Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Слабые асимптотики чисел решений диофантовых задач, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 65–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:16:11

Слабые асимптотики чисел решений диофантовых задач*

© 1999. В. И. Арнольд

1. Введение. Простейшие примеры диофантовых задач, о которых пойдет речь, — определение числа точек мелкой решетки в области и проблема Сильвестра–Фробениуса о наименьшем числе $N(a_1, \dots, a_n)$, начиная с которого все целые числа представляются в виде линейных комбинаций $k_1 a_1 + \dots + k_n a_n$ заданных натуральных чисел $a_1, \dots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами k_i .

Вторая задача решена Сильвестром для $n = 2$ (ответ $N = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$, a_1 и a_2 взаимно просты). Под *слабой* асимптотикой я хотел бы здесь понимать $N \sim a_1 a_2$ (пренебрегая меньшими поправками).

В первой задаче асимптотику доставляет объем области, поделенный на объем основного параллелепипеда решетки. Но эта асимптотика лишь *слабая* потому, что область может иметь, скажем, плоскую грань с большим числом целых точек, что делает число точек в области неустойчивым, тогда как объемы устойчивы.

Идея состоит в том, чтобы формализовать эту ситуацию, сделав задачи с подобными неустойчивостями доступными средствам анализа, несмотря на теоретико-числовые флуктуации в исключительных случаях.

2. Слабые асимптотики. Под *задачей* я буду понимать вычисление функции f от решетки Γ в $\mathbb{R}^n$. Примеры: 1) f = число точек решетки Γ в области, 2) $f = \sum U(\gamma)$ по $\gamma \in \Gamma$ для некоторого *потенциала* U .

Под *асимптотикой* я буду понимать исследование поведения f при уплотнении решетки, например, поведения величины $f(\Gamma/M)$, $M \rightarrow \infty$. *Асимптотические формулы* могут иметь, например, вид

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a(\Gamma/M) = c, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{a(\Gamma/M)}{b(\Gamma/M)} = c$$

(скажем, для $b = C(\Gamma)M^d$ и т. п.). Пределы здесь *слабые*: обычную сходимость доставляют только интегралы

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int a(\Gamma/M) F(\Gamma) d\Gamma = c(F),$$

где F — гладкое размазывание решетки по окрестности точки Γ . Конечно, предполагается сходимость $c(F)$ к c для типичных δ -образных размазываний F .

Легко доказывается

ТЕОРЕМА 1. Число Γ -целых точек в ограниченном многограннике слабо асимптотически пропорционально объему многогранника.

*Частично поддержано РФФИ, грант 99-01-01109, и фондом Institute Universitaire de France.

3. Перспективы. Здесь я обсуждаю предположительные применения этих идей к проблеме Фробениуса.

Зафиксируем отображение $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a(k_1, \dots, k_n) = a_1 k_1 + \dots + a_n k_n$, где a_i — натуральные числа. Рассмотрим прямой образ меры на области $\{k \geq 0\}$

$$F_a(x) = \text{число целых векторов } (k_i), k_i \geq 0, \text{ для которых } a(k) \leq x.$$

Аргументы, доказывающие теорему 1, доставляют следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. Число F_a слабо асимптотически (при $a \rightarrow \infty$) равно объему соответствующего симплекса, $F_a(x) \sim (n!)^{-1} \prod (x/a_i)$.

Конечно, предполагается, что $\{a_i\}$ не имеют общего множителя.

Утоньшение решетки соответствует замене a_i на MA_i , x на MX , где $M \rightarrow \infty$:

$$F_A(X) \sim (n!)^{-1} \prod (X/A_i),$$

причем слабость означает размазывание постоянных a_i .

ЗАМЕЧАНИЕ. Уже следствие $F_A \sim cM^n$ интересно.

Для проблемы Фробениуса нужно исследовать «производную» $\Delta_a(x) = F_a(x+1) - F_a(x)$: число $N(a)$ определено условием $\Delta_a(x) \geq 1$ при $x \geq N$.

ГИПОТЕЗА. Величина Δ_{MA} слабо асимптотически пропорциональна M^{n-1} .

Трудность (оценки Δ снизу) по сравнению с теоремами лежит в возможности существования лакун среди точек $a(k)$ на оси x вблизи N . Пренебрегая этими трудностями, получаем

$$N \sim \left((n-1)! \prod a_i \right)^{1/(n-1)}, \quad N(MA) \sim M^{1/(n-1)} N(A).$$

В случае Сильвестра ($n=2$) $N \sim a_1 a_2$ действительно достаточно. В следующем случае ($n=3$) $N \sim \sqrt{2a_1 a_2 a_3}$ кажется достаточным экспериментально.

Можно предвидеть универсальность статистики лакун $\{x: F_a(x) = 0\}$. Для $n=2$ они антисимметричны: x — лакуна, если и только если $N-1-x$ — не лакуна.

Математический институт им. В. А. Стеклова и
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
15 сентября 1999 г.

УДК 513.8

Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы операторов

© 1999. А. М. Гомилко

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, а B^* — его сопряженное с нормой $\|\cdot\|_*$. Через (x, y) обозначим действие линейного непрерывного функционала $y \in B^*$ на вектор $x \in B$; в частности, если B — гильбертово пространство, то (x, y) — скалярное произведение в B . Все рассматриваемые далее операторы предполагаются линейными и действующими в B , а I — тождественный оператор. Для оператора A через $\sigma(A)$ обозначим его спектр, и пусть $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, — резольвента оператора A .