Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Потенциал на бесконечности полиномиального образа круга, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 82–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:07:19

УДК 517.9

Потенциал на бесконечности полиномиального образа круга*

© 1999. С. Ю. ОРЕВКОВ

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, являющаяся образом $q(\Delta)$ единичного круга Δ при отображении $t \mapsto q(t)$, где

$$q(t) = a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_n t^{n+1}, \quad a_0 \in \mathbb{R}, |a_0| > 0, \quad (1)$$

— многочлен, однолиственный в Δ .

Пусть $p(z) = \pi^{-1} \int_D (z - \zeta)^{-1} d\mu(\zeta)$ — потенциал области D ($d\mu(x + iy) = dx dy$). Обратная задача теории потенциала — это задача восстановления D по ростку p на ∞ (см. [1] и цитированную там литературу). При $|z| \gg 1$

$$p(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \quad \text{где } c_k = \frac{1}{\pi} \int_D \zeta^k d\mu(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} q(t)^k q'(t) \overline{q'(t)} d\mu(t) \quad (2)$$

(c_k — моменты области D). При помощи правой части (2) можно задать $p(z)$ для любого многочлена $q(t)$ вида (1), не обязательно однолистного. Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Delta} t^k \bar{t}^m d\mu(t) = \begin{cases} 1/(k+1) & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad (3)$$

(2) позволяет выразить c_k как многочлены от $a_0, a_1, \dots, a_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ с рациональными коэффициентами. Из (2), (3) следует, что $c_k = 0$ при $k > n$. Поэтому

$$p(z) = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + \dots + c_n z^{-(n+1)}, \quad c_0 \in \mathbb{R}, |c_0| > 0. \quad (4)$$

Таким образом, мы получили полиномиальное отображение $\eta: V^+ \rightarrow W^+$, где V (соответственно W) есть векторное пространство над $\mathbb{R}$, изоморфное $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, с координатами $(a_0, \dots, a_n)$ (соответственно $(c_0, \dots, c_n)$), V^+ (соответственно W^+) есть полупространство $a_0 > 0$ (соответственно $c_0 > 0$) и η задано формулой $\eta(q) = p$. Мы отождествляем точки полупространства V^+ (соответственно W^+) с многочленами q вида (1) (соответственно вида (4)).

Обозначим через $j(\eta)$ якобиан отображения η относительно форм объема $da_n \wedge \dots \wedge da_1 \wedge da_0 \wedge d\bar{a}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{a}_n$ и $dc_n \wedge \dots \wedge dc_1 \wedge dc_0 \wedge d\bar{c}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{c}_n$. Для $q \in V$ определим $t_1, \dots, t_n$ формулой $q'(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i t)$.

ТЕОРЕМА. $j(\eta) = 2a_0^{n^2+n+1} \text{Res}_t(t^n \bar{q}'(t^{-1}), q'(t)) = 2a_0^{n^2+3n+1} \prod_{i,j=1}^n (1 - t_i \bar{t}_j)$.

ЗАМЕЧАНИЕ (П. Этингоф). Похожая формула встречается в конформной теории поля как формула для коцикла, задающего центральное расширение комплексификации группы $\text{Diff}(S^1)$.

Пусть $\mathcal{S}_n = \{q \in V^+ \mid q' \text{ не имеет корней в } \Delta\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (см. [1]). Ограничение η на $\text{Int } \mathcal{S}_n$ — погружение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Замыканием складки отображения η является (вещественная) гиперповерхность $F = \{q \in V^+ \mid \exists t_i, q'(t_i) = 0 \text{ и } |t_i| = 1\}$.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-96-01-01218 и DGICYT SAB95-0502.

СЛЕДСТВИЕ 3. Замыканием множества ветвления отображения η является подмногообразие коразмерности два $B = \{q \in V^+ \mid \exists t_i \neq t_j, t_i \bar{t}_j = 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим $\partial/\partial a_m$ через ∂_m и $\partial/\partial \bar{a}_m$ через $\bar{\partial}_m$, $m = 0, \dots, n$ ($\partial_0 = \bar{\partial}_0$). Положим

$$J = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_n c_n & \dots & \bar{\partial}_1 c_n & \partial_0 c_n & \partial_1 c_n & \dots & \partial_n c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\partial}_n c_1 & \dots & \bar{\partial}_1 c_1 & \partial_0 c_1 & \partial_1 c_1 & \dots & \partial_n c_1 \\ \bar{\partial}_n c_0 & \dots & \bar{\partial}_1 c_0 & \partial_0 c_0 & \partial_1 c_0 & \dots & \partial_n c_0 \\ \bar{\partial}_n \bar{c}_1 & \dots & \bar{\partial}_1 \bar{c}_1 & \partial_0 \bar{c}_1 & \partial_1 \bar{c}_1 & \dots & \partial_n \bar{c}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\partial}_n \bar{c}_n & \dots & \bar{\partial}_1 \bar{c}_n & \partial_0 \bar{c}_n & \partial_1 \bar{c}_n & \dots & \partial_n \bar{c}_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{n,n} & \mathbf{0} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & \dots & A_{1,1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \bar{A}_{1,1} & \dots & \bar{A}_{1,n} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \mathbf{0} & & \bar{A}_{n,n} \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{2a_0} \begin{pmatrix} & -(n+1)\bar{a}_n & \\ 2a_0 E & \vdots & \mathbf{0} \\ & -2\bar{a}_1 & \\ 0 \dots 0 & a_0 & 0 \dots 0 \\ & 2a_1 & \\ \mathbf{0} & \vdots & 2a_0 E \\ & (n+1)a_n & \end{pmatrix},$$

где $A_{k,j}$, $j \geq k > 1$, — многочлены от $a_0^{\pm 1}$, a_m , $\bar{a}_m$, такие, что $\sum_{j \geq k} A_{k,j} q^j = t^k$. Вычислим AJ . Положим $A_{k,j} = 0$ при $j < k$, $A_{0,0} = 1$, $A_{0,j} = 0$ при $j > 0$ и $a_m = 0$ вне $0 \leq m \leq n$. Обозначим $\pi^{-1} \int_{\Delta} f(t)g(t) d\mu(t)$ через $\langle f, g \rangle$. Тогда (3) означает $\langle t^k, t^m \rangle = \delta_{km}/(k+1)$. Заметим, что $\partial_m q = t^{m+1}$, $\partial_m q' = (m+1)t^m$ и

$$(\partial_m q^j) q' = \frac{dq^j}{dq} \partial_m q \cdot q' = \frac{dq^j}{dq} \frac{dq}{dt} \partial_m q = \frac{dq^j}{dt} \partial_m q.$$

Следовательно, при всех $m \geq 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_j A_{k,j} \langle \partial_m(q^j q'), q' \rangle &= \left\langle (\partial_m q) \cdot \frac{d}{dt} \sum A_{k,j} q^j, q' \right\rangle + \left\langle (\partial_m q') \cdot \sum A_{k,j} q^j, q' \right\rangle \\ &= \langle t^{m+1} \cdot kt^{k-1}, q' \rangle + \langle (m+1)t^m \cdot t^k, q' \rangle \\ &= (m+k+1) \langle t^{m+k}, q' \rangle = (m+k+1) \bar{a}_{m+k}, \\ \sum_j A_{k,j} \langle q^j q', \partial_m q' \rangle &= \langle q' t^k, (m+1)t^m \rangle = (m-k+1) a_{m-k}. \end{aligned}$$

Поэтому элементы верхнего правого квадранта в AJ , верхнего левого квадранта и верхней части среднего столбца равны соответственно

$$\begin{aligned} \sum A_{k,j} \partial_m c_j &= \sum A_{k,j} \langle \partial_m(q^j q'), q' \rangle = (m+k+1) \bar{a}_{m+k}, & m > 0, \\ \sum A_{k,j} \bar{\partial}_m c_j &= \sum A_{k,j} \langle q^j q', \partial_m q' \rangle = (m-k+1) a_{m-k}, & m > 0, \\ \sum A_{k,j} \partial_0 c_j &= \sum A_{k,j} (\langle \partial_0(q^j q'), q' \rangle + \langle q^j q', \partial_0 q' \rangle) = (k+1) \bar{a}_k - (k-1) a_{-k}. \end{aligned}$$

Каждый элемент нижней части матрицы AJ сопряжен центрально симметричному элементу верхней части. Значит,

$$AJ = \begin{pmatrix} a_0 & & & \mathbf{0} & (n+1)\bar{a}_n & & & \mathbf{0} \\ 2a_1 & a_0 & & & n\bar{a}_{n-1} & (n+1)\bar{a}_n & & \\ \vdots & 2a_1 & \ddots & & \vdots & n\bar{a}_{n-1} & \ddots & \\ na_{n-1} & \vdots & \ddots & a_0 & 2\bar{a}_1 & \vdots & \ddots & (n+1)\bar{a}_n \\ (n+1)a_n & na_{n-1} & \dots & 2\bar{a}_1 & 2a_0 & 2\bar{a}_1 & \dots & n\bar{a}_{n-1} & (n+1)\bar{a}_n \\ & (n+1)a_n & \ddots & \vdots & 2a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & n\bar{a}_{n-1} \\ & & \ddots & n\bar{a}_{n-1} & \vdots & & \ddots & 2\bar{a}_1 & \vdots \\ & & & (n+1)\bar{a}_n & na_{n-1} & & & a_0 & 2a_1 \\ \mathbf{0} & & & (n+1)a_n & \mathbf{0} & & & a_0 & \end{pmatrix}.$$

Умножая AJ справа на M , мы заменяем средний столбец на $(0, \dots, 0, a_0, 2a_1, \dots, (n+1)a_n)^t$ и получаем матрицу с верхней строкой $(a_0, 0, \dots, 0)$, и дополнительный минор к a_0 — транспонированная матрица Сильвестра для результата многочленов $a_0 + 2a_1t + \dots + (n+1)a_nt^n$ и $(n+1)\bar{a}_n + n\bar{a}_{n-1}t + \dots + \bar{a}_0t^n$. Значит,

$$\det A \det J \det M = a_0 \operatorname{Res}_t(q', t^n \bar{q}'(t^{-1})).$$

Ясно, что $\det M = \frac{1}{2}$ и $A_{k,k} = a_0^{-k}$, а следовательно, $\det A = \prod A_{k,k}^2 = a_0^{-n(n+1)}$. Осталось заметить, что обращение порядка элементов ∂a_m в J меняет знак таким же образом, как и перестановка аргументов результата.

Я благодарю П. Этингофа и Н. Г. Кружилина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прилепко А. И. Потенциала теории обратные задачи. Математическая энциклопедия. Т. 4, Советская энциклопедия, 1984, с. 520–523.

Математический институт РАН
им. В. А. Стеклова

Поступило в редакцию
9 января 1998 г.

УДК 517.9

О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами*

© 1999. А. А. Панов

1. **Введение.** Основным объектом нашего изучения является уравнение вида

$$\dot{x} = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \quad t \in [0, 1], \quad a_i \in C^1. \quad (1)$$

Введем несколько стандартных обозначений. Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = h(x, t), \quad h \in C^1. \quad (2)$$

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 95-01-01258, CRDF RM1-229, INTAS 93-05-07.