Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Дектярев, Равнораспределенность значений
при полиномиальных отображениях, *Функци. анализ
и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 70–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:13:53

УДК 519.9

Равнораспределенность значений при полиномиальных отображениях*

© 1999. И. М. ДЕКТЯРЕВ

Мы будем изучать полиномиальные отображения $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, для которых однородные составляющие старших степеней не имеют нетривиальных общих корней. Такие отображения будем называть полиномиальными отображениями общего вида.

Если F — отображение общего вида, то из $|z| \rightarrow \infty$ следует, что $|F(z)| \rightarrow \infty$. Значит, прообраз любой точки $a \in \mathbb{C}^n$, будучи аналитическим множеством в компактной части пространства $\mathbb{C}^n$, является конечным, и по теореме Безу количество $\deg(F)$ элементов в нем с учетом кратности равно произведению степеней полиномов, образующих отображение F . Будем называть это число степенью отображения F .

Пусть для $R > 0$ и $\rho > 0$ из $|z| > R$ следует $|F(z)| > 2\rho$, и пусть f — голоморфная функция в окрестности замыкания шара радиуса R , а M — максимум модуля функции f на этом шаре. В работе [1, с. 69] доказано существование такой константы L , зависящей только от M , $\deg(F)$ и ρ , что для любых w_1 и w_2 , принадлежащих шару радиуса ρ , хаусдорфово расстояние между множествами $f(F^{-1}(w_1))$ и $f(F^{-1}(w_2))$ не превосходит величины $L|w_1 - w_2|^{1/\deg(F)}$. Отсюда, в частности, следует, что отображение F открыто.

Пространство-образ будем считать естественно вложенным в проективное пространство, которое, в свою очередь, будем рассматривать как проективизацию унитарного $(n+1)$ -мерного пространства. На пространстве $\mathbb{CP}^n$ зададим (n, n) -форму ω — нормированную унитарно инвариантную форму объема — и через μ обозначим $(n-1)$ -ю внешнюю степень фундаментальной формы стандартной элеровой метрики Фубини–Штуди, поделенной на π . Обозначая через α модуль угла между прямыми, задающими точки a и w проективного пространства, определим, кроме того, функцию

$$\gamma_a(w) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sum_1^{n-1} \frac{1}{k} C_{n-1}^k \operatorname{tg}^{-2k} \alpha \right).$$

Непосредственно проверяется, что $dd^c(\gamma_a\mu) = \omega$ вне точки a . Кроме того (см. [1, с. 69]), из открытости отображения F следует, что форма $F^*(\gamma_a\mu)$ имеет локально абсолютно суммируемые коэффициенты. Это же верно и относительно коэффициентов форм $dF^*(\gamma_a\mu)$ и $d^c F^*(\gamma_a\mu)$.

ЛЕММА 1. Пусть $a = F(z_0)$, U — окрестность точки z_0 , θ — произвольная гладкая 1-форма, а f — непрерывная функция в окрестности U . Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $V \subset U$, что для любой окрестности $W \subset V$, имеющей кусочно гладкую границу, выполнено соотношение $|\int_{\partial W} \theta \wedge F^*(\gamma_a\mu)| < \varepsilon$. Если же z_0 — регулярная точка отображения F , то

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 97-01-00050.

для некоторой окрестности $W \subset U$ с кусочно гладкой границей выполнено соотношение $|\int_{\partial W} f d^c F^*(\gamma_a \mu) + f(z_0)| < \varepsilon$.

Пусть Φ — пространство гладких финитных функций на пространстве $\mathbb{C}^n$, и пусть ψ — это форма $(4\pi)^{-1} \sum_{j=1}^n dd^c \ln(1 + |z_j|^2)$. Определим норму функции $\varphi \in \Phi$ как точную нижнюю грань таких $\lambda > 0$, что формы $\lambda\psi + dd^c \varphi$ и $\lambda\psi - dd^c \varphi$ положительны. Определим функционал $N(F, a)$ как сумму значений функции φ на прообразах точки a , подсчитанную с учетом кратности. Функционал $T(F)$ определим как интеграл по $\mathbb{C}^n$ от формы $\varphi F^* \omega$, а функционал $m(F, a)$ — как интеграл по $\mathbb{C}^n$ от формы $dd^c \varphi \wedge F^*(\gamma_a \mu)$. Эти объекты являются в определенном смысле аналогами соответствующих величин теории Неванлинны. Во всяком случае имеет место следующий аналог первой основной теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ и любого значения a выполнено соотношение $T(F)\varphi = N(F, a)\varphi + m(F, a)\varphi$, причем функционалы, стоящие в правой части, слабо непрерывно зависят от a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность функционалов $N(F, a)$ и $m(F, a)$ легко следует из [1, леммы 4 и 5]. Поэтому достаточно доказать теорему для регулярных значений, что можно сделать непосредственными вычислениями, используя теорему Стокса и лемму 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Норма функционала $T(F) - N(F, a)$ ни при каком значении a не превосходит величины $\int_{\mathbb{C}^n} \psi \wedge F^*(\gamma_a \mu)$.*

Используя функцию γ_a в качестве ядра, можно построить на пространстве $\mathbb{C}P^n$ теорию потенциала. При этом получающиеся свойства во многом аналогичны свойствам ньютоновского потенциала. В частности [2, с. 253], если емкость какого-либо множества D равна $\text{Cap}(D)$, то для любого $\delta > 0$ найдется такое покрытие этого множества шарами радиусов $r_1, r_2, \dots$, что $\sum_k r_k^{2n-2+\delta} < L \text{Cap}(D)^{1+\delta/(2n-2)}$, где константа L зависит только от размерности.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть компактное множество $D \subset \mathbb{C}P^n$ состоит из таких точек a , что норма функционала $T(F) - N(F, a)$ для этих a больше, чем A . Тогда емкость $\text{Cap}(D)$ этого множества не превосходит величины $(n/A)d_F$, где через d_F обозначено произведение степеней всех полиномов, образующих отображение F , за исключением полинома, имеющего наименьшую степень.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проинтегрируем оценку из следствия 1 по равновесной мере на множестве D и поменяем местами порядок интегрирования. Мы получим, что $A < (1/\text{Cap}(D)) \int_{\mathbb{C}^n} \psi \wedge F^* \mu$, и нам достаточно при любом j установить нужную оценку для интеграла

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}^n} dd^c \ln(1 + |z_j|^2) \wedge F^* \mu = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{z_j=t} F^* \mu \right) dd^c \ln(1 + |t|^2).$$

Внутренний интеграл здесь берется по гиперплоскости $z_j = t$, и, согласно теореме Виртингера, он равен умноженному на величину $(n-1)!/\pi^{n-1}$ объему образа этой гиперплоскости, измеренному в метрике, индуцированной стандартной метрикой Фубини–Штуди. Этот объем, в свою очередь, по теореме Крофтона равен умноженному на величину $\pi^{n-1}/(n-1)!$ среднему числу пересечений образа этой гиперплоскости с прямыми проективного пространства (усреднение берется по мере, инвариантной на множестве прямых). Покажем, что для почти всех прямых число точек пересечения не превосходит величины d_F .

Пусть для определенности среди полиномов $f^1, \dots, f^n$, задающих отображение F , наименьшую степень имеет первый полином. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n$ векторы $\mathbf{a} = (0, a^2, \dots, a^n)$ и $\mathbf{b} = (1, b^2, \dots, b^n)$, определяющие прямую $\mathbf{a} + s\mathbf{b}$. В таком виде можно представить почти любую прямую, и по теореме Бертини почти любая прямая пересекает образ гиперплоскости трансверсально. Количество точек пересечения равно количеству решений системы уравнений $\{f^1 = s, f^2 = a^2 + sb^2, \dots, f^n = a^n + sb^n\}$. Исключая при помощи первого уравнения параметр s и учитывая, что полином f^1 имеет наименьшую степень, мы получим необходимый результат, воспользовавшись следующим дополнением к теореме Безу: если отображение $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (не обязательно общего вида) задается системой полиномов, то количество изолированных точек (с учетом кратности) в прообразе любой точки $\mathbf{a}$ не превосходит величины $\deg(F)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $F_1, \dots, F_k, \dots$ — последовательность полиномиальных отображений общего вида, и пусть последовательность $d_1, \dots, d_k, \dots$ наименьших степеней полиномов, входящих в эти отображения, монотонно стремится к бесконечности. Тогда хаусдорфова размерность множества исключительных значений, т. е. тех значений $\mathbf{a}$, для которых норма функционала $(T(F_k) - N(F_k, \mathbf{a}))/\deg(F_k)$ не стремится к нулю, не превосходит $2n - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададимся произвольными положительными числами ε и δ и для каждого $k = 1, 2, \dots$ построим множество E_k , которое состоит из тех значений $\mathbf{a}$, для которых норма функционала $(T(F_k) - N(F_k, \mathbf{a}))/\deg(F_k)$ больше, чем $k^{-\delta/(4n-4)}$. Согласно теореме 2, емкость множества E_k не превосходит величины $L_1 k^{\delta/(4n-4)}/d_k$, где константа L_1 зависит только от размерности. Каждое такое E_k можно покрыть системой шаров, для радиусов которых выполнено соотношение $\sum r_s^{2n-2+\delta} < L_2 k^{\delta(1+\delta/(2n-2))/(4n-4)}/d_k^{1+\delta/(2n-2)}$. Если выбрать δ меньшим, чем $(2n-2)/3$, и учесть монотонное возрастание целочисленной последовательности $d_1, \dots, d_k, \dots$, то окажется, что выражение в правой части не превосходит $L_2 k^{-(1+\delta/(6n-6))}$. Выберем число k_0 настолько большим, что $L_2 \sum_{k>k_0} k^{-(1+\delta/(6n-6))} < \varepsilon$. Множество исключительных значений содержится в $\bigcup_{k>k_0} E_k$ и потому в силу изложенного может быть покрыто системой шаров, радиусы которых удовлетворяют соотношению $\sum r_s^{2n-2+\delta} < \varepsilon$, т. е. $(2n-2+\delta)$ -мерная мера Хаусдорфа этого множества равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты, похожие на изложенные выше, были получены в работах [3, 4]. В частности, в [3] доказано следующее (мы используем термины и обозначения настоящей заметки): пусть $F_1, \dots, F_k, \dots$ — последовательность невырожденных полиномиальных отображений (не обязательно общего вида), и пусть последовательность $d_1, \dots, d_k, \dots$ наибольших (а не наименьших, как у нас) степеней полиномов, входящих в эти отображения, монотонно стремится к бесконечности. Тогда хаусдорфова размерность множества тех значений $\mathbf{a}$, для которых норма функционала $(T(F_k) - N(F_k, \mathbf{a}))/d_k^n$ не стремится к нулю, не превосходит $2n - 2$. Отметим, однако, что знаменатель в этой формулировке слишком велик, и во многих интересных случаях стремление к нулю обеспечивается именно величиной знаменателя, а не близостью между собой величин, входящих в числитель. Впрочем, это отмечалось и авторами цитируемой работы. В работе [4] изучаются рациональные отображения проективных

пространств. Однако полученные там условия равномерности являются более жесткими. Для последовательностей отображений, рассмотренных в настоящей заметке, они сводятся к требованию сходимости ряда $\sum d_k^{-1}$ (в обозначениях настоящей заметки).

Приводимые ниже примеры показывают, что от налагаемых нами условий на последовательность отображений отказаться нельзя.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим последовательность $\{w_1 = z_1^k, w_2 = z_2\}$ отображений, где наименьшие степени не стремятся к бесконечности. Пусть пробная функция φ равна единице в окрестности окружности ($|z_1| = 1, z_2 = 0$) и равна нулю вне некоторой большей окрестности. Тогда, если вторая координата точки a близка к нулю (а первая отлична от нуля), то $N(F_k, a)\varphi$ при достаточно больших k равно k ; если же вторая координата достаточно велика по модулю, то значение функционала равно нулю. Утверждение следствия не может выполняться.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ту же последовательность отображений и подвергнем пространство $\{w_1, w_2\}$ какому-нибудь повороту, например, на 45° (отображения задаются формулами $\{w_1 = (z_1^k + z_2)/\sqrt{2}, w_2 = (-z_1^k + z_2)/\sqrt{2}\}$). Теперь последовательность наименьших степеней стремится к бесконечности, но отображения перестали быть отображениями общего вида. Структура множества исключительных значений не изменилась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дектярев И. М. В сб.: Многомерный комплексный анализ. Изд-во Ин-та физики СО АН СССР, Красноярск, 1985, с. 64–77. 2. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. Наука, М., 1966. 3. Russakovskii A., Sodin M. Indiana Univ. Math. J., 44, No. 3, 851–882 (1995). 4. Russakovskii A., Shiffman B. Indiana Univ. Math. J., 46, No. 3, 897–932 (1997).

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило в редакцию
4 декабря 1997 г.
В переработанном виде
25 ноября 1998 г.

УДК 517.984, 517.58

Бесконечномерные эллиптические координаты*

© 1999. А. Г. Костюченко, А. А. Степанов

Многие конечномерные вполне интегрируемые задачи механики, например, задача о движении по геодезическим эллипсоида, задача о плоском движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров, задача Кеплера о движении точки под действием гравитационного притяжения неподвижного центра и дополнительной постоянной силы, а также ряд других задач, решаются с помощью эллиптических координат Якоби [1–3].

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №96-01-00333 и грант поддержки научных школ №96-15-01292.