Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, Козюлевы алгебры и их идеалы, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 47–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa39>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 04:55:26

Козюлевы алгебры и их идеалы*

© 2005. Д. И. Пионтковский

Введение

Градуированная порожденная в первой степени ассоциативная алгебра R над полем k называется козюлевой¹⁾, если k как R -модуль обладает линейной свободной резольвентой. R -модуль M_R называется козюлевым, если он также обладает линейной свободной резольвентой.

Мы изучаем здесь алгебры с более сильным свойством, чем козюлевость: грубо говоря, это алгебры, у которых много циклических козюлевых модулей. Коммутативные алгебры с аналогичными свойствами (так называемые *алгебры с козюлевыми фильтрациями*) изучались в ряде работ [1–6]. Здесь рассматривается некоммутативная версия этого понятия.

Циклический правый R -модуль $M = R/J$ козюлев в том и только том случае, когда его идеал соотношений J порожден линейными формами и является козюлевым модулем. Это означает, что вместо циклических козюлевых модулей можно изучать порожденные в первой степени козюлевы идеалы. Цепочку $0 = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n = \bar{R}$ (где $n = \dim R_1$, $\bar{R} = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$) правых идеалов, порожденных линейными формами, назовем *козюлевым флагом*, если каждый идеал I_j является козюлевым модулем. Каждая алгебра R , обладающая козюлевым флагом, козюлева, и все козюлевы алгебры наиболее важного класса — PBW-алгебры (или алгебры Пуанкаре–Биркгофа–Витта [7]) — содержат козюлевы флаги (теорема 1.4).

В случае когда алгебра R коммутативна, известна конструкция, которая позволяет найти в этой алгебре козюлев флаг (и доказать тем самым, что она козюлева): эта конструкция называется *козюлевой фильтрацией*. Это понятие введено и изучено в ряде статей Конки и др. [1, 2, 4]. Показано, в частности, что многие квадратичные алгебры, естественным образом возникающие в алгебраической геометрии (такие, как координатные кольца канонических вложений общих проективных кривых и проективных вложений абелевых многообразий), содержат козюлевы фильтрации. Главная цель данной статьи — обобщить эту теорию на некоммутативные алгебры.

Итак, множество $\mathbf{F}$ правых идеалов в R , порожденных линейными формами, называется козюлевой фильтрацией, если $0 \in \mathbf{F}$, $\bar{R} \in \mathbf{F}$ и для любого идеала $0 \neq I \in \mathbf{F}$ существуют $I \neq J \in \mathbf{F}$, $x \in R_1$, такие, что $I = J + xR$ и идеал

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00468.

¹⁾В русской литературе также встречается название *кошулева алгебра*, происходящее от другой транскрипции фамилии французского математика Ж. Л. Козюля (J. L. Koszul).

$(x : J) := \{a \in R \mid xa \in J\}$ лежит в $\mathbf{F}$. Как и в коммутативном случае, каждая алгебра, содержащая козюлеву фильтрацию, козюлева (предложение 2.2). Каждая козюлева фильтрация содержит козюлев флаг (следствие 2.3).

Например, каждая мономиальная квадратичная алгебра содержит козюлеву фильтрацию (см. §2 ниже). Другим примером может служить алгебра с общими квадратичными соотношениями (в случае когда либо число соотношений, либо размерность $\dim R_2$ меньше количества порождающих алгебры R , см. теорему 4.1).

Отдельно мы рассматриваем алгебры, допускающие наименьшую возможную козюлеву фильтрацию (т. е. фильтрацию, совпадающую с козюлевым флагом); такие алгебры называются *изначально козюлевыми*. В коммутативном случае алгебры с таким свойством всегда обладают квадратичным базисом Грёбнера для идеала коммутативных соотношений [1–3]. Мы показываем, что в общем случае такие алгебры также являются PBW-алгебрами, и описываем их базис Грёбнера в теореме 5.1. Как следствие получаем, что алгебры с единственным квадратичным соотношением (в частности, горенштейновы алгебры глобальной размерности 2) изначально козюлевы (следствие 5.2). Кроме того, тензорные и полутензорные произведения двух изначально козюлевых алгебр также изначально козюлевы (следствие 5.4).

Связи между описанными классами козюлевых алгебр выглядят следующим образом (стрелки обозначают включения):

Отметим, что PBW-алгебры не обладают козюлевыми фильтрациями (даже если ограничиться рассмотрением коммутативных алгебр): это следует из [1, Сек. 3].

Одна из самых интересных проблем в теории козюлевых алгебр — это проблема описания их рядов Гильберта. Если R — козюлева алгебра, то ее алгебра Йонеды $\text{Ext}_R(k_R, k_R)$ совпадает с *двойственной* квадратичной алгеброй $R^! = \bigoplus_i \text{Ext}_A^{i,i}(k, k)$. Эйлерова характеристика минимальной свободной резольвенты тривиального модуля k_R дает следующее соотношение между рядами Гильберта (*соотношение Фроберга*):

$$R(z)R^!(-z) = 1. \quad (1)$$

В частности, все коэффициенты ряда $R(-z)^{-1}$ неотрицательны.

Долгое время оставался открытым вопрос: следует ли из соотношения (1), что данная квадратичная алгебра R козюлева? Отрицательный ответ был получен независимо Посицельским [8] и Русом [9]. Более того, среди всех квадратичных алгебр с данными рядами Гильберта $R(z)$ и $R^!(z)$ могут встретиться как козюлевы, так и не козюлевы алгебры [10].

Один из самых эффективных результатов в этом направлении принадлежит Полищуку и Посицельскому [11]: для любого данного целого n множество всех рядов Гильберта n -порожденных козюлевых алгебр конечно. Конечно и множество рядов Гильберта козюлевых модулей с p порождающими степени q над такими алгебрами (для любой заданной пары (p, q)).

Они же высказали естественную гипотезу: ряд Гильберта любой козюлевой алгебры — рациональная функция. По [12] это верно для мономиальных алгебр (а следовательно, и для PBW-алгебр). Согласно [13, 14] (см. также [15]), эта гипотеза верна и для квадратичных алгебр с не более чем двумя соотношениями. Как показано в [16], ряды Гильберта R -матричных алгебр Гекке тоже являются рациональными (тот факт, что такие алгебры козюлевы, доказан также в [17]).

Здесь мы доказываем, что любая алгебра, содержащая козюлеву фильтрацию, имеет рациональный ряд Гильберта (теорема 3.3).

Статья организована следующим образом. В §1 напоминаются основные понятия и обозначения, а также дается определение козюлевых флагов. Доказывается, что любая PBW-алгебра содержит козюлев флаг, и обсуждаются гомологические свойства таких флагов (предложение 1.5). В §2 мы даем определение козюлевой фильтрации и доказываем, что каждый идеал в козюлевой фильтрации — козюлев модуль. Кроме того, показывается, что каждая квадратичная мономиальная алгебра содержит козюлеву фильтрацию. В следующем §3 доказывается, что каждая алгебра с козюлевой фильтрацией имеет рациональный ряд Гильберта, и даются оценки для степеней числителя и знаменателя соответствующей рациональной дроби.

Далее рассматриваются различные классы алгебр с козюлевыми фильтрациями. В §4 строятся козюлевы флаги и фильтрации в алгебрах с общими квадратичными соотношениями. В следующем параграфе определяются и изучаются изначально козюлевы алгебры. Наконец, в §6 дан список некоторых открытых вопросов.

Я хотел бы поблагодарить Леонида Посицельского за чрезвычайно полезные обсуждения.

§1. Козюлевы флаги

Назовем векторное k -пространство, k -алгебру или модуль над ней *градуированными*, если они $\mathbb{Z}_+$ -градуированы и каждая компонента конечномерна. Градуированная алгебра $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$ называется *связной*, если ее компонента нулевой степени R_0 изоморфна k ; связная алгебра называется *стандартной*, если она порождена R_1 и единицей. Все рассматриваемые ниже алгебры стандартные, а все модули, идеалы и векторные пространства градуированные. Все модули правосторонние.

Для модуля M над k -алгеброй R мы обозначаем через $H_i(M)$ градуированное векторное пространство $\text{Tor}_i^R(M, k)$. Через $H_i R$ обозначается векторное пространство $\text{Tor}_i^R(k, k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Модуль M называется *линейным* (степени d), если он порожден в степени d , т.е. $H_0(M)_j = 0$ при $j \neq d$, *квадратичным*, если он является линейным некоторой степени d и все его соотношения могут быть выбраны в степени $d+1$, т.е. $H_1(M)_j = 0$ при $j \neq d+1$, и *козюлевым*, если он обладает линейной свободной резольвентой, т.е. для некоторого d имеем $H_i(M)_j = 0$ при $i \geq 0$, $j \neq i+d$.

Отметим, что, в отличие от оригинального определения в [18], мы не предполагаем, что квадратичный или козюлев модуль порождается в нулевой степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [7]. Алгебра R называется *козюлевой*, если тривиальный модуль k_R козюлев, т.е. каждый модуль гомологий $H_i R$ сосредоточен в степени i .

Основной объект этой статьи — козюлевы алгебры, имеющие достаточно много циклических козюлевых модулей.

Пусть $\Phi = \{I_0, \dots, I_n\}$ — семейство правых идеалов в n -порожденной стандартной алгебре R , такое, что $I_0 = 0$, $I_n = \overline{R}$ (максимальный однородный идеал) и $I_{k+1} = I_k + x_k$ для любого $0 < k \leq n$, где $x_k \in R_1$. Мы также будем обозначать такой флаг идеалов, порожденных в первой степени, через $(x_1, \dots, x_n)$ и будем называть его *линейным флагом*. Если $\Phi = (x_1, \dots, x_n)$ — линейный флаг, то алгебра R порождается линейными формами $x_1, \dots, x_n$ и сам флаг Φ однозначно определяется соответствующим полным флагом подпространств в R_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Линейный флаг Φ называется *козюлевым* флагом, если для любого k , $0 < k \leq n$, идеал I_k является козюлевым модулем (или, равносильно, модуль R/I_k козюлев).

Пусть $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ — минимальная система порождающих пространства R_1 . Тогда $R \simeq F/I$, где $F = T(R_1)$ — свободная ассоциативная алгебра и I — однородный двусторонний идеал в F . Зафиксируем линейный порядок $<$ на S . Алгебра R называется *алгеброй Пуанкаре–Биркгофа–Витта* (PBW-алгеброй) относительно порядка $<$, если идеал I имеет квадратичный базис Грёбнера относительно лексикографически-степенного порядка, продолжающего порядок $<$.

Хорошо известно [7], что каждая PBW-алгебра козюлева. Отметим, что каждая коммутативная PBW-алгебра обладает квадратичным базисом Грёбнера *коммутативных* соотношений; однако существуют примеры коммутативных алгебр с квадратичным базисом Грёбнера коммутативных соотношений, которые не являются PBW-алгебрами (обсуждение этих вопросов см., например, в [11]).

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть R — стандартная алгебра, минимальным образом порожденная линейными формами $x_1, \dots, x_n$. Если R является PBW-алгеброй относительно порядка $x_1 < \dots < x_n$ на порождающих, то семейство $(x_1, \dots, x_n)$ составляет козюлев флаг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что каждый идеал I_k является козюлевым модулем.

Пусть $R = F/I$, как выше, и пусть $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ — редуцированный базис Грёбнера идеала I , а $m_1, \dots, m_r$ — старшие мономы его элементов. Минимальная свободная резольвента тривиального модуля k может быть описана конструкцией Аника [19] (см. также [15]). В этой конструкции векторное пространство $H_i(R)$ отождествляется с линейной оболочкой всех *цепей* степени i , т. е. мономов из F , у которых все подслова длины два принадлежат множеству $\{m_1, \dots, m_r\}$. Обозначив через Ch_i линейную оболочку таких цепей, получаем, что минимальная свободная резольвента для k имеет вид

$$0 \longleftarrow k \longleftarrow A \xleftarrow{d_1} Ch_1 \otimes A \xleftarrow{d_2} Ch_2 \otimes A \longleftarrow \dots \quad (2)$$

Для $k \leq n$ пусть Ch_i^k — линейная оболочка таких цепей степени i , первая буква которых — одна из $x_1, \dots, x_k$. Согласно конструкции из [19], $d_i(Ch_i^k \otimes A) \subset Ch_{i-1}^k \otimes A$. Это означает, что существует подкомплекс

$$\mathcal{F}^k: 0 \longleftarrow x_1 A + \dots + x_k A \xleftarrow{d_1^k} Ch_1^k \otimes A \xleftarrow{d_2^k} Ch_2^k \otimes A \longleftarrow \dots$$

резольвенты (2), где $d_i^k = d_i|_{Ch_i^k}$. Другими словами, на комплексе (2) существует фильтрация $\mathcal{F}^1 \subset \dots \subset \mathcal{F}^n$.

Нетрудно убедиться, что расщепляющие гомоморфизмы векторных пространств $i_j: \ker d_{j-1} \rightarrow Ch_j \otimes A$ [19] также фильтрованы. Поскольку $d_j i_j = \text{id}|_{\ker d_{j-1}}$, получаем

$$d_j^k(i_j|_{\ker d_{j-1}^k}) = (d_j i_j)|_{\ker d_{j-1}^k} = \text{id}|_{\ker d_{j-1}^k}.$$

Следовательно, комплекс $\mathcal{F}^k$ ацикличен и потому является линейной свободной резольвентой для идеала $I_k = x_1 A + \dots + x_k A$. Это означает, что модуль I_k козюлев.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Если семейство $(x_1, \dots, x_n)$ является козюлевым флагом в алгебре R , то (в тех же обозначениях) все идеалы $N_k = (x_k : I_{k-1}) := \{a \in R \mid x_k a \in I_{k-1}\}$ порождены линейными формами и все модули N_k и I_k/I_{k-1} козюлевы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим модуль $M_k = I_k/I_{k-1}$. Поскольку он порожден линейными формами, имеем $H_i(M_k)_j = 0$ for $j \leq i$. Точная тройка

$$0 \rightarrow I_{k-1} \rightarrow I_k \rightarrow M_k \rightarrow 0$$

дает длинную точную последовательность

$$\dots \leftarrow H_{i-1}(I_{k-1})_j \leftarrow H_i(M_k)_j \leftarrow H_i(I_k)_j \leftarrow \dots \quad (3)$$

При $j > i + 1$ правый и левый члены нулевые (поскольку I_{k-1} и I_k козюлевы). Значит, $H_i(M_k)_j = 0$ при $j \neq i + 1$, т. е. модуль M_k козюлев.

Теперь осталось только заметить, что $M_k \simeq R/N_k[-1]$ и потому модуль N_k порожден линейными формами и является козюлевым.

§2. Некоммутативные козюлевы фильтрации

Естественный путь, позволяющий отыскать козюлевы флаги, связан со следующим понятием [1, 2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Семейство $\mathbf{F}$ правых идеалов в стандартной алгебре R называется *козюлевой фильтрацией*, если

- 1) каждый идеал $I \in \mathbf{F}$ порожден линейными формами;
- 2) нулевой идеал и максимальный однородный идеал $\bar{R}$ лежат в $\mathbf{F}$;
- 3) для любого $0 \neq I \in \mathbf{F}$ существуют $I \neq J \in \mathbf{F}$, $x \in R_1$, такие, что $I = J + xR$ и идеал $N := (x_k : I_{k-1}) = \{a \in R \mid xa \in J\}$ лежит в $\mathbf{F}$.

Как и в коммутативном случае [1, 2], названием она обязана следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть $\mathbf{F}$ — козюлева фильтрация на R . Тогда каждый идеал $I \in \mathbf{F}$ является козюлевым модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично коммутативному случаю [1, 2].

Требуется доказать, что $H_i(I)_j = 0$ для всех $i \geq 0$, $j \neq i + 1$. Проведем индукцию одновременно по i и по количеству порождающих идеала I . Если $I = 0$ или $i = 0$, доказывать нечего. В противном случае пусть J, N такие же, как и в определении 2.1.

Положим $x_k = x$. Пусть $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ — минимальное множество линейных форм, порождающее J , и пусть $\{X_1, \dots, X_{k-1}\}$ (соответственно $\{X_1, \dots, X_k\}$) —

множество порождающих в $H_0(J)$ (соответственно в $H_0(I)$), таких, что их образы в J (соответственно в I) суть $x_1, \dots, x_{k-1}$ ($x_1, \dots, x_k$). Рассмотрим начальные члены минимальных свободных резольвент для J и для I :

$$0 \longleftarrow J \longleftarrow H_0(J) \otimes R \longleftarrow \Omega(J) \longleftarrow 0,$$

$$0 \longleftarrow I \longleftarrow H_0(I) \otimes R \longleftarrow \Omega(I) \longleftarrow 0,$$

где модули сизигий — это $\Omega(J) = \{X_1 \otimes a_1 + \dots + X_{k-1} \otimes a_{k-1} \mid x_1 a_1 + \dots + x_{k-1} a_{k-1} = 0\}$ и $\Omega(I) = \{X_1 \otimes a_1 + \dots + X_k \otimes a_k \mid x_1 a_1 + \dots + x_k a_k = 0\}$. Имеем $\Omega(J) \subset \Omega(I)$ и $\Omega(I)/\Omega(J) \simeq \{X_k \otimes a \mid x_k a \in J\} \simeq N[-1]$. Умножив тензорно короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega(J) \longrightarrow \Omega(I) \longrightarrow N[-1] \longrightarrow 0$$

на k , из длинной точной последовательности пространств Тог получаем, что последовательность

$$H_i(J)_j \rightarrow H_i(I)_j \rightarrow H_{i-1}(N)_{j-1}$$

точна при всех $i \geq 1, j \in \mathbb{Z}$. По предположению индукции здесь левый и правый члены нулевые при $j \neq i+1$ и потому средний член также нулевой.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Каждая козюлева фильтрация содержит козюлев флаг.*

ПРИМЕР: МОНОМИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ. Пусть M — алгебра с мономиальными квадратичными соотношениями. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество ее порождающих. Рассмотрим множество $\mathbf{F}$, состоящее из всех правых идеалов в M , порожденных подмножествами множества X . Мы утверждаем, что $\mathbf{F}$ представляет собой козюлеву фильтрацию. (Алгебры с таким свойством называются *сильно козюлевыми*. Другим примером служит коммутативная квадратичная мономиальная алгебра [6].)

Действительно, пусть J и $I = J + x_j M$ — два идеала из $\mathbf{F}$. Достаточно доказать, что идеал $N = \{a \in M \mid x_j a \in J\}$ лежит в $\mathbf{F}$. Рассмотрим любой козюлев флаг $\Phi = (x_{\sigma 1}, \dots, x_{\sigma n})$ (где σ — перестановка), такой, что I и J — элементы флага. По теореме 1.4 он козюлев. Из предложения 1.5 следует, что идеал N порожден линейными формами. Поскольку алгебра M мономиальная, N порожден подмножеством множества X , т. е. $N \in \mathbf{F}$.

Более того, все порожденные линейными формами идеалы в любой квадратичной мономиальной алгебре также составляют козюлеву фильтрацию (в отличие от коммутативного случая, см. [5]). Это следует из результатов статьи [23]. То же верно и для так называемых алгебр с ограниченной переработкой [24] (т. е. PBW-алгебр специального вида): это можно получить из оценок в [25].

§3. Рациональность рядов Гильберта

В этом параграфе доказывается, что каждая алгебра, в которой есть козюлева фильтрация, имеет рациональный ряд Гильберта. Более того, каждый идеал в козюлевой фильтрации также имеет рациональный ряд Гильберта.

Мы будем использовать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1 [11]. *Пусть A — козюлева алгебра. Для $n \geq 0$ обозначим через K_n множество порожденных в первой степени козюлевых A -модулей, количество порождающих которых не превосходит n . Тогда множество рядов Гильберта всевозможных модулей из K_n конечно.*

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\mathbf{F}$ — козюлева фильтрация в алгебре A . Тогда количество всевозможных рядов Гильберта идеалов $I \in \mathbf{F}$ конечно.

ТЕОРЕМА 3.3. Предположим, что алгебра R содержит козюлеву фильтрацию $\mathbf{F}$. Тогда R имеет рациональный ряд Гильберта, равно как и каждый идеал $I \in \mathbf{F}$.

Если множество $\mathcal{H}ilb$ всех рядов Гильберта идеалов $I \in \mathbf{F}$ содержит ненулевых элементов, то степени числителей и знаменателей всех этих рациональных функций не превосходят s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3.2 множество $\mathcal{H}ilb$ всех рядов Гильберта идеалов $I \in \mathbf{F}$ конечно. Пусть $\mathcal{H}ilb = \{I_0(z) = 0, I_1(z), \dots, I_s(z)\}$, где $I_1, \dots, I_s$ — некоторые ненулевые идеалы из $\mathbf{F}$. Поскольку ряды Пуанкаре связаны с рядами Гильберта формулой $P_I(-z) = I(z)R(z)^{-1}$, ряд Пуанкаре любого идеала $I \in \mathbf{F}$ равен ряду Пуанкаре какого-либо из идеалов I_i .

По определению для любого ненулевого идеала $I = I_i$ существуют такие $J = J(I)$, $N = N(I) \in \mathbf{F}$, что $J \subset I$, $J \neq I$ и тройка

$$0 \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow R/N[-1] \rightarrow 0$$

точна. Поскольку $H_i(R/N[-1]) \simeq H_{i-1}N[-1]$, длинная точная последовательность гомологий имеет вид

$$\dots \rightarrow H_i J \rightarrow H_i I \rightarrow H_{i-1} N[-1] \rightarrow \dots \rightarrow H_0 J \rightarrow H_0 I \rightarrow k[-1] \rightarrow 0.$$

Здесь все три идеала I , J , N козюлевы, так что последовательность расщепляется на точные тройки

$$0 \rightarrow H_i J(I) \rightarrow H_i I \rightarrow H_{i-1} N[-1] \rightarrow 0$$

при $i \geq 1$ и

$$0 \rightarrow H_0 J(I) \rightarrow H_0 I \rightarrow k[-1] \rightarrow 0.$$

Положив $h_j(I) = \dim H_j(I)$, получаем равенство

$$h_j(I) = h_j(J(I)) + h_{j-1}(N(I))$$

для каждого $j \geq 1$. Пусть $J^{(1)} := J(I)$ и $J^{(n+1)} := J(J^{(n)})$. Если $J(I) = 0$, то $h_j(J(I)) = 0$ для всех $j \geq 0$; в противном случае получаем $h_j(J(I)) = h_j(J^{(2)}(I)) + h_{j-1}(N(J(I)))$ и т. д. Таким образом,

$$h_j(I) = h_{j-1}(N(I)) + h_{j-1}(N(J^{(1)}(I))) + h_{j-1}(N(J^{(2)}(I))) + \dots$$

Поскольку $J^{(i)}(I) = 0$ при $i \geq \dim R_1$, для любого идеала $I = I_i \neq 0$ существуют натуральное число $m \leq \dim R_1$ и ненулевые идеалы $N_1, \dots, N_m \in \mathbf{F}$, такие, что

$$h_j(I) = h_{j-1}(N_1) + \dots + h_{j-1}(N_m)$$

для всех $j \geq 1$. Так как все возможные ряды Пуанкаре идеалов $N_t \in \mathbf{F}$ реализуются на множестве идеалов $H = \{I_0, \dots, I_s\}$, здесь можно считать, что $N_t \in H$.

Для $j \geq 0$ обозначим через h_j вектор $(h_j(I_1), \dots, h_j(I_s))$. Тогда существует матрица $M \in M_{d \times d}(\mathbb{Z}_+)$, такая, что для любого $j \geq 1$ выполняется рекуррентное соотношение

$$h_j = h_{j-1} M.$$

Обозначим через $h(z) = \sum_{j \geq 0} h_j z^j$ вектор, составленный из рядов Пуанкаре идеалов $I_1, \dots, I_s$. Имеем

$$h(z) = zh(z)M + h_0.$$

Матрица $B = \text{Id} - zM$, очевидно, обратима в $\mathbf{Q}[[z]]$. Пусть $D = D(z) = \det B$ и $C = DB^{-1}$. Здесь D — полином с целыми коэффициентами степени не выше s , а матрица C составлена из миноров матрицы B , т. е. из целочисленных полиномов степени не выше $s - 1$. Получаем рациональное выражение

$$h(z) = B^{-1}h_0 = D^{-1}Ch_0.$$

Пусть $I_s = \overline{R} = \sum_{i \geq 1} R_i$. Обозначим i -й коэффициент вектора Ch_0 через $p_i(z)$. Тогда ряд Пуанкаре идеала I_i равен $p_i(z)/D(z)$. Поскольку $1 = R(z)P_R(-z) = R(z)(1 - zP_R(-z))$, получаем

$$R(z) = (1 - zp_s(-z)/D(-z))^{-1} = \frac{D(-z)}{D(-z) - zp_s(-z)}.$$

Кроме того, для каждого $i = 1, \dots, s$

$$I_i(z) = R(z)P_{I_i}(-z) = \frac{p_i(-z)}{D(-z) - zp_s(-z)}.$$

§4. Квадратичные алгебры с общими соотношениями

Пусть R — квадратичная алгебра с n порождающими и r общими квадратичными соотношениями. Как известно [20], R является козюлевой в том и только том случае, когда либо $r \leq n^2/4$, либо $r \geq 3n^2/4$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — множество общих линейных форм, порождающих R . Рассмотрим линейный флаг $\Phi = (x_1, \dots, x_n)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если либо $r < n$, либо $r > n^2 - n$, то общий линейный флаг Φ козюлев и, более того, является подмножеством некоторой козюлевой фильтрации $\mathbf{F}$. Если $r < n$, то фильтрация $\mathbf{F}$ может быть выбрана конечной.*

Если же $n \leq r \leq n^2 - n$, то Φ не является козюлевым флагом и потому не может быть частью никакой козюлевой фильтрации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R = F/I$, где F — свободная алгебра, порожденная $x_1, \dots, x_n$, и пусть I — двусторонний идеал в ней, порожденный r общими квадратичными формами $f_1, \dots, f_r$. Это означает, что $f_j = \sum_{i \leq n} x_i l_j^i$, где l_j^i — общие квадратичные формы.

Прежде всего рассмотрим случай $r < n$. Здесь R имеет глобальную размерность два, т. е. минимальная свободная резольвента тривиального модуля k_R имеет вид

$$0 \longleftarrow k \xleftarrow{d_0} R \xleftarrow{d_1} H_1 \otimes R \xleftarrow{d_2} H_2 \otimes R \longleftarrow 0, \quad (4)$$

где векторное пространство H_1 — линейная оболочка свободных переменных $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, а векторное пространство H_2 — линейная оболочка переменных $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$. Дифференциалы здесь переводят $\tilde{x}_i$ в x_i и $\tilde{f}_i$ в f_i .

Обозначим идеалы флага Φ через $I_t = \{x_1, \dots, x_t\}R$ и $I_0 = 0$. Мы утверждаем, что идеалы $N_t = \{a \in R \mid x_t A \in I_{t-1}\}$ нулевые при $1 \leq t < n$.

Действительно, предположим обратное. Тогда $N_t \neq 0$ для некоторого $t < n$. По определению это означает, что существуют такие элементы $c_1, \dots, c_t \in R$, не все равные нулю, что для t общих элементов $x_1, \dots, x_t$ имеем

$$\sum_{i \leq t} x_i c_i = 0.$$

Можно при этом считать, что все элементы c_i имеют наименьшую возможную степень (скажем, d) среди всех таких наборов по t элементов для всех $t < n$.

Положим $f = \sum_{i \leq t} \tilde{x}_i c_i \in H_1 \otimes R$. В резольвенте (4) получаем $d_1(f) = \sum_{i \leq t} x_i c_i = 0$, откуда следует, что f лежит в модуле $\text{Im } d_2$.

Это означает, что для некоторых $a^1, \dots, a^r \in R$

$$f = \sum_{j \leq r} d_2(\tilde{f}_j) a^j = \sum_{j \leq r, i \leq n} \tilde{x}_i l_j^i a^j.$$

Поскольку $\deg f = d+1$, для каждого j можно считать, что $\deg a^j = d-1$. Взяв проекцию на $\tilde{x}_n \otimes R$, имеем

$$\sum_{j \leq r} l_j^n a^j = 0.$$

Итак, мы получили линейное соотношение между $r < n$ общими элементами $l_1^n, \dots, l_r^n$ с коэффициентами степени $d-1$. Это противоречит минимальности d .

Теперь рассмотрим идеал N_n . Рассуждая, как выше, получаем, что элемент $a = a_n$ лежит в N_n в том и только том случае, когда существуют такие элементы $a_1, \dots, a_{n-1}$, что $\sum_{i \leq n} x_i a_i = 0$. Это означает, что N_n изоморфен проекции модуля $\text{Im } d_2$ на компоненту $\tilde{x}_n \otimes R$. Таким образом, N_n порожден r общими линейными формами $l_1^n, \dots, l_r^n$.

Мы доказали, что для любых $t < n$ общих линейных форм $x_1, \dots, x_t$ все идеалы $N_i = \{a \mid x_i a \in (x_1, \dots, x_{i-1})R\}$ нулевые. Значит, то же верно и для линейных форм $l_1^n, \dots, l_r^n$. Таким образом, $n+r+1$ идеалов

$$J_0 = 0 = I_0, I_1, \dots, I_n, J_1 = l_1^n R, \dots, J_r = l_1^n R + \dots + l_r^n R$$

образуют козюлеву фильтрацию. Для полноты продемонстрируем, как она выглядит в терминах определения 2.1:

$$\begin{array}{c|c|c} I & J & N \\ \hline I_t, 1 \leq t < n & I_{t-1} & 0 \\ I_n = R_+ & I_{n-1} & J_r \\ J_t, 1 \leq t \leq r & J_{t-1} & 0 \end{array}$$

Рассмотрим теперь случай $r > n^2 - n$. Мы будем строить козюлеву фильтрацию $\mathbf{F}$, начиная с флага Φ .

Имеем $s := \dim R_2 = n^2 - r < n$ и $R_3 = 0$. Поскольку $R_2 = xR_1$ для всех общих $x \in R_1$, то при $2 \leq t \leq n$ имеем $N_t = \{a \mid x_t a \in I_{t-1}\} \supset \{a \mid x_t a \in x_1 R\} = R_+$. Рассмотрим идеал $N_1 = \text{Ann}_R x_1$. Он содержит $n-s$ общих линейных форм (и, следовательно, порожден ими), скажем, $x_1^1, \dots, x_{n-s}^1$. Добавим идеалы $I_t^1 = \sum_{i \leq t} x_i^1 R$, $t \leq n-s$, к нашей фильтрации. Чтобы сделать ее козюлевой, мы должны также добавить идеалы $N_t^1 = \{a \mid x_t^1 a \in I_{t-1}^1\}$. По тем же причинам, что и выше, получаем, что $N_t^1 = 0$ при $t \geq 2$ и что идеал $N_1^1 = \text{Ann}_R x_1^1$ порожден другим множеством из $n-s$ общих линейных форм, скажем, $x_1^2, \dots, x_{n-s}^2$.

Продолжая таким же образом, мы получим бесконечную (счетную) козюлеву фильтрацию $\mathbf{F}$.

Докажем теперь вторую (негативную) часть теоремы. Поскольку алгебра R не является козюлевой при $n^2/4 < r < 3n^2/4$, следует рассмотреть два случая: $n \leq r \leq n^2/4$ (тогда $\text{gl. dim } R = 2$) и $3n^2/4 \leq r \leq n^2 - n$ (тогда $R_3 = 0$).

Пусть $r = qn + p$, где $0 \leq p < n$. С помощью гауссова исключения мономов в квадратичных формах $f_1, \dots, f_r$ мы можем добиться того, что каждый моном $x_i x_j$ (где лексикографически $(i, j) \leq (q+1, p)$) присутствует только в разложении формы $f_{n(i-1)+j}$. Это означает, что относительно лексикографического порядка при $x_1 > \dots > x_n$ мы имеем $\text{lm } f_{n(i-1)+j} = x_i x_j$.

Предположим, что Φ — козюлев флаг.

Рассмотрим артинов случай: $3n^2/4 \leq r \leq n^2 - n$. По предложению 1.5 все модули N_t порождены линейными формами. Поскольку $R_2 \subset N_1$, получаем, что существует по крайней мере одна ненулевая линейная форма (скажем, y), лежащая в $N_1 = \text{Ann}_R x_1$.

Положив $y = \sum_{i \leq n} \lambda_i x_i$, получаем, что в свободной алгебре F

$$x_1 \sum_{i \leq n} \lambda_i x_i = \sum_{i \leq n} \lambda_i x_1 x_i \in k\{f_1, \dots, f_r\}.$$

Воспользовавшись гауссовым исключением мономов, мы можем считать, что $f_i = x_1 x_i + g_i$, $i \leq n$, где мономы $x_1 x_i$, $1 \leq i \leq n$, отсутствуют в разложении квадратичных форм $f_{n+1}, \dots, f_r$ и $g_1, \dots, g_n$. Это дает следующее равенство в алгебре F :

$$\sum_{i \leq n} \lambda_i x_1 x_i = \sum_{i \leq n} \lambda_i f_i + \langle \text{линейная комбинация других } f_i \rangle.$$

Поскольку мономы $\text{lm } f_i$ при $i > n$ отсутствуют в левой части равенства, они должны отсутствовать и в правой части. Значит, последнее слагаемое нулевое, и выполняется равенство $\sum_{i \leq n} \lambda_i x_1 x_i = \sum_{i \leq n} \lambda_i f_i$, или

$$\sum_{i \leq n} \lambda_i g_i = 0.$$

Это система линейных уравнений на n переменных λ_i с общими коэффициентами. Количество уравнений равно количеству мономов в каждом из g_i , т.е. $\dim R_2 = n^2 - r \geq n$. Следовательно, единственное решение нулевое. Это противоречит выбору y .

Осталось рассмотреть случай общей алгебры глобальной размерности два при $n \leq r \leq n^2/4$. Согласно предложению 1.5, все модули N_t порождаются линейными формами. Рассмотрев их компоненты первой степени, получаем, что $N_n = \dots = N_{n-q+1} = R_+$, $N_{n-q-1} = \dots = N_1 = 0$ и что N_{n-q} порожден p общими линейными формами, откуда следует, что $N_{n-q}(z) = I_p(z)$.

Из точной последовательности

$$0 \rightarrow I_t \rightarrow I_{t+1} \rightarrow R/N_{t+1}[1] \rightarrow 0$$

вытекают следующие формулы для рядов Гильберта:

$$I_{t+1}(z) = I_t(z) + z(R(z) - N_{t+1}(z)).$$

Таким образом,

$$I_0(z) = 0, I_1(z) = zR(z), \dots, I_{n-q-1}(z) = (n-q-1)zR(z), \\ I_{n-q+1}(z) = I_{n-q}(z) + z, \dots, I_n(z) = I_{n-q}(z) + qz$$

и

$$I_{n-q}(z) = I_{n-q-1}(z) + z(R(z) - I_p(z)) = (n-q)zR(z) - zI_p(z).$$

Поскольку $I_n = R_+$, получаем

$$I_n(z) = R(z) - 1 = qz + (n-q)zR(z) - zI_p(z).$$

Здесь $R(z) = (1 - nz + rz^2)^{-1}$ (по Голоду–Шафаревичу); поэтому

$$I_p(z) = z \frac{p + qrz}{1 - nz + rz^2} = (zp + qrz^2)R(z).$$

Поскольку $\text{gl. dim } R = 2$, минимальная свободная резольвента модуля R/I_p имеет вид

$$0 \leftarrow R/I_p \leftarrow R \leftarrow H_0(I_p) \otimes R \leftarrow H_1(I_p) \otimes R \leftarrow 0.$$

Здесь $H_0(I_p)(z) = pz$, а значит, из эйлеровой характеристики получаем формулу

$$I_p(z) = pzR(z) - H_1(I_p)(z)R(z).$$

Итак,

$$H_1(I_p)(z) = pz - R(z)^{-1}I_p(z) = -qz^2.$$

При $q > 0$ коэффициент при z^2 отрицателен, и, значит, это не может быть ряд Гильберта. Противоречие завершает доказательство.

§5. Изначально козюлевы алгебры

Если козюлев флаг $(x_1, \dots, x_n)$ в алгебре R является также козюлевой фильтрацией, он называется *флагом Грёбнера* [1, 2]; алгебра R , содержащая такой флаг, называется *изначально козюлевой* (относительно последовательности порождающих $x_1, \dots, x_n$) [3].

В коммутативном случае [1–3] каждая изначально козюлева алгебра имеет квадратичный базис Грёбнера относительно обратного лексикографического порядка. В нашем некоммутативном случае такая алгебра также имеет квадратичный базис Грёбнера — относительно обычного лексикографически-степенного порядка.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть R — стандартная алгебра, порожденная линейными формами $x_1, \dots, x_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) R изначально козюлева с флагом Грёбнера $(x_1, \dots, x_n)$;
- (ii) R является PBW-алгеброй относительно лексикографически-степенного порядка с $x_1 < \dots < x_n$, и старшие мономы элементов базиса Грёбнера G идеала соотношений обладают следующим свойством:

если $x_k x_j \in \text{lm } G$, то $x_k x_i \in \text{lm } G$ для всех $i < j$;

- (iii) мономиальная алгебра $R' = F/\text{id}(\text{lm } G)$ изначально козюлева с тем же флагом Грёбнера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Во-первых, докажем, что R есть PBW-алгебра.

Предположим, что минимальный базис Грёбнера G идеала I содержит элемент g , степень которого не меньше 3 (где I — двусторонний идеал соотношений алгебры R в свободной алгебре $F = k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$). Пусть $g = x_k s_k + x_{k-1} s_{k-1} + \dots + x_1 s_1$, где $s_k \notin I$ и $\deg s_i \geq 2$ для всех $s_i \neq 0$.

Рассмотрим идеал N_k . При некотором $r = r_k$ он порожден элементами $x_1, \dots, x_r$. Так как $x_i \in N_k$ при $i \leq r$, то для любого $i \leq r$ существует элемент $f_i^k = x_k(x_i + \alpha_{i-1}^k x_{i-1} + \dots + \alpha_1^k x_1) + h_i^k \in I$, где $\alpha_j^k \in k$, $h_i^k \in I_{k-1}$. Поскольку старшие мономы $\text{lm } f_i^k = x_k x_i$ элементов f_i^k попарно различны, можно считать, что все они являются элементами минимального базиса Грёбнера G .

Для элемента $a \in F$ обозначим через $\bar{a}$ его образ в R . Поскольку $g \in I$, получаем, что $\bar{s}_k \in N_k$, и потому для некоторых $t_1, \dots, t_r \in F$ имеем $\bar{s}_k = x_1 \bar{t}_1 + \dots + x_r \bar{t}_r$. Кроме того, мы можем считать, что старший моном $\text{lm } s_k$ равен $x_i \text{lm } t_i$ для некоторого $i \leq r$. Поэтому

$$\text{lm } g = x_k \text{lm } s_k = x_k x_i \text{lm } t_i = \text{lm}(f_i^k) \text{lm } t_i.$$

Это означает, что g редуцируется относительно f_i^k , в противоречие с минимальностью базиса Грёбнера G . Значит, R есть PBW-алгебра.

Завершая доказательство импликации, покажем, что G состоит из элементов f_i^k для всех $k \leq n$, $i \leq r_k$. Действительно, предположим, что существует $g \in G$, такой, что $\text{lm } g = x_k x_t$ для некоторого $t > r_k$. Это означает, что $g = x_k v + x_k w + h$, где v лежит в линейной оболочке форм $x_{r+1}, \dots, x_t$, элемент w — в линейной оболочке форм $x_1, \dots, x_r$ и h — в правом идеале, порожденном формами $x_1, \dots, x_{k-1}$. Получаем, что $\bar{v} \in N_k$, в противоречие с предположением о том, что N_k порожден элементами $x_1, \dots, x_r$.

(ii) $\implies$ (i). Как следует из условия (ii), для любого $1 \leq k \leq n$ существует целое число $r = r_k$, такое, что старшие мономы элементов G — в точности мономы $x_k x_i$ для всех $k \leq n$, $i \leq r_k$.

Покажем, что для каждого $k \leq n$ идеал N_k порожден элементами $x_1, \dots, x_r$. Пусть $\bar{a} \in N_k$, где $a \in F$ — нередуцируемый элемент. Поскольку $x_k a \in \{x_1, \dots, x_{k-1}\}F + I$, мы заключаем, что моном $x_k \text{lm } a$ редуцируется. Если $\text{lm } a = x_{i_1} \dots x_{i_d}$, это означает, что для некоторого $j \leq d$ существует такой элемент g базиса Грёбнера G , что $\text{lm } g = x_k x_{i_1} \dots x_{i_j}$. Таким образом, $a \in \{x_1, \dots, x_r\}F + I$; поэтому $\bar{a} \in I_r$.

(i) $\iff$ (iii). По определению множества старших мономов базисов Грёбнера для алгебр R и R' совпадают. Согласно эквивалентности (i) $\iff$ (ii), получаем, что две эти алгебры изначально козюлевы одновременно.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Предположим, что основное поле k алгебраически замкнуто. Тогда квадратичная алгебра R с одним соотношением изначально козюлева.*

В частности, стандартные горюшительновы алгебры глобальной размерности 2 [21] изначально козюлевы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R = F/\text{id}(f)$, где F — свободная алгебра, а f — квадратичное соотношение. Пусть $\mathcal{L}(f)$ — множество всех порожденных линейными формами правых идеалов в F , содержащих f , и пусть J — один из минимальных (по включению) элементов из $\mathcal{L}(f)$.

Если J — главный идеал, то f имеет вид xu , где x, u — линейные формы. Из этого следует, что, с точностью до линейной замены порождающих $x_1, \dots, x_n$ алгебры F , либо $f = x_n x_1$, либо $f = x_1^2$. В обоих случаях R изначально козюлева по теореме 5.1.

Пусть теперь J порождается не менее чем двумя элементами. Можно считать, что $x_{n-1}, x_n \in J$. Нетрудно убедиться [22, с. 1307], что, с точностью до линейной замены порождающих, представление элемента f не содержит моном x_n^2 . Это означает, что $f = x_n l + l' x_n + g$, где l, l', g не зависят от x_n . Тогда $l \neq 0$ в силу минимальности идеала J . Проведя какую-нибудь линейную замену переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$, переводящую l в x_1 , получаем $\text{lm } f = x_n x_1$. По теореме 5.1 это означает, что R изначально козюлева.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Предположим, что мономиальная квадратичная алгебра R изначально козюлева с флагом Грёбнера $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ — мономиальные порождающие. Тогда двойственная квадратичная алгебра $R^!$ также изначально козюлева с флагом Грёбнера $(x_n^*, \dots, x_1^*)$, где звездочка означает двойственный элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В двойственном базисе двойственная мономиальная алгебра имеет соотношения

$$\{x_i^* x_j^* \mid x_i x_j \text{ не является соотношением для } R\}.$$

Теперь следствие непосредственно вытекает из теоремы 5.1.

Для следующего утверждения нам потребуется одно обобщение понятия тензорного произведения алгебр [20]. Пусть A и B — две стандартные алгебры, порожденные соответственно множествами переменных X и Y , и пусть базисы Грёбнера их соотношений (относительно соответствующих лексикографически-степенных порядков) — это G_A и G_B . Предположим, что алгебра C — факторалгебра свободного произведения $A * B$. Тогда C называется *полутензорным произведением* алгебр A и B , если ее базис Грёбнера G_C (относительно лексикографически-степенного порядка с $X > Y$) имеет то же множество старших мономов, что и базис Грёбнера тензорного произведения $A \otimes B$, т. е.

$$\text{lm } G_C = \text{lm } G_A \cup \text{lm } G_B \cup \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Полутензорное произведение изначально козюлевых алгебр изначально козюлево.*

В частности, кольцо квантовых полиномов изначально козюлево.

§6. Открытые вопросы

ВОПРОС 6.1. *Верно ли, что любая коммутативная алгебра с квадратичным базисом Грёбнера коммутативных соотношений (G -квадратичная алгебра) содержит козюлев флаг?*

ВОПРОС 6.2. *Существуют ли PBW-алгебры, в которых нет козюлевых фильтраций?*

ВОПРОС 6.3. *Любая ли алгебра, содержащая бесконечную козюлеву фильтрацию, содержит также и конечную козюлеву фильтрацию?*

ВОПРОС 6.4. *Предположим, что алгебра R содержит козюлеву фильтрацию (или козюлев флаг). Верно ли аналогичное утверждение относительно ее квадратичной двойственной алгебры $R^!$?*

ЛИТЕРАТУРА

1. Conca A., Rossi M. E., Valla G. Groebner flags and Gorenstein algebras. *Compositio Math.*, **129**, 95–121 (2001).
2. Conca A., Trung N. V., Valla G. Koszul property for points in projective spaces. *Math. Scand.*, **89**, No. 2, 201–216 (2001).
3. Blum S. Initially Koszul algebras. *Beiträge Algebra Geom.*, **41**, No. 2, 455–467 (2000).
4. Conca A. Universally Koszul algebras. *Math. Ann.*, **317**, No. 2, 329–346 (2000).
5. Conca A. Universally Koszul algebras defined by monomials. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **107**, 1–5 (2002).
6. Herzog J., Hibi T., Restuccia G. Strongly Koszul algebras. *Math. Scand.*, **86**, No. 2, 161–178 (2000).
7. Priddy S. B. Koszul resolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **152**, No. 1, 39–60 (1970).
8. Посицельский Л. Е. Соотношение между рядами Грёбнера квадратично двойственных алгебр не влечет их кошулевости. *Функц. анализ и его прил.*, **29**, вып. 3, 83–87 (1995).
9. Roos J.-E. On the characterization of Koszul algebras. Four counter-examples. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **321**, No. 1, 15–20 (1995).
10. Пионтковский Д. И. О рядах Гильберта козюлевых алгебр. *Функц. анализ и его прил.*, **35**, вып. 2, 64–69 (2001).
11. Polishchuk A., Positselski L. Qudratic algebras. Preprint, 2000.
12. Говоров В. Е. О размерности градуированных алгебр. *Матем. заметки*, **14**, №2, 209–216 (1973).
13. Backelin J. A distributiveness property of augmented algebras, and some related homological results. Ph. D. thesis, Stockholm (1982).
14. Уфнаровский В. А. Алгебры, заданные двумя квадратичными соотношениями. Исследования по теории колец, алгебр и модулей, *Матем. исслед.*, **76**, 148–172 (1984).
15. Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре. В сб.: *Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления*, Т. 57, ВИНТИ, М., 1990, с. 5–177.
16. Davydov A. A. Totally positive sequences and R-matrix quadratic algebras. *J. Math. Sci. (New York)*, **100**, No. 1, 1871–1876 (2000).
17. Wambst M. Complexes de Koszul quantiques. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **43**, No. 4, 1089–1156 (1993).
18. Beilinson A., Ginzburg V., Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory. *J. Amer. Math. Soc.*, **9**, No. 2, 473–527 (1996).
19. Anick D. On the homology of associative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **296**, No. 2, 641–659 (1986).
20. Anick D. Generic algebras and CW-complexes. In: *Proc. of 1983 Conf. on algebra, topology and K-theory in honor of John Moore*. Princeton Univ., 1988, pp. 247–331.
21. Zhang J. J. Non-Noetherian regular rings of dimension 2. *Proc. Amer. Mat. Soc.*, **126**, No. 6, 1645–1653 (1998).
22. Пионтковский Д. И. Ряды Гильберта и соотношения в алгебрах. *Изв. РАН, сер. матем.*, **64**, №6, 205–219 (2000).
23. Пионтковский Д. И. Базисы Грёбнера и когерентность мономиальной ассоциативной алгебры. *Фундам. прикл. матем.*, **2**, №2, 501–509 (1996).
24. Иьуду Н. К. Разрешимость проблемы распознавания делителей нуля в одном классе алгебр. *Фундам. прикл. матем.*, **1**, №2, 541–544 (1995).
25. Пионтковский Д. И. Некоммутативные базисы Грёбнера, когерентность ассоциативных алгебр и делимость в полугруппах. *Фундам. прикл. матем.*, **7**, №2, 495–513 (2001).
26. Говоров В. Е. Размерность и кратность градуированных алгебр. *Сиб. матем. ж.*, **14**, 1200–1206 (1973).