theta}(bz^{-1} + a)^{-\tau}. \quad (4.1)$$

Объясним, как понимать степени комплексных чисел в этой формуле, если $\theta, \tau \notin \mathbb{Z}$. У нас $|a| > |b|$; поэтому $(\bar{b}z + \bar{a})$ не обращается в нуль внутри круга $|z| \leq 1$. Следовательно, функция $\ln(\bar{b}z + \bar{a})$ имеет счетное число гладких ветвей в круге и, в частности, на окружности S^1 . Эти ветви отличаются друг от друга на аддитивную константу вида $2\pi ki$, где $k \in \mathbb{Z}$. Далее, при $|z| = 1$ вполне-но равенство $bz^{-1} + a = \overline{(\bar{b}z + \bar{a})}$. Поэтому, фиксируя ветвь логарифма, мы однозначно определяем выражение (4.1).

Следовательно, при фиксированной матрице g формула (4.1) задает счетное (иногда конечное) число непрерывных операторов в $C^\infty(S^1)$, отличающихся постоянными множителями. В итоге мы получаем проективное представление группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (или линейное представление ее универсальной накрывающей группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$).

Генераторы алгебры Ли sl_2 действуют дифференциальными операторами

$$L_0 = 2z \frac{d}{dz} + \theta - \tau, \quad L_1 = z^2 \frac{d}{dz} + \theta z, \quad L_{-1} = \frac{d}{dz} - \tau z^{-1}. \quad (4.2)$$

Если $\mathrm{Re}(\theta + \tau) = 1$, $\mathrm{Im} \theta = \mathrm{Im} \tau$, то представления $T_{\theta, \tau}$ унитарны в $L^2(S^1)$; такие представления называются *представлениями основной серии*. Отметим, что представления $T_{\theta+n, \tau-n}$ и $T_{\theta, \tau}$ эквивалентны (сплетающий их оператор — это умножение на z^n).

4.2. Тензорные произведения и оператор Лапласа на торе. Рассмотрим тензорное произведение представлений $T_{\theta, \tau}$ и $T_{\tilde{\theta}, \tilde{\tau}}$. Мы реализуем его естественным образом в функциях на торе $|z| = |u| = 1$. Рассмотрим оператор Лапласа

$$\Delta := \frac{1}{4}(L_0(z) + L_0(u))^2 + \frac{1}{2}(L_0(z) + L_0(u)) - (L_{-1}(z) + L_{-1}(u))(L_1(z) + L_1(u)).$$

Здесь $L_j(z)$ — это операторы (4.2), а $L_j(u)$ — такие же операторы, только z заменено на u , а θ, τ — на $\tilde{\theta}, \tilde{\tau}$. Оператор Δ коммутирует со всеми операторами $L_j(z) + L_j(u)$.

Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \Delta = & -(z - u)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial u} + \frac{1}{u}(\tilde{\theta}u + \tilde{\tau}z)(z - u) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z}(\theta z + \tau u)(u - z) \frac{\partial}{\partial u} \\ & + \frac{1}{zu}(\tilde{\theta}u + \tilde{\tau}z)(\theta z + \tau u) + \frac{1}{4}(\theta - \tilde{\theta} + \tau - \tilde{\tau})^2 + \frac{1}{4}(\theta + \tau + \tilde{\theta} + \tilde{\tau}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вычисление меры Планшереля для тензорного произведения сводится к спектральному разложению оператора Δ (см., например, [26, 19]).

4.3. Сведение к одномерному оператору. Рассмотрим функции на торе вида $f(z, u) = g(z/u)$. Такие функции являются собственными относительно оператора $L_0(z) + L_0(u)$,

$$(L_0(z) + L_0(u))g(z/u) = (\theta + \tilde{\theta} - \tau - \tilde{\tau})g(z/u). \quad (4.4)$$

На функциях $g(w)$ мы получаем оператор

$$\begin{aligned} w(1 - w)^2 \frac{d^2}{dw^2} + (w - 1)(\tau + \tilde{\theta} - 1 + (w - 1)(\tilde{\tau} + \theta)) \frac{d}{dw} \\ + \tilde{\tau}\theta(w - 1) + \tau\tilde{\theta}\left(\frac{1}{w} - 1\right) + \frac{1}{4}(\tau + \theta + \tilde{\tau} + \tilde{\theta})^2 - \frac{1}{2}(\tau + \theta + \tilde{\tau} + \tilde{\theta}). \end{aligned}$$

Переменная w пробегает контур $|w| = 1$. Далее мы переходим к функции

$$h(t) := \left(\frac{1}{2} + it\right)^{(\tau + \tilde{\theta})/2} \left(\frac{1}{2} - it\right)^{(\tilde{\tau} + \theta)/2} g\left(\frac{it + 1/2}{it - 1/2}\right)$$

и получаем оператор

$$D := \left(\frac{1}{4} + t^2\right) \frac{d^2}{dt^2} + 2t \frac{d}{dt} + \frac{1}{4} \left(\frac{(\theta - \tilde{\tau})^2}{1/2 - it} + \frac{(\tilde{\theta} - \tau)^2}{1/2 + it} \right)$$

на прямой $\mathbb{R}$. Наш оператор имеет вид (2.1) с, вообще говоря, комплексными α и β . Если наши начальные представления $T_{\theta, \tau}, T_{\tilde{\theta}, \tilde{\tau}}$ лежали в основной серии, то мы получаем оператор вида (2.1) с вещественными α, β .

Итак, мы разобрали оператор Лапласа, ограниченный на собственное подпространство (4.4) оператора $L_0(z) + L_0(u)$. Но преобразование $\theta \mapsto \theta - n, \tau \mapsto \tau + n$ фактически не меняет задачу, так как соответствующие представления $T_{\theta+n, \tau-n}$ и $T_{\theta, \tau}$ эквивалентны; таким образом, мы знаем спектральное разложение оператора Лапласа на любом собственном подпространстве оператора $L_0(z) + L_0(u)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что любой оператор вида (2.1) с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ возникает только что описанным естественным способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special functions. Cambridge Univ. Press, 1999; готовится русский перевод.
2. *Askey R.* An integral of Ramanujan and orthogonal polynomials. J. Indian Math. Soc. (N.S.), **51**, 27–36 (1987).
3. *Borodin A., Olshanski G.* Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes. Preprint, <http://arXiv.org/abs/math.RT/0109194>.
4. *Borodin A., Olshanski G.* Random partitions and the Gamma kernel. Preprint, <http://arXiv.org/abs/math-ph/0305043>.
5. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. Vol. 2. Wiley & Sons, 1963. [Имеется перевод: Данфорд М., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 2. Мир, М., 1966.]
6. *Grunbaum F. A., Pacharoni I., Tirao J.* Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane. J. Funct. Anal., **188**, No. 2, 350–441 (2002).
7. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.* Higher transcendental functions. Vol. 1, 2, McGraw–Hill, 1953. [Имеется перевод: Эрдеи А., Магнус В., Оберхеттингер Ф., Трикоми Ф. Высшие трансцендентные функции. Наука, М., 1966.]
8. *Flensted-Jensen M., Koornwinder T.* The convolution structure for Jacobi function expansions. Ark. Math., **11**, 245–262 (1973).
9. *Groenevelt W.* The Wilson function transform. Preprint, <http://xxx.lanl.gov/abs/math.CA/0306424>.
10. *Kamke E.* Differentialgleichungen. I. Geöhnliche Differentialgleichungen. 6 ed., Leipzig, 1959. [Имеется перевод: Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, М., 1971.]
11. *Koekoek R., Swarttouw R. F.* The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue. Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Report no. 94-05, 1994, <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html>.
12. *Koornwinder T. H.* A new proof of a Paley–Wiener theorem for Jacobi transform. Ark. Math., **13**, 145–159 (1975).
13. *Koornwinder T. H.* Jacobi functions and analysis on noncompact symmetric spaces. In: Special functions: group theoretical aspects and applications (Askey R., Koornwinder T., eds.). Reidel, Dordrecht–Boston, 1984, pp. 1–85.
14. *Lesky P. A.* Endliche und unendliche Systeme von kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynomen. Z. Angew. Math. Mech., **76**, No. 3, 181–184 (1996).
15. *Lesky P. A.* Unendliche und endliche Orthogonalsysteme von continuous Hahnpolynomen. Results Math., **31**, No. 1–2, 127–135 (1997).
16. *Lesky P. A., Waibel B.-M.* Orthogonalität von Racahpolynomen und Wilsonpolynomen. Results Math., **35**, No. 1–2, 119–133 (1999).
17. *Молчанов В. Ф.* Тензорные произведения унитарных представлений трехмерной группы Лоренца. Изв. АН СССР, сер. мат., **43**, 860–891 (1979).
18. *Молчанов В. Ф.* Формула Планшереля для псевдоримановых симметрических пространств ранга 1. ДАН СССР, **290**, №3, 545–549 (1986).
19. *Молчанов В. Ф.* Гармонический анализ на однородных пространствах. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 59. Некоммутативный гармонический анализ-II. ВИНТИ, М., 1990, с. 5–144.
20. *Неретин Ю. А.* Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах. Матем. сб., **192**, №3, 83–114 (2001); Препринтный вариант: <http://arXiv.org/abs/math/0104035>.

21. *Неретин Ю. А.* Бета-интегралы и конечные ортогональные системы многочленов Вильсона. Матем. сб., **193**, No. 7, 131–148 (2002).
22. *Neretin Yu. A.* Perturbations of some classical hypergeometric orthogonal systems. Preprint, <http://arXiv.org/abs/math/a0309445>.
23. *Олевский М. Н.* О представлении произвольной функции в виде интеграла с ядром, являющимся гипергеометрической функцией. ДАН СССР, **69**, №1, 11–14 (1949).
24. *Peetre J.* Correspondence principle for the quantized annulus, Romanovski polynomials, and Morse potential. J. Funct. Anal., **117**, No. 2, 377–400 (1993).
25. *Прудников А. М., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1–3. Наука, М., 1981, 1983, 1986.
26. *Pukanszky L.* On the Kronecker products of irreducible unitary representations of the 2×2 real unimodular group. Trans. Amer. Math. Soc., **100**, 116–152 (1961).
27. *Romanovski V. I.* Sur quelques classes nouvelles de polynomes orthogonaux. C. R. Acad. Sci. Paris, **188**, 1023–1025 (1929).
28. *Rosengren H.* Multilinear Hankel forms of higher order and orthogonal polynomials. Math. Scand., **82**, No. 1, 53–88 (1998).
29. *Rosengren H.* Multivariable orthogonal polynomials and coupling coefficients for discrete series representations. SIAM J. Math. Anal., **30**, 233–272 (1999).
30. *Tirao J. A.* The matrix-valued hypergeometric equation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **100**, No. 14, 8138–8141 (2003).
31. *Titchmarsh E. C.* Eigenfunction expansions with second-order differential operators. V. 1, Clarendon Press, Oxford, 1946. [Имеется перевод: Титчмарш Э. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. ИЛ, М., 1960.]
32. *Vilenkin N. Ya., Klimyk A. U.* Representations of Lie groups and special functions. Vol. 1–2. Kluwer, 1991.
33. *Weyl H.* Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen (2 Note). Nachr. Konig. Gess. Wissen. Göttingen. Math.-Phys., 1910, pp. 442–467; Reprinted in Weyl H. Gessamelte Abhandlungen, Bd. 1, Springer-Verlag, 1968, pp. 222–247.
34. *Zhang Gen Kai* Tensor products of weighted Bergman spaces and invariant Ha-plitz operators. Math. Scand., **71**, No. 1, 85–95 (1992).

ИТЭФ, группа матфизики
University of Vienna
email: neretin@mccme.ru

Поступило в редакцию
10 сентября 2003 г.