Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, А. А. Степанов, Бесконечномерные эллиптические координаты, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 73–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:50:01

пространств. Однако полученные там условия равномерности являются более жесткими. Для последовательностей отображений, рассмотренных в настоящей заметке, они сводятся к требованию сходимости ряда $\sum d_k^{-1}$ (в обозначениях настоящей заметки).

Приводимые ниже примеры показывают, что от налагаемых нами условий на последовательность отображений отказаться нельзя.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим последовательность $\{w_1 = z_1^k, w_2 = z_2\}$ отображений, где наименьшие степени не стремятся к бесконечности. Пусть пробная функция φ равна единице в окрестности окружности ($|z_1| = 1, z_2 = 0$) и равна нулю вне некоторой большей окрестности. Тогда, если вторая координата точки a близка к нулю (а первая отлична от нуля), то $N(F_k, a)\varphi$ при достаточно больших k равно k ; если же вторая координата достаточно велика по модулю, то значение функционала равно нулю. Утверждение следствия не может выполняться.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ту же последовательность отображений и подвергнем пространство $\{w_1, w_2\}$ какому-нибудь повороту, например, на 45° (отображения задаются формулами $\{w_1 = (z_1^k + z_2)/\sqrt{2}, w_2 = (-z_1^k + z_2)/\sqrt{2}\}$). Теперь последовательность наименьших степеней стремится к бесконечности, но отображения перестали быть отображениями общего вида. Структура множества исключительных значений не изменилась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дектярев И. М. В сб.: Многомерный комплексный анализ. Изд-во Ин-та физики СО АН СССР, Красноярск, 1985, с. 64–77. 2. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. Наука, М., 1966. 3. Russakovskii A., Sodin M. Indiana Univ. Math. J., 44, No. 3, 851–882 (1995). 4. Russakovskii A., Shiffman B. Indiana Univ. Math. J., 46, No. 3, 897–932 (1997).

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило в редакцию
4 декабря 1997 г.
В переработанном виде
25 ноября 1998 г.

УДК 517.984, 517.58

Бесконечномерные эллиптические координаты*

© 1999. А. Г. Костюченко, А. А. Степанов

Многие конечномерные вполне интегрируемые задачи механики, например, задача о движении по геодезическим эллипсоида, задача о плоском движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров, задача Кеплера о движении точки под действием гравитационного притяжения неподвижного центра и дополнительной постоянной силы, а также ряд других задач, решаются с помощью эллиптических координат Якоби [1–3].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №96-01-00333 и грант поддержки научных школ №96-15-01292.

Они вводятся следующим образом. Рассмотрим пространство $H = \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), симметрический оператор A , действующий в H , и некоторый вектор $x \in H$. (Обычно еще требуется условие $A > 0$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллиптическими координатами* вектора x называется набор чисел $\{\lambda_i\}$, являющихся корнями уравнения

$$\frac{1}{2}(A_\lambda^{-1}x, x) = 1, \quad (1)$$

где $A_\lambda = A - \lambda E$. Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$, такой, что $Ae_k = a_k e_k$, где a_k — собственные значения оператора A , причем $a_k < a_{k+1}$ для любого k . Пусть $x_k = (x, e_k)$; тогда (1) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2}{a_k - \lambda} = 2. \quad (2)$$

В дальнейшем будем считать, что A — оператор с простым спектром (т.е. такой, что все собственные значения однократны) и все x_k отличны от 0. Несложно проверить, что уравнение (2) имеет ровно n корней, причем $\lambda_1 < a_1$, $a_{i-1} < \lambda_i < a_i$, $i = 2, \dots, n$. Координаты вектора x выражаются через эллиптические координаты следующим образом [2]:

$$|x_i|^2 = 2 \frac{\prod_{k=1}^n (a_i - \lambda_k)}{\prod_{k \neq i} (a_i - a_k)}. \quad (3)$$

В. И. Арнольд поставил задачу [3] об определении эллиптических координат в бесконечномерной ситуации. В данной заметке рассматривается случай, когда A либо A^{-1} является вполне непрерывным оператором.

Пусть теперь H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор, такой, что A^{-1} вполне непрерывен и $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис, для которого $Ae_n = a_n e_n$, $a_{n+1} > a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. По аналогии с конечномерным случаем эллиптическими координатами назовем корни уравнения (1). Введем функцию

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{a_n - \lambda} - 2,$$

где $x_k = (x, e_k)$. Тогда (1) эквивалентно уравнению

$$F(\lambda) = 0. \quad (4)$$

Несложно проверить, что $F(\lambda)$ — вещественная мероморфная функция, которая отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю, и ее корни λ_n перемежаются с a_n , т.е. $\lambda_1 < a_1$ и $a_n < \lambda_{n+1} < a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ее можно представить в следующем виде (см. [4]):

$$F(\lambda) = C \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda/\lambda_n}{1 - \lambda/a_n}.$$

Так как $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = -2$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|\lambda_n|} < \infty \quad (5)$$

и $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = C \prod_{n=1}^{\infty} a_n / \lambda_n = -2$, $C = -2 \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n / a_n$. Значит,

$$F(\lambda) = -2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - a_n}. \quad (6)$$

Из (6) получаем выражение для координат вектора x :

$$|x_k|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow a_k} (a_k - \lambda) F(\lambda) = 2(a_k - \lambda_k) \prod_{n \neq k} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n}. \quad (7)$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k) \prod_{n \neq k} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n} < \infty. \quad (8)$$

Пусть набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (5) и (8). Покажем, что существует такой вектор x , для которого $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются эллиптическими координатами. Рассмотрим функцию $F(\lambda)$, которая задается уравнением (6). Тогда $F(\lambda)$ — вещественная мероморфная функция, отображающая верхнюю полуплоскость на верхнюю. По теореме Чеботарева [4] $F(\lambda)$ можно представить следующим образом:

$$F(\lambda) = a\lambda + b + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k}{a_k - \lambda} - \frac{A_k}{a_k} \right), \quad (9)$$

где

$$a = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{F(\lambda)}{\lambda} = 0 \quad \text{и} \quad A_k = \lim_{\lambda \rightarrow a_k} (a_k - \lambda) F(\lambda) = 2(a_k - \lambda_k) \prod_{n \neq k} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n}.$$

По условию (8) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$; значит,

$$F(\lambda) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{a_k - \lambda},$$

где $C = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = -2$. Положим $x_k = \sqrt{A_k}$,

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{a_k - \lambda} - 2.$$

Вектор $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ искомый.

Пусть выполнены условия (5) и (8). Положим

$$f_s = \sum_{k=s}^{\infty} (a_k - \lambda_k) \prod_{n=s, n \neq k}^{\infty} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n}.$$

(Несложно проверить, что ряд сходится и все $f_s > 0$.) Тогда

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 &= (a_1 - \lambda_1) \prod_{n>1} \frac{\lambda_n - a_1}{a_n - a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - \lambda_k) \prod_{n \neq 1, k} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n} \left(\frac{a_k - \lambda_1}{a_k - a_1} - 1 \right) \\ &= (a_1 - \lambda_1) \left[\prod_{n>1} \frac{\lambda_n - a_1}{a_n - a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k - \lambda_k}{a_k - a_1} \prod_{n \neq 1, k} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n} \right]. \end{aligned}$$

Пусть

$$G(\lambda) = -\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{a_n - \lambda}.$$

Для $G(\lambda)$ имеет место представление (9), где $a = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda)/\lambda = 0$ и

$$A_k = \lim_{\lambda \rightarrow a_k} G(\lambda)(a_k - \lambda) = (a_k - \lambda_k) \prod_{n \neq 1, k} \frac{\lambda_n - a_k}{a_n - a_k} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{a_k} < \infty,$$

и, значит,

$$G(\lambda) = C + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{a_k - \lambda},$$

где $C = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) = -1$. Имеем

$$-\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{a_n - \lambda} = -1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k - \lambda_k}{a_k - \lambda} \prod_{n \neq 1, k} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n}.$$

Следовательно, $f_1 - f_2 = a_1 - \lambda_1$. Аналогично проверяется, что $f_k - f_{k+1} = a_k - \lambda_k$, $f_k > f_{k+1}$ и $\sum_{k=1}^n (a_k - \lambda_k) = f_1 - f_{n+1} < f_1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k) < \infty, \quad (10)$$

причем $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k) \leq f_1$. Положим

$$f_s^l = \sum_{k=s}^l (a_k - \lambda_k) \prod_{n=s, n \neq k}^l \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n}$$

(если $l < s$, то положим $f_s^l = 0$). Тогда $f_k^l - f_{k+1}^l = a_k - \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$. Суммируя по $k = 1, \dots, n$, получаем $f_1^l = \sum_{k=1}^l (a_k - \lambda_k)$, т.е.

$$\sum_{k=1}^l (a_k - \lambda_k) \prod_{n=1, n \neq k}^l \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n} = \sum_{k=1}^l (a_k - \lambda_k).$$

Если выполнено условие (10), то выполнено и условие (5). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k) &> \sum_{k=1}^s (a_k - \lambda_k) = \sum_{k=1}^s (a_k - \lambda_k) \prod_{n=1, n \neq k}^s \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n} \\ &> \sum_{k=1}^s (a_k - \lambda_k) \prod_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{a_k - \lambda_n}{a_k - a_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, выполнено условие (8) и $f_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k)$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. Если A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор, такой, что A^{-1} вполне непрерывен, то для того, чтобы набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ (такой, что $a_n < \lambda_{n+1} < a_{n+1}$, $\lambda_1 < a_1$) являлся эллиптическими

координатами некоторого вектора x , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k) < \infty,$$

причем $\|x\|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически доказано следующее утверждение. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k - \lambda} - C$, где $C > 0$, $b_k > 0$, $a_k < a_{k+1}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty$. Пусть λ_k — корни уравнения $f(\lambda) = 0$, упорядоченные по возрастанию. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \lambda_k)$.

Пусть теперь $A > 0$ — вполне непрерывный оператор, $a_n > a_{n+1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. В этом случае у уравнения (4) на каждом интервале (a_{n+1}, a_n) имеется по одному корню и еще может существовать корень $\lambda_0 \leq 0$. Положим $\alpha_k = 1/a_k$, $\mu_k = 1/\lambda_k$ и

$$G(\lambda) = -F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n |x_n|^2 \lambda}{\alpha_n - \lambda}.$$

Тогда $G(\lambda)$ — вещественная мероморфная функция, отображающая верхнюю полуплоскость на верхнюю, и $G(0) = 2$. Возможны четыре случая:

(а) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 / a_n < 2$.

Тогда $G(\lambda)$ можно представить в виде

$$G(\lambda) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda/\mu_n}{1 - \lambda/\alpha_n}$$

и $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n / \mu_n > 0$. Покажем, что если выполнено условие $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n / \mu_n > 0$, то существует вектор x , для которого λ_n — эллиптические координаты.

Рассмотрим функцию

$$H(\lambda) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda/\mu_n}{1 - \lambda/\alpha_n}.$$

Так как по теореме Чеботарева

$$H(\lambda) = a\lambda + b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \lambda}{(\alpha_n - \lambda) \alpha_n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2} < \infty,$$

то $b = H(0) = 2$, $a = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} H(\lambda)/\lambda = 0$. Положим $|x_n|^2 = A_n/\alpha_n^2$; тогда вектор $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ искомым.

(б) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 / a_n = 2$.

Отсюда следует, что $\lambda_0 = 0$ — корень уравнения (4). Аналогично проверяется, что этот случай имеет место, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n / \mu_n = 0$.

(с) $-\infty < \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) < 0 \iff 2 < \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 / a_n < \infty$.

Из условия $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) < 0$ следует, что функция $G(\lambda)$ имеет также корень $\mu_0 < 0$. Этот случай имеет место, когда $\prod_{n=2}^{\infty} \alpha_n / \mu_{n-1} < \infty$.

(д) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) = -\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 / a_n = \infty$.

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_{n-1}} = \infty, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 0.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A > 0$ — вполне непрерывный оператор.

1 (случай (а)). Если набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ таков, что $a_{k+1} < \lambda_k < a_k$, то этот набор является эллиптическими координатами некоторого вектора тогда и только тогда, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n > 0$.

2 (случаи (b)–(d)). Если набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ таков, что $\lambda_0 \leq 0$ и $a_{k+1} < \lambda_k < a_k$, то этот набор является эллиптическими координатами некоторого вектора тогда и только тогда, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n = 0$.

В случае (а) для координат x_k имеет место представление (7), а в случаях (b)–(d) — представление

$$|x_k|^2 = 2(a_k - \lambda_{k-1}) \prod_{n \neq k} \frac{a_k - \lambda_{n-1}}{a_k - a_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Якоби К. Лекции по динамике. Гл. ред. общетехнич. лит., Л.-М., 1936. 2. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3, Итоги науки и техники, ВИНТИ, М., 1985. 3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Наука, М., 1989. 4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
11 мая 1999 г.

УДК 519.1

О геометрии одного класса плоских деревьев

© 1999. Ю. Ю. Кочетков

Взаимно однозначное соответствие между классами изотопической эквивалентности плоских связных деревьев и классами линейной эквивалентности обобщенных многочленов Чебышёва позволяет определить истинную форму плоского связного дерева. В работе изучается истинная форма одного класса плоских деревьев — деревьев диаметра 4 с центральной валентностью 4.

Обобщенным многочленом Чебышёва называется многочлен $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, имеющий два критических значения. Пусть α и β — эти значения; тогда прообраз $p^{-1}([\alpha, \beta])$ отрезка $[\alpha, \beta]$ является плоским связным деревом $T(p)$ с $n = \deg(p)$ ребрами. Обратно, если T — плоское связное дерево, то существует обобщенный многочлен Чебышёва p , такой, что $T(p)$ изотопно T (т.е. существует сохраняющая ориентацию деформация плоскости, переводящая T в $T(p)$). Такой многочлен мы будем называть обобщенным многочленом Чебышёва дерева T .