Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, О свойстве локальной коммутативности, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:18:48

УДК 515.16+517.9

О свойстве локальной коммутативности*

© 1998. Р. С. Исмагилов

1. Постановка задачи. Пусть $C^\infty(S^1)$ — пространство вещественных C^∞ -функций на окружности S^1 . Рассмотрим всевозможные пары (L, f) , где L — вещественная алгебра Ли, а $f: C^\infty(S^1) \rightarrow L$ — линейное отображение со следующими свойствами: (а) если $u, v \in C^\infty(S^1)$, $\text{supp } u \cap \text{supp } v = \emptyset$, то $[f(u), f(v)] = 0$; (б) $f(C^\infty(S^1))$ порождает L как алгебру Ли. Свойство (а) называется *локальной коммутативностью* [1]. Пару (L, f) будем называть локально коммутативной. Пару (L^0, f^0) назовем *универсальной*, если для любой пары (L, f) существует гомоморфизм алгебр Ли $p: L^0 \rightarrow L$, такой, что $f = p \circ f^0$. На «абстрактном уровне» пара (L^0, f^0) описывается так. В тензорной алгебре $A = \bigoplus_{n=1}^\infty A_n$, $A_1 = C^\infty(S^1)$, $A_n = A_1^{\otimes n}$ введем скобку Ли $[u, v] = u \otimes v - v \otimes u$. Возьмем подалгебру Ли $A^0 = \bigoplus_{n=1}^\infty A_n^0$, $A_1^0 = A_1$, $A_n^0 = [A_{n-1}^0, A_1^0]$, и ее идеал $I = \bigoplus_{n=2}^\infty I_n$, порожденный элементами $[u, v]$, $u, v \in A_1^0$, $\text{supp } u \cap \text{supp } v = \emptyset$. Тогда алгебра Ли A^0/I с очевидным вложением $C^\infty(S^1) \rightarrow A^0/I$ и есть универсальная локально коммутативная пара. Пространства A_n , $n \geq 1$, очевидным образом вложены в пространства $C^\infty((S^1)^n)$.

Цель работы — явное (вместо приведенного «абстрактного») описание универсальной пары.

Отметим следующую модификацию этой задачи. Заметим, что $A^0 = \bigoplus_{n=1}^\infty A_n^0$ есть свободная алгебра Ли над линейным пространством $A_1^0 = C^\infty(S^1)$; это означает, что для любой алгебры Ли B и линейного отображения $\varphi: A_1^0 \rightarrow B$ существуют линейные отображения $\varphi^{(n)}: A_n^0 \rightarrow B$, $\varphi^{(1)} = \varphi$, задающие гомоморфизм алгебр Ли $A^0 \rightarrow B$. Возьмем целое $p \geq 0$ и рассмотрим лишь те локально коммутативные пары (L, f) , в которых L — топологическая (локально выпуклая) алгебра Ли, а все отображения $f^{(n)}: A_n^0 \rightarrow L$ непрерывны относительно соболевской нормы

$$\|u\|_p = \max \left\{ \left| \prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_k} u \right|, \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq p \right\}.$$

Соответствующую универсальную пару назовем парой порядка p ; требуется описать ее явно.

В заключение этого раздела опишем подпространства $A_n^0 \subset A_n$, используя действие симметрической группы S_n , $(\sigma u)(x_1, \dots, x_n) = u(x_{1\sigma}, \dots, x_{n\sigma})$, $\sigma \in S_n$, $u \in A_n$. Рассмотрим циклы $t_k = (k \cdots 1) \in S_n$, $1 \leq k \leq n$, и элементы $p_k = (1-t_k) \cdots (1-t_2) \in \mathbb{Z}(S_n)$, $k \geq 2$, $p_1 = 1$. Тогда $A_n^0 = p_n(A_n)$. Более того, если определить $[f_1, \dots, f_n]$ формулами $[f_1, \dots, f_n] = [[f_1, \dots, f_{n-1}], f_n]$, то $[f_1, \dots, f_n] = p_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$.

* Работа поддержана РФФИ, грант № 96-15-96249.

2. Результаты. Рассмотрим градуированную алгебру Ли $D = \bigoplus_{n=1}^{\infty} D_n$, где $D_1 = C^{\infty}(S^1)$, а D_n при $n \geq 2$ есть пространство ростков функций из A_n^0 в окрестности диагонали $x_1 = \dots = x_n$, $x_k \in S^1$. Скобка Ли определяется так же, как в A^0 . Имеем вложение $\varphi: C^{\infty}(S^1) = D_1 \rightarrow D$.

ТЕОРЕМА 1. (D, φ) — универсальная локально коммутативная пара.

Из этой теоремы получается также описание универсальной пары порядка $p \geq 0$; ограничимся случаем $p = 1$. Рассмотрим алгебру Ли $E = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n = C^{\infty}(S^1)$, $[E_m, E_n] = 0$ при $m \geq 2, n \geq 2$, а отображения $[\cdot, \cdot]: E_1 \times E_1 \rightarrow E_2, [\cdot, \cdot]: E_1 \times E_n \rightarrow E_{n+1}, n \geq 2$, имеют вид (соответственно) $[u, v] = uv' - u'v, [u, v] = uv$. Имеет место вложение $\psi: C^{\infty}(S^1) = E_1 \rightarrow E$.

ТЕОРЕМА 2. (E, ψ) — универсальная пара порядка 1.

Ядро доказательства теоремы 1 — следующее свойство элементов $t_k \in S_n, p_n \in \mathbb{Z}(S_n)$, указанных в разд. 1.

ТЕОРЕМА 3. При $n \geq 2$ существует такой элемент $d_n \in \mathbb{Z}(S_n)$, что $\text{supp } d_n \cap S_{n-1} = \emptyset$ и $p_n \cdot (1 + d_n) = 0$. Точнее, $p_n \cdot (1 + t_n p_{n-1}) = 0, n \geq 2$.

(Мы использовали естественное вложение $S_{n-1} \subset S_n$ и отождествили элементы из $\mathbb{Z}(S_n)$ с функциями, определенными на S_n .)

3. Доказательство теорем 1 и 2. Теорема 1 равносильна следующей лемме.

ЛЕММА 1. $I_n, n \geq 2$, совпадает с множеством функций из A_n^0 , равных нулю в окрестности диагонали $x_1 = \dots = x_n, x_k \in S^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $n \geq 3$. Пусть $d(x, y), x, y \in S^1$, — естественная метрика на S^1 . Положим

$$D(m, n; \varepsilon) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in S^1, d(x_i, x_k) < \varepsilon \text{ при } i \leq m, k \leq m\},$$

где $0 < m \leq n, \varepsilon > 0$. Пусть функция $u \in A_n^0$ равна нулю на некотором $D(n, n; \varepsilon)$; докажем, что $u \in I_n$. Как отмечено в разд. 1, $u = p_n(v)$ для некоторой функции $v \in A_n$. Можно считать, что $v = 0$ на $D(n, n; \varepsilon/2)$ (действительно, возьмем S_n -инвариантную функцию $\alpha(x_1, \dots, x_n)$, равную нулю на $D(n, n; \varepsilon/2)$ и единице вне $D(n, n; \varepsilon)$; тогда $u = p_n(\alpha v)$). Пусть m — наименьшее число, для которого функцию v можно выбрать равной нулю на $D(m, n; \varepsilon/2)$. Покажем, что $m = 2$. Допустим, что $m > 2$. Возьмем функцию $\beta(x_1, \dots, x_n)$, равную единице на $D(m-1, n; \varepsilon/4)$ и нулю вне множества $D(m-1, n; \varepsilon/2)$. Используя теорему 3 (мы считаем ее доказанной), получаем $u = p_n((1-\beta)v + \beta v) = p_n((1-\beta)v - d_m(\beta v)) = p_n(w)$, где $w = (1-\beta)v + \sum_{\sigma} \lambda(\sigma)\sigma(\beta v)$; в последней сумме $\sigma \in S_m, \sigma \notin S_{m-1}, \lambda(\sigma) \in \mathbb{Z}$. Функция $\sigma(\beta v) = \sigma(\beta)\sigma(v)$ равна нулю на $((S^1)^n \setminus \sigma^{-1}(D(m-1, n; \varepsilon/2))) \cup D(m, n; \varepsilon/2)$. Так как $\sigma \in S_m, \sigma \notin S_{m-1}$, то это множество содержит в себе $D(m-1, n; \varepsilon/2)$. Итак, $\sigma(\beta v) = 0$ на $D(m-1, n; \varepsilon/2)$. Поэтому $w = 0$ на $D(m-1, n; \varepsilon/4)$, что противоречит минимальности числа m . Итак, $m = 2$. Но тогда функция $u = p_n(w)$ лежит в идеале алгебры A^0 , порожденном множеством I_2 . Таким образом, $u \in I_n$.

Ясно, с другой стороны, что любая функция из I_n равна нулю в окрестности диагонали $x_1 = \dots = x_n$. Этим доказаны лемма и теорема 1.

Теорема 2 выводится из теоремы 1 (следует перейти от ростков функций около диагонали $x_1 = \dots = x_n$ к струям порядка 1).

4. Доказательство теоремы 3. Число $c \in \{1, \dots, n\}$ назовем точкой локального минимума элемента $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, если $c\sigma < (c-1)\sigma$, $c\sigma < (c+1)\sigma$; разумеется, если $c = 1$ либо $c = n$, то следует взять лишь одно из этих неравенств. Обозначим через H_n множество элементов $\sigma \in S_n$ с единственной точкой локального минимума $c = M(\sigma)$.

ЛЕММА 2. H_n совпадает с множеством элементов $\sigma \in S_n$ вида $\sigma = t_n^{\varepsilon_n} \dots t_2^{\varepsilon_2}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Числа ε_i однозначно определяются элементом σ , и $M(\sigma) = 1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$.

Лемма доказывается (несложно) индукцией по n .

Пусть L_n — множество таких элементов $\psi \in S_n$, у которых ровно две точки локального минимума и $1\psi \neq n$, $n\psi \neq n$. Положим также

$$H_n^0 = \{\sigma \mid \sigma \in H_n, 1 < M(\sigma) < n\}, \quad H_n^1 = \{\tau \mid \tau \in H_n, 1\tau = n\}.$$

ЛЕММА 3. Справедливо равенство $L_n = H_n^0 \cdot H_n^1$. Любой элемент $\psi \in L_n$ допускает ровно два разложения вида $\psi = \sigma_i \tau_i$, $i = 1, 2$, $\sigma_i \in H_n^0$, $\tau_i \in H_n^1$, причем $M(\sigma_1) = M(\sigma_2)$, $|M(\tau_1) - M(\tau_2)| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опустим несложное доказательство включения $H_n^0 \cdot H_n^1 \subset L_n$. Взяв любой элемент $\psi \in L_n$, построим указанные в лемме разложения. Пусть a и c — точки локального минимума для ψ , $b\psi = n$. Ясно, что либо $a\psi = 1$, либо $c\psi = 1$, $1 \leq a < b < c \leq n$. Пусть $c\psi = 1$. Положим $F_1 = \{a, \dots, c\}\psi$, $G_1 = \{1, \dots, n\} \setminus F_1$. Возьмем элемент $\tau_1 \in S_n$, осуществляющий монотонно убывающее отображение множества $\{1, \dots, c-a+1\}$ на F_1 и монотонно возрастающее отображение множества $\{c-a+2, \dots, n\}$ на G_1 . Положим $\sigma_1 = \psi\tau_1^{-1}$. Легко проверить, что $\sigma_1 \in H_n^0$, $\tau_1 \in H_n^1$, $M(\sigma_1) = b$, $M(\tau_1) = c-a+1$. Итак, искомое разложение $\psi = \sigma_1 \tau_1$ построено. Аналогично, из множеств $F_2 = \{a+1, \dots, c\}\psi$, $G_2 = \{1, \dots, n\} \setminus F_2$ получаем второе разложение $\psi = \sigma_2 \tau_2$, $\sigma_2 \in H_n^0$, $\tau_2 \in H_n^1$, $M(\sigma_2) = b$, $M(\tau_2) = c-a$. Легко подсчитать, что $|H_n^0||H_n^1| = 2|L_n|$. Поэтому таких разложений ровно два.

Докажем теорему 3. Положим $h_n = p_n(1 + t_n p_{n-1})$. Следует доказать, что $h_n = 0$, $n \geq 2$. Имеем

$$h_n = p_n + \sum (-1)^{\sum_{i=2}^n \alpha_i} t_n^{\alpha_n} \dots t_2^{\alpha_2} t_n p_{n-1}, \quad \alpha_i \in \{0, 1\}.$$

Пусть A_n — сумма тех слагаемых последней суммы, в которых $0 < \sum_{i=2}^n \alpha_i < n-1$. Тогда

$$A_n = \sum (-1)^{\sum_{i=2}^n \alpha_i + \sum_{k=2}^{n-1} \beta_k} t_n^{\alpha_n} \dots t_2^{\alpha_2} t_n t_{n-1}^{\beta_{n-1}} \dots t_2^{\beta_2} \quad \left(0 < \sum_{i=2}^n \alpha_i < n-1\right).$$

Слагаемое этой суммы можно переписать в виде $(-1)^{M(\sigma)+M(\tau)} \sigma \tau$, где $\sigma = t_n^{\alpha_n} \dots t_2^{\alpha_2}$, $0 < \sum_{i=2}^n \alpha_i < n-1$, $\tau = t_n t_{n-1}^{\beta_{n-1}} \dots t_2^{\beta_2}$. Согласно леммам 2, 3, $\sigma \tau$ пробегает множество L_n , и каждый элемент из L_n входит в нашу сумму дважды, причем со знаками $+$ и $-$. Поэтому $A_n = 0$. Итак, $h_n = p_n + t_n p_{n-1} + (-1)^{n-1} t_n \dots t_2 t_n p_{n-1} = \theta_n p_{n-1}$, где $\theta_n = 1 + (-1)^{n-1} t_n \dots t_2 t_n$. Легко проверить, что $\theta_n(1 - t_{n-1}) = (1 - t_{n-1})\theta_{n-1}$, откуда $h_n = (1 - t_{n-1})h_{n-1}$. Отсюда и из очевидного равенства $h_2 = 0$ вытекает, что $h_n = 0$. Теорема доказана.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nahm W.* Quantum field theories in one and two dimensions. *Duke Math. J.*, **54**, No. 2, 579–613 (1987).

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
11 июня 1997 г.

УДК 517.9

Конструкция канонической следовой плотности деформационного квантования с разделением переменных

© 1998. А. В. КАРАБЕГОВ

В данной заметке мы приводим явную конструкцию канонической следовой плотности (см. [1]) деформационного квантования с разделением переменных на псевдокэлеровом многообразии, введенного в [2].

1. Для данного векторного пространства V назовем формальными векторами элементы пространства $V[\nu^{-1}, \nu] = \{v = \sum_{j \geq k} \nu^j v_j \mid v_j \in V, k \in \mathbb{Z}\}$ формальных рядов Лорана от параметра ν . Так мы определяем поле формальных чисел $\mathcal{K} = \mathbb{C}[\nu^{-1}, \nu]$, формальные функции, формы и т. д.

Пусть M есть $2n$ -мерное симплектическое многообразие с симплектической формой ω_{-1} и соответствующей скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, U — произвольное открытое подмножество в M и $\mathcal{F}(U) = C^\infty(U)[\nu^{-1}, \nu]$, $\mathcal{F}_0(U) = C_0^\infty(U)[\nu^{-1}, \nu]$ — пространства формальных функций на U .

Пусть на $\mathcal{F}(M)$ определено ассоциативное, непрерывное в ν -адической топологии $\mathcal{K}$ -линейное умножение $\star$ ($\star$ -умножение), заданное на функциях $f, g \in C^\infty(M)$ формулой $f \star g = \sum_{r \geq 0} \nu^r C_r(f, g)$, где C_r , $r \geq 0$, суть билинейные дифференциальные по обоим аргументам операторы, такие, что $C_0(f, g) = fg$ и $C_1(f, g) - C_1(g, f) = i\{f, g\}$. Тогда говорят, что на M задано деформационное квантование (см. [3]).

Для любого открытого подмножества $U \subset M$ умножение $\star$ можно ограничить на U . Умножение на $\mathcal{F}(U)$ будем обозначать по-прежнему через $\star$.

Следовой плотностью умножения $\star$ на U называется гладкая формальная плотность $d\mu$ на U , такая, что для любых $f, g \in \mathcal{F}_0(U)$ выполняется соотношение $\int_U f \star g d\mu = \int_U g \star f d\mu$. Б. В. Федосов построил в [1] глобальную следовую плотность $d\mu_{\text{can}}$ умножения $\star$ на симплектическом многообразии (M, ω_{-1}) . Эта плотность, называемая канонической, играет важную роль в теоремах об индексе в деформационном квантовании. Старший член формального ряда $d\mu_{\text{can}}$ равен $(2\pi\nu)^{-n} \omega_{-1}^n / n!$.

Любая следовая плотность $d\mu$ на $U \subset M$ представима в виде $d\mu = \lambda d\mu_{\text{can}}$, где λ — локально постоянная формальная функция на U .