Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Инвариант пары почти коммутирующих неограниченных операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:20:43

Инвариант пары почти коммутирующих неограниченных операторов*

© 1998. В. М. Мануйлов

Для широкого класса пар (A, B) неограниченных симметричных операторов мы определяем K -теорный целочисленный инвариант $\omega(A, B)$, равный нулю для пар коммутирующих операторов, равный единице для пар (A, B) со скалярным коммутатором, и обладающий свойством непрерывности. Подобные инварианты в случае ограниченных операторов были определены в работах [1, 2] для матриц, реализующих «почти коммутативные» тор и сферу.

1. Начнем с описания гомотопических инвариантов пар проекторов гильбертова пространства H (все проекторы в настоящей заметке предполагаются самосопряженными). Обозначим через $E(A, [a, b])$ спектральный проектор оператора $A = A^*$, соответствующий отрезку $[a, b]$. При построении инвариантов используется следующий элементарный факт из теории возмущений.

ЛЕММА 1 [3, с. 273]. 1) Если точка $a \in \mathbb{R}$ регулярна для оператора A и $\text{dist}(a, \text{Sp } A) = h$, то для любого $B = B^*$, такого, что $\|A - B\| < h$, эта точка также регулярна.

2) Если точки a, b регулярны для A и удалены от $\text{Sp } A$ не менее, чем на h , то для любого самосопряженного оператора B , удовлетворяющего условию $\|A - B\| < h/2$, выполнено неравенство

$$\|E(A, [a, b]) - E(B, [a, b])\| \leq \frac{b-a}{h^2} \|A - B\|.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если P, S — проекторы и $\|[P, S]\| < r$, $r < 1/4$, то спектры операторов SPS и $(I - S)P(I - S)$ лежат в $[0, 2r] \cup [1 - 2r, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим первое утверждение леммы 1 к операторам $A = P$, $B = SPS + (I - S)P(I - S)$. Заметим, что $A - B = [S, [S, P]]$; поэтому $\|A - B\| < 2r$, откуда вытекает требуемое. $\square$

Приступим к описанию инвариантов.

а) Пусть P, S — проекторы, причем $\dim S(H) < \infty$ и $\|[S, P]\| < 1/4$. Согласно следствию 2, точка $1/2$ регулярна для SPS . Положив

$$f(P, S) := \dim E(SPS, [-1/2, 1/2])(H),$$

получим гомотопический инвариант пар (P, S) со свойством $\|[S, P]\| < 1/4$.

ЛЕММА 3. Пусть P, S, P_i, S_i , $i = 1, 2$, — проекторы.

1) Если $\|[P_i, S]\| < 1/20$ и $\|S(P_1 - P_2)\| < 1/20$, то $f(P_1, S) = f(P_2, S)$.

2) Если $S_1 S_2 = 0$ и $\|[S_i, P]\| < 1/20$, то $f(P, S_1 + S_2) = f(P, S_1) + f(P, S_2)$.

* Работа частично поддержана РФФИ (грант № 96-01-00276) и INTAS (грант No. 96-1099).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Применим следствие 2 и второе утверждение леммы 1 к операторам $A = SP_1S$, $B = SP_2S$; при этом $[a, b] = [-1/2, 1/2]$, $h = 2/5$. Тогда

$$\|E(SP_1S, [-1/2, 1/2]) - E(SP_2S, [-1/2, 1/2])\| < 1;$$

следовательно, размерности указанных спектральных проекторов совпадают.

2) Действуем аналогично с операторами $A = S_1PS_1 + S_2PS_2$, $B = (S_1 + S_2)P(S_1 + S_2)$. При этом $\|A - B\| = \|[[P, S_1], S_2]\| < 1/10$ с прежними $[a, b]$ и h . $\square$

б) Пусть P, Q — проекторы, а $K = P - Q$ — компактный оператор. Возьмем проектор S , такой, что

$$\dim S(H) < \infty, \quad \|[P, S]\| < \frac{1}{60}, \quad \|[Q, S]\| < \frac{1}{60}, \quad \|(I - S)K\| < \frac{1}{60}, \quad (1)$$

и положим $\alpha(P, Q) := f(P, S) - f(Q, S)$.

Докажем, что эта величина не зависит от выбора S . Для этого возьмем проекторы S_1, S_2 , удовлетворяющие (1). Существует такой проектор S , что $S_i \leq S$, $i = 1, 2$, $[P, S] = 0$, $\|(I - S)K\| < 1/60$. Тогда $\|[Q, S]\| = \|[K, S]\| = \|[K, I - S]\| < 1/30$. В силу леммы 3 $f(P, S) = f(P, S_i) + f(P, S - S_i)$, $f(Q, S) = f(Q, S_i) + f(Q, S - S_i)$ и $f(P, S - S_i) = f(Q, S - S_i)$, $i = 1, 2$. Отсюда $f(P, S) - f(Q, S) = f(P, S_i) - f(Q, S_i)$, что доказывает корректность определения $\alpha(P, Q)$. Мы получили гомотопический инвариант, определенный для пар проекторов P, Q с компактной разностью.

2. Пусть A, B — симметричные операторы, определенные на области $\mathcal{D}_0 \subset H$, такой, что $\overline{\mathcal{D}_0} = H$. Положим $C = A + iB$. Определим инвариант $\omega(A, B)$ при следующих предположениях:

- (i) оператор $(I + C^*C)^{-1}$ компактен,
- (ii) замыкание образа оператора C имеет конечную коразмерность в H .

Положим $\Delta_0 = I + C^*C$, $\Delta_1 = I + CC^*$. В гильбертовом пространстве $H \oplus H$ введем операторы

$$P = P(C) = \begin{pmatrix} \Delta_0^{-1} & (C\Delta_0^{-1})^* \\ C\Delta_0^{-1} & I - \Delta_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(оператор P определен по аналогии с проектором, задающим образующую Ботта в группе $\tilde{K}^0(\mathbb{R}^2)$).

ЛЕММА 4. Операторы P и Q являются проекторами, а оператор $P - Q$ компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $P^2 = P$ проверяется прямым вычислением. Для доказательства компактности оператора $P - Q$ воспользуемся полярным разложением (см. [4]) $C = VK$, где $K = K^* \geq 0$, а V — частичная изометрия с областью изометричности $\text{Im } \bar{K}$. Пусть P_{ij} , $i, j = 1, 2$, — матричные элементы оператора P , $P_{11} = \Delta_0^{-1} = (I + K^2)^{-1}$, $P_{21} = C\Delta_0^{-1} = VK(I + K^2)^{-1} = Vg(P_{11})$, где $g(t) = (t - t^2)^{1/2}$. По условию оператор P_{11} компактен. Но тогда компактен и оператор $g(P_{11})$, откуда следует компактность операторов P_{21}

и $P_{12} = P_{21}^*$. Наконец, компактность оператора $P_{22} - I = -\Delta_1^{-1}$ вытекает из равенства $\Delta_1^{-1} = P_{H \ominus H_1} + V(I + K^2)^{-1}V^*$, где $H_1 = V(H) = \overline{\text{Im } C}$. $\square$

Положим $\omega(A, B) := \alpha(P, Q)$.

3. Пусть A, B — симметрические операторы с областью определения $\mathcal{D}_0 \subset H$, $\overline{\mathcal{D}_0} = H$, $A\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0$, $B\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0$ и $(I + C^*C)\mathcal{D}_0 = H$, где $C = A + iB$. Пусть даны также симметричные операторы $K_i: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$, $i = 1, 2$, и оператор $K_1 + iK_2$ ε -подчинен оператору C в следующем смысле:

$$\|K\xi\| \leq \varepsilon(\|\xi\| + \|C\xi\|), \quad \|K^*\xi\| \leq \varepsilon(\|\xi\| + \|C\xi\|), \quad \xi \in \mathcal{D}_0. \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если ε в (2) достаточно мало, т. е. меньше некоторого числа ε_0 , зависящего от C , то $\omega(A + K_1, B + K_2) = \omega(A, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T = C + K$ и построим для операторов T и C проекторы $P(T)$ и $P(C)$. Надо показать, что $\|P(T) - P(C)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого достаточно доказать, что близки левые нижние элементы указанных проекторов. Легко проверить, что на плотном подпространстве $(I + C^*C)\mathcal{D}_0 \subset H$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} T(I + T^*T)^{-1} - C(I + C^*C)^{-1} \\ = K(I + C^*C)^{-1} - T(I + T^*T)^{-1}(K^*C + T^*K)(I + C^*C)^{-1}, \end{aligned}$$

и, так как $\|T(I + T^*T)^{-1}\| \leq 1/2$, $\|T(I + T^*T)^{-1}T^*\| \leq 1$ (это следует из полярного разложения), достаточно показать, что $\|K^*C(I + C^*C)^{-1}\| \rightarrow 0$, $\|K(I + C^*C)^{-1}\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но это следует из того, что оператор K подчинен оператору C . $\square$

4. Вычислим инвариант $\omega(A, B)$ в двух важных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если операторы A и B коммутируют (т. е. имеют коммутирующие резольвенты), то $\omega(A, B) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H$, что $Se_k = \lambda_k e_k$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Имеем разложение $H \oplus H = \bigoplus_{j,k=1}^{\infty} H_{jk}$, где H_{jk} — двумерное пространство с базисом $(e_j, 0)$, $(0, e_k)$. Проекторы $P = P(C)$ и Q оставляют каждое H_{jk} инвариантным, и их действие в H_{jk} задается в указанном базисе матрицами

$$\begin{pmatrix} (1 + |\lambda_k|^2)^{-1} & \bar{\lambda}_k(1 + |\lambda_k|^2)^{-1} \\ \lambda_k(1 + |\lambda_k|^2)^{-1} & |\lambda_k|^2(1 + |\lambda_k|^2)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим проектор $S = S_n$ на подпространство $\bigoplus_{j,k=1}^n H$. Тогда $[S, P] = [S, Q] = 0$ и $\|S(P - Q)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что $f(P, S) = f(Q, S) = n^2$, откуда $\alpha(P, Q) = 0$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $A = x$, $B = -i d/dx$ с естественной областью определения в $L^2(\mathbb{R}) = H$. Тогда $\omega(A, B) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычислений воспользуемся базисом собственных векторов $\{\varphi_n\} \in H$, $n = 0, 1, \dots$, оператора Δ_0 , $\Delta_0 \varphi_n = (2n + 1)\varphi_n$. Пусть R_n — проектор в H на линейную оболочку векторов $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$. Тогда в качестве проектора S в $H \oplus H$ можно взять $R_n \oplus R_n$ при достаточно

большом n . Поскольку S коммутирует с проектором Q на второе слагаемое в $H \oplus H$, условия (1) выполнены при достаточно больших n , так как $||[P, S]|| = \sqrt{2(n+1)/(2n+3)}$. Поскольку $\omega(A, B) = f(P, S) - f(Q, S)$, а $f(Q, S) = n$, остается вычислить $f(P, S)$. Для этого рассмотрим оператор SPS . В указанном базисе этот оператор является блочно-диагональным, $SPS = P_0 \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_{n-1} \oplus P_n$, где блоки P_0 и P_n одномерны, $P_0 = 1$, $P_n = (2n+2)/(2n+3)$ (таким образом, $P_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$), а блоки $P_1, \dots, P_{n-1}$ двумерны и являются проекторами на одномерные пространства,

$$P_k = \begin{pmatrix} \frac{2k}{2k+1} & \frac{\sqrt{2k}}{2k+1} \\ \frac{\sqrt{2k}}{2k+1} & \frac{1}{2k+1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Следовательно, каждый блок в SPS дает единичный вклад в $f(P, S)$, откуда вытекает, что $f(P, S) = n+1$. $\square$

Автор глубоко благодарен Р. С. Исмагилову за ряд полезных замечаний, существенно улучшивших настоящую заметку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Choi M.-D.* Proc. Amer. Math. Soc., **102**, 528–533 (1988).
2. *Exel R., Loring T. A.* J. Funct. Anal., **95**, 364–376 (1991).
3. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
4. *Pud M., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. Мир. М., 1977.

Московский государственный университет
механико-математический факультет
e-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
25 февраля 1997 г.
В переработанном виде
23 марта 1998 г.