Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об одном методе осреднения для
квантовой задачи многих тел, *Функц. анализ и его
прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 50–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 09:14:40

УДК 517.9

Об одном методе осреднения для квантовой задачи многих тел

© 1999. В. П. Маслов

Мы рассмотрим уравнение Шрёдингера для N тождественных частиц

$$\begin{aligned}\hat{H}_N \psi_N &\equiv \sum_{j=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_j} + U(x_j) \right) \psi_N(x_1, \sigma_1; \dots; x_N, \sigma_N) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N V(x_j, x_k) \psi_N(x_1, \sigma_1; \dots; x_N, \sigma_N) \\ &= \gamma \psi_N(x_1, \sigma_1; \dots; x_N, \sigma_N),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\psi_N(x_1, \sigma_1; \dots; x_N, \sigma_N)$ — антисимметрическая (в случае фермионов) или симметрическая (в случае бозонов) функция относительно перестановок переменных (x_j, σ_j) и (x_k, σ_k) при $j, k = 1, \dots, N$ и где $x_j \in \mathbb{R}^3$, а σ_j — спиновая переменная, пробегающая конечное множество значений.

Мы будем изучать асимптотику при $N \rightarrow \infty$ собственных функций и собственных значений некоторых осредненных операторов. Мы также введем некоторый постулат о температурном распределении, который во всех известных случаях приводит к тем же результатам, что и знаменитый постулат Гиббса, т.е. по существу эквивалентен ему. Концепция, предложенная в настоящей работе, не только дает математическую аксиоматику сверхпроводимости и сверхтекучести при сильном взаимодействии, но позволяет распространить метод канонического оператора на эти проблемы и, следовательно, получить ряд принципиально новых результатов. В простейшем случае приведенные формулы совпадают с формулами Боголюбова, полученными с помощью так называемых u - v -преобразований для фермионов [1]. Однако они получены совершенно другим методом, не основанным ни на каком вариационном принципе.

Пусть $k, M \geq 0$ — целые числа. Рассмотрим гильбертово пространство функций вида

$$\Psi(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k),$$

где $x_l, y_l, z_m \in \mathbb{R}^3$, $j_m = 1, \dots, \infty$ для всех $m = 1, \dots, k$, $l = 1, \dots, M$ и $\alpha_l, \beta_l, \gamma_m \in I$ (I — множество значений спиновой переменной), которые удовлетворяют следующим условиям: (а) они симметричны относительно перестановок любых пар переменных $(x_l, \alpha_l, y_l, \beta_l)$ и $(x_{l'}, \alpha_{l'}, y_{l'}, \beta_{l'})$, (b) они симметричны относи-

тельно перестановок любых пар переменных (z_m, γ_m, j_m) и $(z_{m'}, \gamma_{m'}, j_{m'})$. Скалярное произведение имеет вид

$$\begin{aligned} (\Psi, \Phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_M \in I} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_M \in I} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k \in I} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \dots dx_M dy_M dz_1 \dots dz_k \\ &\times \Psi^*(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \\ &\times \Phi(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k). \end{aligned}$$

Будем обозначать это пространство $\mathcal{F}_{M,k}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим множество элементов $\Psi_{M,k} \in \mathcal{F}_{M,k}$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{M,k}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \\ = f_{M,k}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1, \dots, x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M, z_1, \gamma_1, \dots, z_k, \gamma_k) \varepsilon_{j_1, \dots, j_k}^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f_{M,k}(\xi_1, \sigma_1, \xi_2, \sigma_2, \dots, \xi_{k+2M}, \sigma_{k+2M})$ — антисимметрические относительно перестановок любых пар (ξ_l, σ_l) и (ξ_m, σ_m) функции и $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}^k$ — антисимметрическая относительно перестановок переменных j_α и j_β функция, определяемая условиями

$$\varepsilon_{1, \dots, k}^k = 1, \quad \varepsilon_{k+s, j_2, \dots, j_k}^k = 0, \quad s > 0.$$

Элементы $\Psi_{M,k}$ вида (2) при фиксированном значении функции $\varepsilon_{j_1, \dots, j_k}^k$ образуют подпространство $\mathcal{F}_{M,k}^F$ пространства $\mathcal{F}_{M,k}$, называемое *фермионным подпространством*. Проектор на это подпространство будет обозначаться через $\hat{P}_{M,k}^F$:

$$\hat{P}_{M,k}^F: \mathcal{F}_{M,k} \rightarrow \mathcal{F}_{M,k}^F.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим *бозонное подпространство* $\mathcal{F}_{M,k}^B$. Пространство $\mathcal{F}_{M,k}^B$ является подпространством пространства $\mathcal{F}_{M,k}$ и состоит из тех его элементов, которые симметричны относительно перестановок любых (x_l, α_l) и (z_m, σ_m) и относительно перестановок любых j_m и $j_{m'}$. Проектор на это подпространство будет обозначаться через $\hat{P}_{M,k}^B$:

$$\hat{P}_{M,k}^B: \mathcal{F}_{M,k} \rightarrow \mathcal{F}_{M,k}^B.$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathcal{F}$, элементами которого являются бесконечные наборы $\Psi = \{\Psi_{M,k}\}_{M,k}$, $\Psi_{M,k} \in \mathcal{F}_{M,k}$, причем

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{M,k} \|\Psi_{M,k}\|^2 < \infty.$$

Это пространство является бесконечной прямой суммой пространств $\mathcal{F}_{M,k}$, $\mathcal{F} = \bigoplus_{M,k} \mathcal{F}_{M,k}$, и называется *пространством Фока* [2]. Отметим, что пространство $\mathcal{F}$ отличается от обычных пространств Фока, используемых при

описании многочастичных систем. Обозначим оператор проектирования на соответствующее слагаемое прямой суммы через $\hat{P}_{M,k}$:

$$\hat{P}_{M,k}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{M,k}, \quad \hat{P}_{M,k}\Psi = \Psi_{M,k},$$

а оператор вложения пространства $\mathcal{F}_{M,k}$ в $\mathcal{F}$ через $\hat{i}_{M,k}$:

$$\hat{i}_{M,k}: \mathcal{F}_{M,k} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \hat{i}_{M,k}\varphi = \{\delta_{Mm}\delta_{ks}\varphi\}_{m,s}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Введем понятие осредненного оператора в фермионном случае. Пусть задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}_N$ в пространстве функций

$$\psi_N(x_1, \sigma_1; \dots; x_N, \sigma_N) \in L^2,$$

антисимметрических относительно перестановок переменных (x_i, σ_i) и (x_j, σ_j) , $x_i, x_j \in \mathbb{R}^3$, $\sigma_i, \sigma_j \in I$. Им отвечают следующие операторы на подпространствах $\mathcal{F}_{m,s}^F$ функций вида (2):

$$\widetilde{\hat{A}}_{2m+s}\Psi_{m,s} = (\hat{A}_{2m+s}f_{m,s})\varepsilon_{j_1, \dots, j_s}^s.$$

Пусть $k \geq 0$ — заданное целое число. *Осредненным оператором* $\overline{\hat{A}}$ будем называть оператор в пространстве Фока $\mathcal{F}$, заданный формулой

$$\overline{\hat{A}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \widetilde{\hat{A}}_{2m+k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3а. Введем понятие осредненного оператора в бозонном случае. Пусть задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}_N$ в пространстве функций

$$\psi_N(x_1, \sigma_1; \dots; x_N, \sigma_N) \in L^2,$$

симметрических относительно перестановок переменных (x_i, σ_i) и (x_j, σ_j) , $x_i, x_j \in \mathbb{R}^3$, $\sigma_i, \sigma_j \in I$. Им отвечают операторы $\widetilde{\hat{A}}_{2m+s}$ на подпространствах $\mathcal{F}_{m,s}^B$, действующие как единичные по дискретным переменным j_l . *Осредненным оператором* $\overline{\hat{A}}$ будем называть оператор в пространстве Фока $\mathcal{F}$, заданный формулой

$$\overline{\hat{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \widetilde{\hat{A}}_{2m+k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k}.$$

ПРИМЕР 1. Пусть $\hat{A}_N = (N-k)/2$. Соответствующий осредненный оператор в фермионном случае имеет вид

$$\overline{\hat{M}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\hat{A}_N = \hat{\mathbf{E}}$, где $\hat{\mathbf{E}}$ — тождественный оператор. Осредненный оператор в фермионном случае имеет вид

$$\overline{\hat{\mathbf{E}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k},$$

а в бозонном

$$\widehat{\mathbf{E}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k}.$$

Пусть задан некоторый элемент $\Psi \in \mathcal{F}$. Положим

$$\overline{M} = \frac{(\Psi, \widehat{M}\Psi)}{(\Psi, \widehat{\mathbf{E}}\Psi)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m(\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k} \Psi)}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} (\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^F \hat{P}_{m,k} \Psi)}$$

в фермионном случае и

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} m(\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k} \Psi)}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} (\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k} \Psi)}, \\ \overline{k} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} k(\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k} \Psi)}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{4^m m!} (\Psi, \hat{i}_{m,k} \hat{P}_{m,k}^B \hat{P}_{m,k} \Psi)}, \end{aligned}$$

в бозонном.

В качестве операторов $\hat{A}_N$ мы рассмотрим теперь операторы Шрёдингера (1). Для того чтобы сформулировать теорему для фермионов, т. е. в случае, когда рассматриваются лишь антисимметрические решения уравнения (1), введем *бозонные* операторы рождения и уничтожения. Для определенности спин фермионов будет считаться равным $1/2$, т. е. спиновая переменная σ принимает значения в $\{1, 2\}$. Как известно,

$$\begin{aligned} &(\hat{B}^+(x, \alpha, y, \beta)\Psi)_{M,k}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{l=1}^M \delta(x - x_l) \delta(y - y_l) \delta_{\alpha\alpha_l} \delta_{\beta\beta_l} \Psi_{M-1,k}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; \hat{x}_l, \hat{\alpha}_l, \hat{y}_l, \hat{\beta}_l; \\ &\quad \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \quad \text{при } M > 0, \\ &(\hat{B}^-(x, \alpha, y, \beta)\Psi)_{M,k}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \\ &= \sqrt{M+1} \Psi_{M+1,k}(x, \alpha, y, \beta; x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \\ &\quad \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &(\hat{b}^+(z, \gamma, j)\Psi)_{M,k}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=1}^M \delta(z - z_l) \delta_{\gamma\gamma_l} \delta_{j j_l} \Psi_{M,k-1}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; \\ &\quad z_1, \gamma_1, j_1; \dots; \hat{z}_l, \hat{\gamma}_l, \hat{j}_l; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \quad \text{при } k > 0, \\ &(\hat{b}^-(z, \gamma, j)\Psi)_{M,k}(x_1, \alpha_1, \beta_1, y_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k) \\ &= \sqrt{k+1} \Psi_{M,k+1}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M; \\ &\quad z, \gamma, j; z_1, \gamma_1, j_1; \dots; z_k, \gamma_k, j_k); \end{aligned}$$

в этих формулах $\delta(x)$ — функция Дирака, δ_{jk} — символ Кронекера, а крышка над аргументом означает, что он пропущен.

Будем называть оператор, соответствующий набору $\{\hat{H}_N - \gamma\}_N$, *осредненным оператором Гамильтона* и обозначать его через $\hat{\mathcal{H}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Осредненный оператор $\hat{\mathcal{H}}$ может быть записан в виде*

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\hat{B}^+(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2), \hat{b}^+(y, \gamma, j), \hat{b}^-(y', \gamma', j') \hat{B}^-(x'_1, \sigma'_1; x'_2, \sigma'_2)),$$

где функция $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(\Phi^*(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2), \varphi^*(y, \gamma, j), \varphi(y', \gamma', j'), \Phi(x'_1, \sigma'_1; x'_2, \sigma'_2)) \\ &= \left\{ \sum_{\sigma=1}^2 \int dx \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x - \gamma + U(x) \right) G(x, \sigma; x, \sigma) \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 \iint dx dx' V(x, x') (G(x, \sigma; x, \sigma) G(x', \sigma'; x', \sigma') \\ & \quad - G(x, \sigma; x', \sigma') G(x', \sigma'; x, \sigma) + R^*(x', \sigma'; x, \sigma) R(x', \sigma'; x, \sigma)) \left. \right\} \\ & \times \sum_{M=0}^{\infty} \left[\frac{(2M+k)!}{4^M (M!)^2 k!} \sum_{\alpha_1=1}^2 \cdots \sum_{\alpha_{2M}=1}^2 \sum_{\beta_1=1}^2 \cdots \sum_{\beta_k=1}^2 \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=1}^{\infty} \right. \\ & \quad \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_{2M} dy_1 \cdots dy_k \Phi^*(x_1, \alpha_1; x_2, \alpha_2) \\ & \quad \cdots \Phi^*(x_{2M-1}, \alpha_{2M-1}; x_{2M}, \alpha_{2M}) \varphi^*(y_1, \beta_1, j_1) \cdots \varphi^*(y_k, \beta_k, j_k) \\ & \quad \times \underset{\substack{(x_1, \alpha_1), \dots, (x_{2M}, \alpha_{2M}), \\ (y_1, \beta_1), \dots, (y_k, \beta_k)}}{\text{Asymm}} \underset{j_1, \dots, j_k}{\text{Asymm}} \varphi(y_k, \beta_k, j_k) \cdots \varphi(y_1, \beta_1, j_1) \\ & \quad \times \exp \left(- \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 \iint dz dz' \Phi^*(z, \sigma; z', \sigma') \Phi(z, \sigma; z', \sigma') \right) \\ & \quad \left. \times \exp \left(- \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{l=1}^{\infty} \int dw \varphi^*(w, \gamma, l) \varphi(w, \gamma, l) \right) \right]; \end{aligned}$$

здесь функции $G(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$ и $R(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$ следующим образом выражаются через функции $\Phi^*, \Phi, \varphi^*, \varphi$:

$$\begin{aligned} G(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) &= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}^*(x_1, \sigma_1, j) \tilde{\varphi}(x_2, \sigma_2, j) \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \iint dz dw \tilde{\Phi}^*(z, \alpha; x_1, \sigma_1) \tilde{\Phi}(z, \alpha; w, \beta) M(w, \beta; x_2, \sigma_2), \\ R(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) &= - \sum_{\alpha=1}^2 \int dz \tilde{\Phi}(x_1, \sigma_1; z, \alpha) M(z, \alpha; x_2, \sigma_2), \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi}(x, \sigma, j) = \sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_{jl} \varphi(x, \sigma, l)$, причем Λ_{jl} — такие числа, что

$$\sum_{\sigma=1}^2 \int dx \tilde{\varphi}^*(x, \sigma, j) \tilde{\varphi}(x, \sigma, l) = \delta_{jl},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) = & \text{Asymm}_{(x_1, \sigma_1), (x_2, \sigma_2)} \left(\Phi(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \int dy \Phi(x_1, \sigma_1; y, \sigma) \tilde{\varphi}^*(y, \sigma, j) \tilde{\varphi}(x_2, \sigma_2, j) \right) \end{aligned}$$

и $M(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$ определяется как решение уравнения

$$\begin{aligned} M(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \iint dz dw M(x_1, \sigma_1; z, \alpha) \tilde{\Phi}^*(w, \beta; z, \alpha) \tilde{\Phi}(w, \beta; x_2, \sigma_2) \\ = \delta(x_1 - x_2) \delta_{\sigma_1 \sigma_2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Оператор $\tilde{\hat{H}}_{2M+k}$ в $\mathcal{F}_{M,k}$, действующий по дискретным переменным j_l как единичный, а по непрерывным переменным — как $\hat{H}_{2M+k}$, можно представить в виде

$$\tilde{\hat{H}}_{2M+k} = \hat{P}_{M,k} \hat{H}_B \hat{i}_{M,k},$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_B = & \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 \iint dx dx' \hat{B}^+(x, \sigma; x', \sigma') \\ & \times \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x'} + U(x) + U(x') + V(x, x') \right) \hat{B}^-(x, \sigma; x', \sigma') \\ & + \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, \sigma, j) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x + U(x) \right) \hat{b}^-(x, \sigma, j) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1=1}^2 \sum_{\sigma'_1=1}^2 \sum_{\sigma_2=1}^2 \sum_{\sigma'_2=1}^2 \iiint dx_1 dx'_1 dx_2 dx'_2 \\ & \times (V(x_1, x_2) + V(x_1, x'_2) + V(x'_1, x_2) + V(x'_1, x'_2)) \\ & \times \hat{B}^+(x_1, \sigma_1; x'_1, \sigma'_1) \hat{B}^+(x_2, \sigma_2; x'_2, \sigma'_2) \hat{B}^-(x_2, \sigma_2; x'_2, \sigma'_2) \hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x'_1, \sigma'_1) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j'=1}^{\infty} \iint dx dx' V(x, x') \\ & \times \hat{b}^+(x, \sigma, j) \hat{b}^+(x', \sigma', j') \hat{b}^-(x', \sigma', j') \hat{b}^-(x, \sigma, j) \\ & + \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \iiint dx dx' dy (V(x, y) + V(x', y)) \\ & \times \hat{B}^+(x, \sigma; x', \sigma') \hat{b}^+(y, \alpha, j) \hat{b}^-(y, \alpha, j) \hat{B}^-(x, \sigma; x', \sigma'). \end{aligned} \tag{3}$$

ЛЕММА 2. *Проектор $\hat{\Pi}_{M,k}^F = \hat{i}_{M,k} \hat{P}_{M,k}^F \hat{P}_{M,k}$ может быть представлен в виде*

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}_{M,k}^F &= \frac{1}{M!k!} \sum_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_M, \beta_M} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \int dx_1 dy_1 \cdots dx_M dy_M dz_1 \cdots dz_k \\
 &\times \hat{B}^+(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1) \cdots \hat{B}^+(x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M) \hat{b}^+(z_1, \gamma_1, i_1) \cdots \hat{b}^+(z_k, \gamma_k, i_k) \\
 &\times \text{Asymm}_{x_1, y_1, \dots, x_M, y_M, z_1, \dots, z_k} \text{Asymm}_{i_1, \dots, i_k} \left\{ \hat{B}^-(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1) \cdots \hat{B}^-(x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M) \right. \\
 &\quad \left. \times \hat{b}^-(z_1, \gamma_1, i_1) \cdots \hat{b}^-(z_k, \gamma_k, i_k) \right\} \\
 &\times \exp \left(- \sum_{\mu, \nu} \int d\xi d\eta \hat{B}^+(\xi, \mu, \eta, \nu) \hat{B}^-(\xi, \mu, \eta, \nu) \right) \\
 &\times \exp \left(- \sum_{\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} \int d\zeta \hat{b}^+(\zeta, \sigma, j) \hat{b}^-(\zeta, \sigma, j) \right), \tag{4}
 \end{aligned}$$

где числа над операторами обозначают порядок их действия [2].

ЛЕММА 3. Для любого $s \geq 1$ имеет место равенство

$$\hat{H}_B \hat{\Pi}_{s,0}^F = \hat{\mathcal{H}}_s \hat{\Pi}_{s,0}^F, \tag{5}$$

где $\hat{H}_B$ имеет вид (3), $\hat{\Pi}_{s,0}^F$ — оператор проектирования (4) и

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{H}}_s &= \frac{1}{s!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2s}=1}^2 \int dx_1 \cdots dx_{2s} \hat{B}^+(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \cdots \hat{B}^+(x_{2s-1}, \sigma_{2s-1}; x_{2s}, \sigma_{2s}) \\
 &\times \left\{ \sum_{i=1}^{2s} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_i} + U(x_i) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq 2s} V(x_i, x_j) \right\} \\
 &\times \text{Asymm}_{(x_1, \sigma_1), \dots, (x_{2s}, \sigma_{2s})} \hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \cdots \hat{B}^-(x_{2s-1}, \sigma_{2s-1}; x_{2s}, \sigma_{2s}). \tag{6}
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение, стоящее в формуле (6) в фигурных скобках, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 &\sum_{l=1}^s \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_{2l-1}} + U(x_{2l-1}) - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_{2l}} + U(x_{2l}) + V(x_{2l-1}, x_{2l}) \right) \\
 &+ \sum_{1 \leq l < m \leq s} (V(x_{2l-1}, x_{2m-1}) + V(x_{2l-1}, x_{2m}) + V(x_{2l}, x_{2m-1}) + V(x_{2l}, x_{2m})).
 \end{aligned}$$

Из определения операторов рождения–уничтожения следует, что

$$\begin{aligned}
 & (\hat{\mathcal{H}}_s \hat{\Pi}_{M,0}^F \Phi)_{M,0}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M) \\
 &= \frac{1}{s!} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_s \leq M} \left\{ \sum_{l=1}^s \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_{i_l}} + U(x_{i_l}) - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{y_{i_l}} + U(y_{i_l}) + V(x_{i_l}, y_{i_l}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{1 \leq l < m \leq s} (V(x_l, y_l) + V(x_l, y_m) + V(x_m, y_l) + V(x_m, y_m)) \right\} \\
 &\times \text{Asymm}_{(x_{i_1}, \alpha_1), (y_{i_1}, \beta_1), \dots, (x_{i_s}, \alpha_{i_s}), (y_{i_s}, \beta_{i_s})} (\hat{\Pi}_{M,0}^F \Phi)_{M,0}(x_1, \alpha_1, y_1, \beta_1; \dots; x_M, \alpha_M, y_M, \beta_M). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Поскольку функция $(\hat{\Pi}_{M,0}^F \Phi)_{M,0} = \hat{P}_{M,0}^F \hat{P}_{M,0} \Phi$ уже антисимметрична относительно перестановок всех аргументов (x_i, α_i) и (y_j, β_j) , антисимметризатор в (7) можно опустить. Следовательно, при $M = s$ действие оператора $\hat{P}_{M,0} \hat{\mathcal{H}}_s \hat{\Pi}_{M,0}$ совпадает с действием $2s$ -частичного гамильтониана

$$\hat{H}_{2s} = \sum_{i=1}^{2s} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\xi_i} + U(\xi_i) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq 2s} V(\xi_i, \xi_j), \quad \xi_{2l-1} \equiv x_l, \quad \xi_{2l} \equiv y_l.$$

Отсюда следует равенство (5). □

ЛЕММА 4. Уравнения движения Гейзенберга для операторов $\hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$, отвечающие гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}_s$, заданному формулой (6),

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) = [\hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2), \hat{\mathcal{H}}_s], \quad (8)$$

могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 & i \frac{\partial}{\partial t} \hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\
 &= \frac{1}{s!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2s}=1}^2 \int dx_1 \cdots dx_{2s} \hat{B}^+(x_3, \sigma_3, x_4, \sigma_4) \cdots \hat{B}^+(x_{2s-1}, \sigma_{2s-1}, x_{2s}, \sigma_{2s}) \\
 &\times \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}) + U(x_1) + U(x_2) + V(x_1, x_2) \right. \\
 &\quad + (s-1) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_{x_3} + \Delta_{x_4}) + U(x_3) + U(x_4) \right. \\
 &\quad \left. \left. + V(x_1, x_3) + V(x_1, x_4) + V(x_2, x_3) + V(x_2, x_4) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(s-1)(s-2)}{2} (V(x_3, x_5) + V(x_3, x_6) + V(x_4, x_5) + V(x_4, x_6)) \right] \\
 &\times \text{Asymm}_{(x_1, \sigma_1), \dots, (x_{2s}, \sigma_{2s})} \hat{B}^-(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \cdots \hat{B}^-(x_{2s-1}, \sigma_{2s-1}; x_{2s}, \sigma_{2s}). \quad (9)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (6) в (8) и, учитывая формулу коммутации операторов рождения и уничтожения, получим (9).

Теорема 1 следует из приведенных лемм.

После проведенной выше процедуры осреднения остается только один большой параметр — среднее число частиц. Снятие крышек над операторами с точки зрения нестандартных характеристик означает получение аналога классического гамильтониана лишь при условии, что $\bar{N} \rightarrow \infty$. Более того, как следует из существенно более сложной теории туннельных эффектов, для фермионов оценки равномерны по увеличению связи и, значит, допустима очень сильная связь.

Итак, мы рассмотрим функцию $\mathcal{H}$ как «классический» гамильтониан. Характеристики определяются решениями следующих уравнений:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi^*(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^*(x, \sigma, j)}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = 0, \quad (11)$$

$$\mathcal{H}(\Phi^*, \varphi^*, \varphi, \Phi) = 0. \quad (12)$$

Уравнения (10), (11) определяют точку покоя бесконечномерной гамильтоновой системы уравнений, отвечающей уравнению (1).

Уравнения (10), (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_2} + U(x_2) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_1} - U(x_1) \right) G(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\ & + \sum_{\sigma} \int dy \{ V(x_2, y) G^*(y, \sigma; y, \sigma) G(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\ & \quad - V(x_1, y) G^*(y, \sigma; y, \sigma) G(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\ & \quad - V(y, x_2) G(x_1, \sigma_1; y, \sigma) G^*(x_2, \sigma_2; y, \sigma) \\ & \quad - V(x_1, y) G^*(y, \sigma; x_1, \sigma_1) G(y, \sigma; x_2, \sigma_2) \\ & \quad + V(y, x_2) R^*(x_1, \sigma_1; y, \sigma) R(x_2, \sigma_2; y, \sigma) \\ & \quad - V(x_1, y) R^*(y, \sigma; x_1, \sigma_1) R(y, \sigma; x_2, \sigma_2) \} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_1} + U(x_1) - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_2} + U(x_2) - 2E \right) R(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\ & - V(x_1, x_2) R(x_2, \sigma_2; x_1, \sigma_1) \\ & + \sum_{\sigma} \int dy \{ V(x_1, y) G(y, \sigma; y, \sigma) R(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\ & \quad + V(x_2, y) G^*(y, \sigma; y, \sigma) R(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) \\ & \quad - V(x_1, y) G(y, \sigma; x_1, \sigma_1) R(y, \sigma; x_2, \sigma_2) \\ & \quad + V(y, x_2) G^*(x_1, \sigma_1; y, \sigma) R(x_2, \sigma_2; y, \sigma) \\ & \quad + V(x_1, y) G(y, \sigma; x_2, \sigma_2) R(y, \sigma; x_1, \sigma_1) \\ & \quad - V(y, x_2) G^*(x_2, \sigma_2; y, \sigma) R(x_1, \sigma_1; y, \sigma) \} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где E есть главный член асимптотики собственных значений в уравнении (1) при $\bar{N} \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathcal{L} = L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$. Будем представлять элементы гильбертова пространства $\mathcal{L}$ в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \sigma) \\ \varphi_2(x, \sigma) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\varphi_j(x, \sigma) \in L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ при $j = 1, 2$ и σ принимает значения 1, 2, т. е. $\varphi_j(x, 1) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_j(x, 2) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ при $j = 1, 2$.

Поставим в соответствие каждой паре функций G и R операторы $\mathbf{A}(G, R)$ и $\mathbf{L}(G, R)$ в пространстве $\mathcal{L}$, которые действуют на элементы этого пространства следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(G, R)\varphi &= \begin{pmatrix} \sum_{\sigma'=1}^2 \int dy (G(x, \sigma; y, \sigma')\varphi_1(y, \sigma') + R^*(x, \sigma; y, \sigma')\varphi_2(y, \sigma')) \\ \varphi_2(x, \sigma) - \sum_{\sigma'=1}^2 \int dy (R(x, \sigma; y, \sigma')\varphi_1(y, \sigma') + G^*(x, \sigma; y, \sigma')\varphi_2(y, \sigma')) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}(G, R)\varphi &= \begin{pmatrix} (-\hbar^2 \frac{\Delta_x}{2m} + U(x) - E + \sum_{\sigma'=1}^2 \int dy V(x, y)G^*(y, \sigma'; y, \sigma'))\varphi_1(x, \sigma) \\ (\hbar^2 \frac{\Delta_x}{2m} - U(x) + E - \sum_{\sigma'=1}^2 \int dy V(x, y)G(y, \sigma'; y, \sigma'))\varphi_2(x, \sigma) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} - \sum_{\sigma'=1}^2 \int dy V(x, y)(G^*(y, \sigma'; x, \sigma)\varphi_1(y, \sigma') + R^*(y, \sigma'; x, \sigma)\varphi_2(y, \sigma')) \\ \sum_{\sigma'=1}^2 \int dy V(x, y)(G(y, \sigma'; x, \sigma)\varphi_2(y, \sigma) + R(y, \sigma'; x, \sigma)\varphi_1(y, \sigma')) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где φ имеет вид (15).

ТЕОРЕМА 2. Коммутатор операторов $\mathbf{A}(G, R)$ и $\mathbf{L}(G, R)$ имеет вид

$$[\mathbf{A}(G, R), \mathbf{L}(G, R)] = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & -\bar{\hat{\beta}} \\ -\hat{\beta} & \bar{\hat{\alpha}} \end{pmatrix},$$

где $\hat{\alpha}$ — оператор, имеющий интегральное ядро $\alpha(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$, равное левой части уравнения (13), $\hat{\beta}$ — оператор, имеющий интегральное ядро $\beta(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$, равное левой части уравнения (14), а черта обозначает комплексное сопряжение.

Таким образом, для уравнений характеристик (13), (14) находится пара Лакса (L -А-пара).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицы $A(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$ и $L(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$, составленные из интегральных ядер элементов матриц $\mathbf{A}(G, R)$ и $\mathbf{L}(G, R)$ соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} G & \bar{R} \\ -\bar{R} & -\bar{G} + 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & -\bar{a} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) &= H(x_1, x_2) - E\delta(x_1 - x_2) \\ &\quad + \sum_{\sigma} \int d\xi V(x_1, \xi) G^*(\xi, \sigma; \xi, \sigma) \delta(x_1 - x_2) \\ &\quad - V(x_1, x_2) G^*(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$b(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) = -V(x_1, x_2) R(x_2, \sigma_2; x_1, \sigma_1), \quad (17)$$

$H(x_1, x_2)$ в формуле (16) — это интегральное ядро оператора $-\hbar^2 \Delta / (2m) + U(x)$. Матрица $K(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2)$, составленная из интегральных ядер элементов коммутатора $[\mathbf{A}(G, R), \mathbf{L}(G, R)]$, имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ -\beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) &= \sum_{\sigma} \int dy (G(x_1, \sigma_1; y, \sigma) a(y, \sigma; x_2, \sigma_2) - \bar{R}(x_1, \sigma_1; y, \sigma) b(y, \sigma; x_2, \sigma_2) \\ &\quad - a(x_1, \sigma_1; y, \sigma) G(y, \sigma; x_2, \sigma_2) + \bar{b}(x_1, \sigma_1; y, \sigma) R(y, \sigma; x_2, \sigma_2)), \\ \beta(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2) &= \sum_{\sigma} \int dy (R(x_1, \sigma_1; y, \sigma) a(y, \sigma; x_2, \sigma_2) - \bar{G}(x_1, \sigma_1; y, \sigma) b(y, \sigma; x_2, \sigma_2) \\ &\quad - b(x_1, \sigma_1; y, \sigma) G(y, \sigma; x_2, \sigma_2) + \bar{a}(x_1, \sigma_1; y, \sigma) R(y, \sigma; x_2, \sigma_2)) \\ &\quad + b(x_1, \sigma_1; x_2, \sigma_2). \end{aligned}$$

Раскрывая определения a и b и учитывая, что $H(x_1, x_2) = H(x_2, x_1)$, получим утверждение теоремы. $\square$

Функции $G(x, \sigma; x', \sigma')$, $R(x, \sigma; x', \sigma')$ удовлетворяют соотношениям

$$G(x, \sigma; x', \sigma') = G^*(x', \sigma'; x, \sigma); \quad R(x, \sigma; x', \sigma') = -R(x', \sigma'; x, \sigma). \quad (18)$$

Из определения этих функций следует, что помимо соотношений (18) они удовлетворяют также соотношениям

$$G(x, \sigma; x', \sigma') = \sum_{\alpha=1}^2 \int dz (G(x, \sigma; z, \alpha) G(z, \alpha; x', \sigma') + R^*(z, \alpha; x, \sigma) R(z, \alpha; x', \sigma')), \quad (19)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int dz (R(x_1, \sigma_1; z, \alpha) G(z, \alpha; x_2, \sigma_2) - G^*(x_1, \sigma_1; z, \alpha) R(z, \alpha; x_2, \sigma_2)) = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим случай $U(x) = 0$, $V(x, y) = V(x - y)$ подробнее. Будем считать, что x лежит на трехмерном торе с длиной стороны L . Решения уравнений (13), (14) представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(x_1, s_1, x_2, s_2) &= \varepsilon_{s_1 s_2} \sum_p R_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1) \right\}, \\ G(x_1, s_1, x_2, s_2) &= \delta_{s_1 s_2} \sum_p G_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1) \right\}, \end{aligned}$$

где $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_\alpha \in (2\pi\hbar/L)\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,$$

и введено обозначение

$$px = \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha x^\alpha, \quad x = (x^1, x^2, x^3).$$

Положим

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} G_p - 1/2 & R_p^* \\ R_p & -G_p + 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_p = \begin{pmatrix} A_p & B_p^* \\ B_p & -A_{-p} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица $\mathbf{L}_p^2$ диагональна, матрица $\mathbf{A}_p$ в силу теоремы 2 представима в виде $\mathbf{A}_p = f(\lambda_p)\mathbf{L}_p/\lambda_p$. Здесь

$$\lambda_p = \sqrt{A_p^2 + |B_p|^2},$$

где

$$A_p = \frac{p^2}{2m} - E + \tilde{V}(0) \sum_q G_q - \sum_q \tilde{V}(p-q)G_q, \quad B_p = \sum_q \tilde{V}(p-q)R_q.$$

Получаем уравнения

$$G_p = \frac{f(\lambda_p)}{\lambda_p} \left(\frac{p^2}{2m} - E + \tilde{V}(0) \sum_q G_q - \sum_q \tilde{V}(p-q)G_q \right) + \frac{1}{2},$$

$$R_p = \frac{f(\lambda_p)}{\lambda_p} \sum_q \tilde{V}(p-q)R_q.$$

Здесь $f(\xi)$ — действительная функция, такая, что почти всюду выполнено условие

$$f(\xi) + f(-\xi) = 0. \quad (21)$$

С другой стороны решения, не удовлетворяющие соотношениям (19), (20), можно аппроксимировать решениями, которые удовлетворяют им. Рассмотрим множество функций $f(\xi)$ следующего вида:

$$f(\xi) = \begin{cases} \sum_{j=1}^M \chi_{[a_j, b_j]}(\xi) - \frac{1}{2}, & \text{если } \xi \geq 0, \\ \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^M \chi_{[a_j, b_j]}(-\xi), & \text{если } \xi < 0, \end{cases} \quad (22)$$

где $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ — наборы из M чисел, такие, что $0 \leq a_1, a_j < b_{j+1} < a_{j+1} < b_{j+1}$ для всех $j = 1, \dots, M-1$, и где $\chi_{[a, b]}(\xi)$ имеет вид

$$\chi_{[a, b]}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leq \xi \leq b, \\ 0, & \text{если } \xi < a \text{ или } b < \xi. \end{cases} \quad (23)$$

Очевидно, что мы можем для любой кусочно-непрерывной функции $f(\xi)$, которая удовлетворяет условию (21) и условию $-1/2 \leq f(\xi) \leq 1/2$, выбрать последовательность функций $g_n(\xi)$ вида (22), такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi g_n(\xi) h(\xi) = \int d\xi f(\xi) h(\xi), \quad \forall h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Поскольку функции g_n принимают значения $\pm 1/2$, то мы видим, что отвечающие им функции $G_n(x, \sigma; x', \sigma')$ и $R_n(x, \sigma; x', \sigma')$ удовлетворяют условиям (23), (26), (27), и в этом смысле решения G и R оказываются связанными с точками покоя гамильтоновой системы, отвечающей усредненному гамильтониану.

ПУАНТИЛИСТИЧЕСКИЙ ПОСТУЛАТ [4]. *Температурная серия с температурой θ определяется функцией*

$$f_\theta(\xi) = \frac{1}{e^{\xi/\theta} + 1} - \frac{1}{2}. \quad (24)$$

Теперь перейдем к бозонному случаю. Будем для простоты считать спин частиц равным нулю и опускать в обозначениях спиновую переменную.

Пропуская выкладки, выпишем сразу уравнения характеристик для бозонного случая при

$$U(x) = 0, \quad V(x, y) = V(x - y) = V_0 v\left(\frac{x - y}{a}\right)$$

в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) R_q \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} \right. \\ & \quad \left. + (\mu - \lambda) \frac{2R_p}{\lambda + 2G_p} \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p} \right] R_p^* \\ & - \left[\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) R_q^* \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} \right. \\ & \quad \left. + (\mu - \lambda) \frac{2R_p^*}{\lambda + 2G_p} \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p} \right] R_p = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & 2R_p \left[\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\frac{2\pi a}{L}p\right)^2 - \mu + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) \right) G_q \right] \\ & + \left[- \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v}\left(\frac{2\pi a}{L}(p - q)\right) R_q \frac{(1 + G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1 + G_p)(1 + 2G_p)} \right. \\ & \quad \left. + (\lambda - \mu) \frac{2R_p}{\lambda + 2G_p} \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1 + G_p)^2 - R_p^* R_p} \right] (2G_p + 1) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $p = (p_1, p_2, p_3)$, p_α — целые числа, L — радиус трехмерного тора, $\tilde{v}(\eta) = \int d\xi v(\xi) e^{i\eta\xi}$, $G_p = G_p^*$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Константы λ и μ удовлетворяют трансцендентным уравнениям

$$\lambda = \frac{-CI + DI'}{JI' - J'I}, \quad \mu = \frac{CJ - DJ'}{JI' - J'I}, \quad (27)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_k \left[\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi a}{L} k \right)^2 + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_l \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (k-l) \right) \right) G_l \right) \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{a_k}{1-a_k} (1+G_k) + 2a_k R_k^* R_k \right) \\
 &\quad \left. + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_l \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (k-l) \right) (R_l^* R_k + R_l R_k^*) a_k (1+G_k) \right], \\
 D &= \sum_k \left[\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi a}{L} k \right)^2 + \frac{V_0 a^3}{L^3} \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (k-l) \right) \right) G_l \right) 2(1-a_k) R_k^* R_k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{V_0 a^3}{2L^3} \sum_l \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (k-l) \right) (R_l^* R_k + R_l R_k^*) (1+2G_k - 2a_k(1+G_k)) \right], \\
 I &= 2 \sum_k (1-a_k)^2 R_k^* R_k, \quad I' = 2 \sum_k a_k (1-a_k) R_k^* R_k, \\
 J &= 2 \sum_k a_k (1-a_k) R_k^* R_k = I', \\
 J' &= \sum_k \left(\frac{a_k}{1-a_k} (1+G_k) + 2a_k^2 R_k^* R_k \right), \quad a_k = \frac{G_k + G_k^2 - R_k^* R_k}{(1+G_k)^2 - R_k^* R_k}.
 \end{aligned}$$

Определим матрицы

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} G_p + 1/2 & R_p^* \\ -R_p & -G_p - 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_p = \begin{pmatrix} A_p & -B_p^* \\ B_p & -A_p \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_p &= \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi a}{L} p \right)^2 - \mu + \frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \left(\tilde{v}(0) + \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (p-q) \right) \right) G_q, \\
 B_p &= -\frac{V_0 a^3}{L^3} \sum_q \tilde{v} \left(\frac{2\pi a}{L} (p-q) \right) R_q \frac{(1+G_p)^2 + R_p^* R_p}{(1+G_p)(1+2G_p)} \\
 &\quad + (\lambda - \mu) \frac{2R_p}{1+2G_p} \frac{G_p + G_p^2 - R_p^* R_p}{(1+G_p)^2 - R_p^* R_p}.
 \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что коммутатор матриц $\mathbf{A}_p$ и $\mathbf{L}_p$ имеет вид

$$[\mathbf{A}_p, \mathbf{L}_p] = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p^* \\ -\beta_p & \alpha_p^* \end{pmatrix},$$

где α_p — левая часть уравнения (25), а β_p — левая часть уравнения (26).

Для бозонного случая, так же как для фермионного, можно сформулировать пуантилистический постулат. Вместо функции $f(\xi)$ вида (24) теперь следует взять

$$f(\xi) = \frac{1}{e^{\xi/\theta} - 1} + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\mathbf{A}_p = f(\mathbf{L}_p)$. Поскольку $\mathbf{L}_p^2 = \lambda_p^2 \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица и

$$\lambda_p = \sqrt{A_p^2 - |B_p|^2},$$

а функция $f(\xi)$ нечетна, имеем $f(\mathbf{L}_p) = f(\lambda_p)\mathbf{L}_p/\lambda_p$. Приравнивая элементы матриц $\mathbf{A}_p$ и $f(\lambda_p)\mathbf{L}_p/\lambda_p$, получим уравнения

$$G_p = \frac{f(\lambda_p)}{\lambda_p} A_p - \frac{1}{2},$$

$$R_p = -\frac{f(\lambda_p)}{\lambda_p} B_p$$

при условии, что $A_p^2 > |B_p|^2$.

Так же как и в фермионном случае, первый член разложения решения в ряд Тейлора по R_p дает температуру фазового перехода из сверхтекучего состояния в нормальное, а второй — скачок теплоемкости. Условие (27) на λ и μ дает соотношение между средними значениями числа парных бозонов $\overline{M}$ и числа «холостых» бозонов $\overline{k}$, выражающимися через G_p и R_p следующим образом:

$$\overline{M} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{R_k^* R_k}{1 + G_k} (1 - a_k),$$

$$\overline{k} = \sum_p a_p (1 + G_p).$$

Легко убедиться, что

$$\overline{k} + 2\overline{M} = \sum_p G_p.$$

Таким образом, константы λ и μ функционально связаны с $\overline{M}$ и $\overline{k}$. В частности, отсюда следует, что при температуре, равной нулю, число холостых бозонов не равно нулю, а связано соотношениями, приведенными выше.

Автор выражает глубокую благодарность И. Князевой, Г. Ковалю и А. Рууге за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Избранные труды, Т. 3. Наукова думка, Киев, 1971.
2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. Наука, М., 1965.
3. Maslov V. P. Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. X. Russian J. Math. Phys., **5**, No. 2, 273–278 (1997).
4. Maslov V. P. Deterministic quantum chaos for systems of bosons and fermions. Russian J. Math. Phys., **5**, No. 4, 473–488 (1996).
5. Maslov V. P. Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields, I. Russian J. Math. Phys., **2**, No. 4, 527–534 (1995).
6. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. ГИФМЛ, М., 1963.
7. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ. Наука, М., 1977.