Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панов, О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 84–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:50:45

Каждый элемент нижней части матрицы AJ сопряжен центрально симметричному элементу верхней части. Значит,

$$AJ = \begin{pmatrix} a_0 & \mathbf{0} & (n+1)\bar{a}_n & \mathbf{0} \\ 2a_1 & a_0 & n\bar{a}_{n-1} & (n+1)\bar{a}_n \\ \vdots & 2a_1 & \ddots & \vdots & n\bar{a}_{n-1} & \ddots \\ na_{n-1} & \vdots & \ddots & a_0 & 2\bar{a}_1 & \vdots & \ddots & (n+1)\bar{a}_n \\ (n+1)a_n & na_{n-1} & \dots & 2\bar{a}_1 & 2a_0 & 2\bar{a}_1 & \dots & n\bar{a}_{n-1} & (n+1)\bar{a}_n \\ & (n+1)a_n & \ddots & \vdots & 2a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & n\bar{a}_{n-1} \\ & & \ddots & n\bar{a}_{n-1} & \vdots & & \ddots & 2\bar{a}_1 & \vdots \\ & & & (n+1)\bar{a}_n & na_{n-1} & & & a_0 & 2a_1 \\ \mathbf{0} & & & (n+1)a_n & \mathbf{0} & & & a_0 & \end{pmatrix}.$$

Умножая AJ справа на M , мы заменяем средний столбец на $(0, \dots, 0, a_0, 2a_1, \dots, (n+1)a_n)^t$ и получаем матрицу с верхней строкой $(a_0, 0, \dots, 0)$, и дополнительный минор к a_0 — транспонированная матрица Сильвестра для результата многочленов $a_0 + 2a_1t + \dots + (n+1)a_nt^n$ и $(n+1)\bar{a}_n + n\bar{a}_{n-1}t + \dots + \bar{a}_0t^n$. Значит,

$$\det A \det J \det M = a_0 \operatorname{Res}_t(q', t^n \bar{q}'(t^{-1})).$$

Ясно, что $\det M = \frac{1}{2}$ и $A_{k,k} = a_0^{-k}$, а следовательно, $\det A = \prod A_{k,k}^2 = a_0^{-n(n+1)}$. Осталось заметить, что обращение порядка элементов ∂a_m в J меняет знак таким же образом, как и перестановка аргументов результата.

Я благодарю П. Этингофа и Н. Г. Кружилина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прилепко А. И. Потенциала теории обратные задачи. Математическая энциклопедия. Т. 4, Советская энциклопедия, 1984, с. 520–523.

Математический институт РАН
им. В. А. Стеклова

Поступило в редакцию
9 января 1998 г.

УДК 517.9

О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами*

© 1999. А. А. Панов

1. **Введение.** Основным объектом нашего изучения является уравнение вида

$$\dot{x} = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \quad t \in [0, 1], \quad a_i \in C^1. \quad (1)$$

Введем несколько стандартных обозначений. Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = h(x, t), \quad h \in C^1. \quad (2)$$

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 95-01-01258, CRDF RM1-229, INTAS 93-05-07.

Пусть $\varphi(x, t)$ — решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(x, 0) = x$. Обозначим через $P^T[h]$ отображение последования этого уравнения за время T , $P^T[h]: x \rightarrow \varphi(x, T)$; иногда вместо h ставится его явное выражение.

Можно поставить вопрос, сколько невырожденных периодических решений может иметь уравнение (1). Циклическим решением уравнения (1) будем называть решения, принимающие одинаковые значения в 0 и 1. Известно [1], что при $a_3(t) = a_2(t) \equiv 0$ уравнение (1) может иметь не более двух, при $a_3(t) \equiv 0$ — не более трех, а при $a_3(t) > 0$ — не более четырех невырожденных циклических решений. Однако Л. Нето [2] показал, что при общих $a_3(t)$ уравнение (1) может иметь сколь угодно большое число невырожденных циклических решений.

Конструкция Нето, позволяющая строить уравнения вида (1) со сколь угодно большим числом невырожденных циклических решений, состоит в следующем. Рассматривается уравнение вида $\dot{x} = a_2(t)x^2$, для которого отображение $P^1[a_2(t)y^2]$ тождественно на некотором малом отрезке G , содержащем 0. Далее уравнение возмущается с помощью добавки $\varepsilon a_3(t)x^3$, где ε мало, и показывается, что за счет выбора $a_3(t)$ можно получить сколь угодно много невырожденных циклических решений на отрезке G . Таким образом, видно, что в конструкции Нето отображение $P^1[\varepsilon a_3(t)y^3 + a_2(t)y^2]$ близко к тождественному. Нас будут интересовать свойства всевозможных отображений последования $P^1[a_3(t)y^3 + \dots + a_0(t)]$.

Оказывается, что множество функций последования уравнения (1) всюду плотно в множестве непрерывных монотонных функций.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого отрезка множество отображений последования уравнения (1) за время 1 всюду плотно в пространстве сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов этого отрезка на свой образ.*

СЛЕДСТВИЕ. *Уравнение вида (1) может иметь любое число циклических решений.*

Выражаю признательность Ю. С. Ильяшенко за постановку задач, регулярные консультации и всемерную поддержку. Также выражаю благодарность Д. А. Панову за многочисленные обсуждения этой работы.

2. Леммы о композициях одномерных отображений.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим уравнение вида*

$$\dot{x} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Тогда для любого отрезка множество отображений последования уравнения (3) за время 1 всюду плотно в пространстве сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов отрезка на свой образ.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть отображение последования $P^1[a_n y^n + \dots + a_0]$, $a_i \in \mathbb{R}$, уравнения (3) определено на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует уравнение вида (1), такое, что на отрезке $[a, b]$ отображения последования уравнений (1) и (2) за время 1 отличаются не более чем на ε .*

Теорема 1 следует из леммы 1 и теоремы 2.

ЛЕММА 2. *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = h(x).$$

Пусть заданы отрезки $[a, b]$ и $[a', b']$, такие, что $[a, b] \subset (a', b')$, и отображение последования $P^T[h]$ этого уравнения определено на отрезке $[a', b']$. Пусть

$\max_{t \in [0, T]} \varphi(b', t) = B$ и $\min_{t \in [0, T]} \varphi(a', t) = A$. Пусть, кроме того, существует семейство функций H_ε , определенных на отрезке $[A, B]$, такое, что на этом отрезке $|H_\varepsilon - P^\varepsilon[h]| < C\varepsilon^{3/2}$. Пусть $G_n = H_{1/n} \circ \dots \circ H_{1/n}$. Тогда G_n равномерно стремится к $P^T[h]$ на отрезке $[a, b]$.

ЛЕММА 3. Пусть $\dot{x} = g(x)$ и $\dot{x} = f(x)$ — векторные поля на $\mathbb{R}^1$ и $h = [f, g]$ — их коммутатор. Пусть отображения последования $P^1[g]$ и $P^1[f]$ определены на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$P^\varepsilon[f](x) \circ P^\varepsilon[g](x) \circ P^{-\varepsilon}[f](x) \circ P^{-\varepsilon}[g](x) = x + \varepsilon^2 h(x) + F(\varepsilon, x),$$

где $F(\varepsilon, x)$ есть $O(\varepsilon^3)$.

Доказательства лемм 1, 2 и 3 просты и здесь не приводятся.

3. Основная лемма.

ЛЕММА 4. Для любого n и любого отрезка $[A, B]$ существуют $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ и уравнение вида (1), такие, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ на отрезке $[A, B]$ отображения последования уравнения (1) и уравнения

$$\dot{x} = x^n \tag{4}$$

за время ε отличаются не более чем на $C\varepsilon^{3/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Основная идея леммы состоит в использовании следующего факта. Коммутатор $[x^n, x^2]$ равен $-(n-2)x^{n+1}$; таким образом, если $n > 2$, то, последовательно беря коммутаторы получившихся полей с квадратичным полем, мы можем получить в итоге любую степень x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4 проведем по индукции относительно степени n .

База индукции. Мы будем строить полином третьей степени с зависящими от времени коэффициентами так, чтобы на некотором отрезке $[A, B]$ отображение последования $P^\varepsilon[a_3(t)y^3 + \dots + a_0(t)]$ уравнения (1) приближало отображение последования $P^\varepsilon[y^4]$ уравнения (4) с точностью $\varepsilon^{3/2}$.

Для этого сначала определим $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ отображения последования уравнений (4) при $n = 2, 3, 4$ за время $16\sqrt{\varepsilon}$ были определены на отрезке $[A, B]$.

Теперь определим разрывное векторное поле $h(x, t)$. Для этого рассмотрим область $[A, B] \times [0, \varepsilon]$ и разобьем ее на четыре части R_1, R_2, R_3, R_4 ,

$$R_i = [A, B] \times [\tfrac{1}{4}(i-1)\varepsilon, \tfrac{1}{4}i\varepsilon], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть $h|R_i = h_i$, где

$$h_1(x, t) = 4x^3/\sqrt{\varepsilon}, \quad h_2(x, t) = 4x^2/\sqrt{\varepsilon}, \quad h_3(x, t) = -4x^3/\sqrt{\varepsilon}, \quad h_4(x, t) = -4x^2/\sqrt{\varepsilon}.$$

Кроме того, определим разрывное векторное поле $h^*(x, t)$. Для этого рассмотрим область $[A, B] \times [0, \sqrt{\varepsilon}]$ и разобьем ее на четыре части G_1, G_2, G_3, G_4 , где

$$G_i = [A, B] \times [\tfrac{1}{4}(i-1)\sqrt{\varepsilon}, \tfrac{1}{4}i\sqrt{\varepsilon}], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть $H^*|G_i = h_i^*$, где

$$h_1(x, t) = 4x^3, \quad h_2(x, t) = 4x^2, \quad h_3(x, t) = -4x^3, \quad h_4(x, t) = -4x^2.$$

Воспользовавшись тождеством $P^\varepsilon[h(y)] = P^{\sqrt{\varepsilon}}[\sqrt{\varepsilon}h(y)]$, мы получим, что отображение последования поля $h(x, t)$ за время ε совпадает с отображением последования за время $\sqrt{\varepsilon}$ поля $h^*(x, t)$.

Применяя лемму 3, получим, что в этом случае на отрезке $[A, B]$ отображение последования поля $h^*(x, t)$ за время $\sqrt{\varepsilon}$ задается формулой

$$P^{\sqrt{\varepsilon}}[h^*](x) = x + (\sqrt{\varepsilon}/4)^2[4x^3, 4x^2] + F_1(\varepsilon, x),$$

где $F_1(\varepsilon, x) < C_1\varepsilon^{3/2}$ на $[A, B]$ для малых ε .

Таким образом, отображение последования для поля $h(x, t)$ за время ε имеет вид

$$P^\varepsilon[h](x) = x + \varepsilon x^4 + F_1(\varepsilon, x).$$

Заметим также, что отображение последования уравнения $\dot{x} = x^4$ за время ε выражается формулой

$$P^\varepsilon[y^4](x) = x + \varepsilon x^4 + F_2(\varepsilon, x), \quad \text{где } F_2(\varepsilon, x) < C_2\varepsilon^2 \text{ на } [A, B] \text{ для малых } \varepsilon.$$

Теперь окончательно получаем, что на отрезке $[A, B]$

$$|P^\varepsilon[h](x) - P^\varepsilon[y^4](x)| < C_3\varepsilon^{3/2} \quad (5)$$

для достаточно малых ε , причем C_3 зависит только от $[A, B]$.

Для того чтобы завершить доказательство леммы для случая $n = 4$, заметим, что, несмотря на разрывность кубического поля $h(x, t)$, мы можем сгладить коэффициенты $a_i(t)$ так, чтобы поле стало гладким и неравенство (5) осталось в силе.

Шаг индукции. Итак, пусть мы умеем строить уравнение вида (1), отображение последования которого на заранее выбранном отрезке приближает отображение последования уравнения $\dot{x} = x^{n-1}$ за время ε с точностью $\varepsilon^{3/2}$. Пусть отображение последования за время T определено на отрезке $[a, b]$. Тогда по лемме 2 мы умеем строить уравнение вида (1), отображение последования которого приближает отображение последования уравнения $\dot{x} = x^{n-1}$ за время T с любой наперед заданной точностью.

Теперь, если мы повторим схему, использованную в доказательстве базы индукции, заменяя поле $\dot{x} = x^4$ на $\dot{x} = x^{n-1}$, то окончательно докажем лемму.

4. Доказательство теоремы о плотности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Итак, мы имеем полиномиальное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

причем отображение последования $P^1[a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0]$ этого уравнения определено на отрезке $[a, b]$. Выберем отрезок $[a', b']$, на котором также определено отображение последования и для которого выполняется условие $[a, b] \subset (a', b')$. Теперь найдем отрезок $[A, B]$ из условия леммы 2. В силу леммы 3 для любого достаточно малого ε существуют такие кубические поля $h_n(x)$, что отображение последования уравнения $\dot{x} = h_n(x)$ за время $\varepsilon/(n+1)$ на отрезке $[A-1, B+1]$ приближает отображение последования уравнения $\dot{x} = (n+1)a_n x^n$ с точностью $\varepsilon^{3/2}$, т.е.

$$|P^{\varepsilon/(n+1)}[h_n](x) - P^{\varepsilon/(n+1)}[(n+1)a_n y^n](x)| < C_4 \varepsilon^{3/2},$$

где C_4 зависит только от $[A, B]$ и n .

Теперь рассмотрим разрывное векторное поле $H_\varepsilon^*(x)$, равное в области $[A-1, B+1] \times [i\varepsilon/(n+1), (i+1)\varepsilon/(n+1)]$ полю $h_i(x)$, где $i = 1, \dots, n+1$. Тогда

получим, что на отрезке $[A, B]$ отображение последования уравнения $\dot{x} = H_\varepsilon^*(x)$ за время ε равняется

$$P^\varepsilon[H_\varepsilon^*](x) = x + \varepsilon a_n x^n + \cdots + \varepsilon a_0 + F_5(x, \varepsilon),$$

где $F_5(x, \varepsilon) < C_5 \varepsilon^{3/2}$, причем C_5 зависит только от $[A, B]$ и n . Таким образом, на отрезке $[A, B]$ имеем неравенство

$$|P^\varepsilon[H_\varepsilon^*](x) - P^\varepsilon[a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0]| < C_5 \varepsilon^{3/2}. \quad (6)$$

Итак, нам осталось только сгладить наше векторное поле $H_\varepsilon^*(x)$, как мы это уже делали раньше, при условии, что сохраняется неравенство (6). Применяя к получившемуся полю $H_\varepsilon(x)$ лемму 2, окончательно докажем теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пласс В. А.* ДАН СССР, **127**, № 5, 965–968 (1959). 2. *Neto A. L.* Invent. Math., **59**, No. 2, 67–76 (1980).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
23 мая 1997 г.
В переработанном виде
7 мая 1998 г.

УДК 513.6

Бирациональные автоморфизмы двойных накрытий Фано*

© 1999. А. В. Пухликов

1. В настоящей заметке установлена бирациональная сверхжесткость двойных гиперповерхностей Фано индекса один. Напомним [2], что гладкое многообразие Фано V называется *бirationально сверхжестким*, если для любого бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V'$ на унилинейчатое многообразие той же размерности и линейной системы дивизоров Σ' на V' без неподвижных компонент выполнено условие монотонности $c(D, V) \leq c(D', V')$, где $D' \in \Sigma'$, $D \in \Sigma = (\chi^{-1})_* \Sigma'$, т. е. Σ (собственный прообраз системы Σ' относительно χ) — линейная система дивизоров на V без неподвижных компонент, а $c(Y, X)$ для неособого в коразмерности 1 многообразия X и дивизора Вейля Y на нем обозначает *порог канонического присоединения*,

$$c(Y, X) = \sup\{b/a \mid b \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, |aY + bK_X| \neq \emptyset\}.$$

Зафиксируем целые числа $M \geq 4$, $m \geq 3$ и $l \geq 1$, удовлетворяющие равенству $m + l = M + 1$. Символом $\mathbb{P}$ обозначим проективное пространство $\mathbb{P}^{M+1}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $Q = Q_m \subset \mathbb{P}$ и $W^* = W_{2l}^* \subset \mathbb{P}$ — гиперповерхности степеней m и $2l$ соответственно, а $\sigma: V \rightarrow Q$ — двойное накрытие, разветвленное над $W = W^* \cap Q$. Многообразие V есть многообразие Фано размерности M с группой Пикара $\mathbb{Z}K_V$. Наш основной результат — следующая

* Работа выполнена при поддержке гранта 99-15-96013 поддержки исследований молодых российских ученых-докторов наук.