Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, О геометрии одного класса плоских деревьев, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:25:26

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_{n-1}} = \infty, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 0.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A > 0$ — вполне непрерывный оператор.

1 (случай (а)). Если набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ таков, что $a_{k+1} < \lambda_k < a_k$, то этот набор является эллиптическими координатами некоторого вектора тогда и только тогда, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n > 0$.

2 (случаи (b)–(d)). Если набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ таков, что $\lambda_0 \leq 0$ и $a_{k+1} < \lambda_k < a_k$, то этот набор является эллиптическими координатами некоторого вектора тогда и только тогда, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n = 0$.

В случае (а) для координат x_k имеет место представление (7), а в случаях (b)–(d) — представление

$$|x_k|^2 = 2(a_k - \lambda_{k-1}) \prod_{n \neq k} \frac{a_k - \lambda_{n-1}}{a_k - a_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Якоби К. Лекции по динамике. Гл. ред. общетехнич. лит., Л.-М., 1936. 2. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3, Итоги науки и техники, ВИНТИ, М., 1985. 3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Наука, М., 1989. 4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
11 мая 1999 г.

УДК 519.1

О геометрии одного класса плоских деревьев

© 1999. Ю. Ю. Кочетков

Взаимно однозначное соответствие между классами изотопической эквивалентности плоских связных деревьев и классами линейной эквивалентности обобщенных многочленов Чебышёва позволяет определить истинную форму плоского связного дерева. В работе изучается истинная форма одного класса плоских деревьев — деревьев диаметра 4 с центральной валентностью 4.

Обобщенным многочленом Чебышёва называется многочлен $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, имеющий два критических значения. Пусть α и β — эти значения; тогда прообраз $p^{-1}([\alpha, \beta])$ отрезка $[\alpha, \beta]$ является плоским связным деревом $T(p)$ с $n = \deg(p)$ ребрами. Обратно, если T — плоское связное дерево, то существует обобщенный многочлен Чебышёва p , такой, что $T(p)$ изотопно T (т.е. существует сохраняющая ориентацию деформация плоскости, переводящая T в $T(p)$). Такой многочлен мы будем называть обобщенным многочленом Чебышёва дерева T .

В данной работе изучается форма одного класса плоских деревьев. Введем необходимые определения. Мы рассматриваем деревья диаметра 4. Такое дерево имеет центральную вершину (центр) валентности N . Вершина, соединенная ребром с центром, называется боковой. Пусть $k_1, \dots, k_N$ — валентности боковых вершин дерева T , перечисленные в порядке невозрастания; тогда мы говорим, что T принадлежит типу $\langle k_1, \dots, k_N \rangle$. Если k_i попарно различны, то тип содержит $(N-1)!$ попарно неизотопных деревьев. Если $T \in \langle k_1, \dots, k_N \rangle$, то (с точностью до изотопии) T определено циклическим порядком валентностей боковых вершин. Обобщенный многочлен Чебышёва p дерева T имеет степень $m = k_1 + \dots + k_N$. Если α и β — его критические значения, то центр принадлежит множеству $p^{-1}(\alpha)$, а множество боковых вершин есть $p^{-1}(\beta)$. Пусть $\beta = 0$, $a_1, \dots, a_N$ — координаты боковых вершин, а центр находится в точке 0. Тогда

$$p(z) = \prod_{i=1}^N (z - a_i)^{k_i} = \sum_{i=0}^m b_i z^i.$$

$$\begin{cases} k_1 x_1 + \cdots + k_N x_N = 0, \\ k_1 x_1^2 + \cdots + k_N x_N^2 = 0, \\ \vdots \\ k_1 x_1^{N-1} + \cdots + k_N x_N^{N-1} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

ПРИМЕР. Пусть $N = 2$; тогда система (1) состоит из одного уравнения. Если $k < l$ — валентности боковых вершин, а $a, 1$ — их координаты, то $a = -k/l$, т.е. угол между боковыми вершинами равен π , и вершина большей валентности имеет и больший модуль. Пусть теперь $N = 3$, k, l, m , $k < l < m$, — валентности боковых вершин и $a, b, 1$ — их координаты. Этот тип содержит два дерева, взаимно симметричных относительно оси OX . Имеем

$$a = \frac{-km + i\sqrt{klm(k+l+m)}}{m(l+m)}, \quad b = \frac{-lm - i\sqrt{klm(k+l+m)}}{m(k+m)}.$$

Отсюда следует, что $|a|^2 = k(k+l)/m(l+m)$, $|b|^2 = l(l+m)/m(k+m)$, $|a| < |b| < 1$. Угол между соседними боковыми вершинами больше $\pi/2$, а $|a|$ и $|b|$ монотонно возрастают с возрастанием k и l соответственно.

Наша цель — доказать аналогичные утверждения в случае $N = 4$. Пусть k, l, m, n — валентности боковых вершин и $x, y, z, 1$ — их координаты. Решая систему (1) относительно $1/z$ (система содержит три уравнения; исключаем $1/x$ из 1-го и 2-го и из 1-го и 3-го и получаем два уравнения, из которых исключаем $1/y$), получаем уравнение $F(z, k, l, m, n) = 0$ шестой степени по z , все коэффициенты которого положительны (к сожалению, громоздкость многочлена F — этот многочлен есть сумма примерно 100 слагаемых — не позволяет его здесь привести). Этот факт используется при доказательстве следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если валентность центра равна 4, то угол между соседними боковыми вершинами больше $\pi/6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если угол между m -вершиной и n -вершиной не превосходит $\pi/6$, то F имеет корень z_0 , такой, что $0 \leq \arg(z_0) \leq \pi/6$. Тогда числа z^j , $j = 0, \dots, 6$, лежат в верхней полуплоскости. Значит их сумма с положительными коэффициентами не может равняться нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $m \leq n$. Тогда*

- (a) $|z| < 1,25$;
- (b) *если $k \leq l$ и $n/m \geq l/k$ (в частности, если $m \leq k \leq l \leq n$), то $|z| < 1$;*
- (c) *если $m = n$, то $|z| > 0,5$;*
- (d) *если $2m = n$, то $0,3 < |z| < 1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. $|z|$ может быть больше 1, даже если $k, l, m < n$. Например, это верно для дерева с циклическим порядком боковых вершин $k = 1, l = 8, m = 9, n = 10$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Напомним, что многочлен с вещественными коэффициентами называется устойчивым, если все его корни лежат в левой полуплоскости. Рассмотрим утверждение (a). Нам нужно доказать, что корни многочлена F лежат в круге $|z| < 1,25$. При помощи замены переменной $z = (5+5w)/(4-4w)$ задачу можно свести к проверке устойчивости некоторого многочлена $G(w, k, l, m, n) = \sum_{j=0}^6 a_j w^j$. В соответствии с критерием Лъенара–Шипара [3] для этого достаточно доказать положительность коэффициентов многочлена G и положительность определителей

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ a_6 & a_4 & a_2 \\ 0 & a_5 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Здесь $a_0, \dots, a_6, \Delta_3, \Delta_5$ являются многочленами от k, l, m, n . Пусть $p(k, l, m, n) = \sum_{i,j} p_{i,j}(m, n) k^i l^j$ — один из этих многочленов. Достаточно доказать положительность всех $p_{i,j}(m, n)$ при $m \leq n$, что является несложной, но утомительной проверкой.

Утверждения (b), (c) и (d) доказываются аналогично. Однако в случае (b) многочлены $p_{i,j}(m, n)$ могут быть неположительны. Мы докажем положитель-

ность многочленов $q_s(k, l, m, n) = \sum_{i+j=s} p_{i,j}(m, n) k^i l^j$. Многочлены $p_{i,j}$, входящие в q_s , однородны по m, n и имеют одну и ту же степень. Переходя к новым переменным $\alpha = n/m$ и $\beta = l/k$, мы получаем многочлен от β , коэффициенты которого являются многочленами от α . Для доказательства положительности этого многочлена осталось воспользоваться его возвратностью и тем фактом, что $\alpha \geq \beta$.

Численные эксперименты показывают, что при возрастании m модуль z также возрастает и что при возрастании n возрастает угол между n -вершиной и соседней с ней. Строгое доказательство этого утверждения удастся провести только в случае $k = l$ (схему доказательства, изложенную ниже, не удастся провести в общем случае даже при использовании хорошей техники — мощности не хватает). Пусть $l = k$. Тогда F является полным квадратом, $F = G^2$, где

$$G = n(k+n)(2k+n)z^3 + 3mn(k+n)z^2 + 3mn(k+m)z + m(k+m)(2k+m).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $k = l$. Тогда

- (а) $|z|$ возрастает с возрастанием m ;
- (б) угол между n -вершиной и соседней m -вершиной возрастает с возрастанием n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По соображениям непрерывности достаточно доказать, что $|z|^2|'_m \neq 0$ или что $\operatorname{Re}(G'_m \bar{G}'_z \bar{z}) \neq 0$. Полагая $z = x + iy$, рассматриваем систему уравнений $\operatorname{Re}(G) = \operatorname{Im}(G) = \operatorname{Re}(G'_m \bar{G}'_z \bar{z}) = 0$. Исключая из этой системы сначала y , а потом x , получаем многочлен от k, m, n , все коэффициенты которого положительны.

(б) Достаточно доказать, что $z'_n \neq tz$, где $t \in \mathbb{R}$, или что $\operatorname{Im}(z'_n/z) \neq 0$. Далее рассуждаем, как в (а).

Для случая центральной валентности 5 известны только результаты численных экспериментов, так как вычислить соответствующий многочлен 24-й степени (и от пяти параметров k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) не удастся. Известно, однако, что он не обладает свойством положительности коэффициентов. Например, это не так для типа $\{10000, 1000, 50, 5, 1\}$ (вершина валентности 1000 находится в 1, система решается относительно координаты u вершины валентности 1). Поэтому распространить на этот случай утверждение о минимальном угле не удастся. Более того, вычисления указывают, что угол между соседними вершинами может быть сколь угодно мал. Модули боковых вершин обладают свойствами, аналогичными свойствам модулей в случае центральной валентности 4 (напомним, что это результаты численных экспериментов). Если k, l, m, n, p — валентности боковых вершин, а $x, y, z, u, 1$ — их координаты, то (а) если $n \leq p$, то $|u| < 1,4$; (б) если $n = p$, то $|u| > 0,7$; (с) если $p = 2n$, то $0,5 < |u| < 1,1$.

Автор благодарен Герхарду Посту за поддержку и помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shabat G., Zvonkin A. Contemp. Math., **178**, 233–275 (1994). 2. Betrema J., Pere D., Zvonkin A. Plane Trees and their Shabat Polynomials. Catalog, LABRI-Universite Bordeaux 92-75, Bordeaux, 1992. 3. Постников М. М. Устойчивые многочлены. Наука, М., 1981.