Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональные автоморфизмы
двойных накрытий Фано, *Функц. анализ и его
прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 88–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:06:02

получим, что на отрезке $[A, B]$ отображение последования уравнения $\dot{x} = H_\varepsilon^*(x)$ за время ε равняется

$$P^\varepsilon[H_\varepsilon^*](x) = x + \varepsilon a_n x^n + \cdots + \varepsilon a_0 + F_5(x, \varepsilon),$$

где $F_5(x, \varepsilon) < C_5 \varepsilon^{3/2}$, причем C_5 зависит только от $[A, B]$ и n . Таким образом, на отрезке $[A, B]$ имеем неравенство

$$|P^\varepsilon[H_\varepsilon^*](x) - P^\varepsilon[a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0]| < C_5 \varepsilon^{3/2}. \quad (6)$$

Итак, нам осталось только сгладить наше векторное поле $H_\varepsilon^*(x)$, как мы это уже делали раньше, при условии, что сохраняется неравенство (6). Применяя к получившемуся полю $H_\varepsilon(x)$ лемму 2, окончательно докажем теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пласс В. А.* ДАН СССР, **127**, № 5, 965–968 (1959). 2. *Neto A. L.* Invent. Math., **59**, No. 2, 67–76 (1980).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
23 мая 1997 г.
В переработанном виде
7 мая 1998 г.

УДК 513.6

Бирациональные автоморфизмы двойных накрытий Фано*

© 1999. А. В. Пухликов

1. В настоящей заметке установлена бирациональная сверхжесткость двойных гиперповерхностей Фано индекса один. Напомним [2], что гладкое многообразие Фано V называется *бirationально сверхжестким*, если для любого бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V'$ на унилинейчатое многообразие той же размерности и линейной системы дивизоров Σ' на V' без неподвижных компонент выполнено условие монотонности $c(D, V) \leq c(D', V')$, где $D' \in \Sigma'$, $D \in \Sigma = (\chi^{-1})_* \Sigma'$, т. е. Σ (собственный прообраз системы Σ' относительно χ) — линейная система дивизоров на V без неподвижных компонент, а $c(Y, X)$ для неособого в коразмерности 1 многообразия X и дивизора Вейля Y на нем обозначает *порог канонического присоединения*,

$$c(Y, X) = \sup\{b/a \mid b \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, |aY + bK_X| \neq \emptyset\}.$$

Зафиксируем целые числа $M \geq 4$, $m \geq 3$ и $l \geq 1$, удовлетворяющие равенству $m + l = M + 1$. Символом $\mathbb{P}$ обозначим проективное пространство $\mathbb{P}^{M+1}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $Q = Q_m \subset \mathbb{P}$ и $W^* = W_{2l}^* \subset \mathbb{P}$ — гиперповерхности степеней m и $2l$ соответственно, а $\sigma: V \rightarrow Q$ — двойное накрытие, разветвленное над $W = W^* \cap Q$. Многообразие V есть многообразие Фано размерности M с группой Пикара $\mathbb{Z}K_V$. Наш основной результат — следующая

* Работа выполнена при поддержке гранта 99-15-96013 поддержки исследований молодых российских ученых-докторов наук.

ТЕОРЕМА. *Общее многообразие V является бирационально сверхжестким.*

Здесь общность понимается как общность гиперповерхностей Q и W^* в смысле топологии Зарисского.

СЛЕДСТВИЕ. (i) *Общее многообразие V не имеет нетривиальных структур Фано-расслоения и, более того, не может быть расслоено рациональным отображением на унилинейчатые многообразия.*

(ii) *Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают: $\text{Bir } V = \text{Aut } V$.*

(iii) *Многообразие V не рационально.*

2. Доказательство теоремы проводится методом максимальных особенностей, начало которому положила работа В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерных квартиках [1], в сочетании с техникой гиперкасательных систем, введенной в [2]. Метод максимальных особенностей нами используется в следующей форме.

Пусть X — гладкое многообразие Фано с $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X$. Степенью цикла $Y \subset X$ чистой размерности k назовем число $\deg Y = (-1)^k(Y \cdot K_X^k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Допустим, что многообразие X удовлетворяет следующим двум условиям:*

(i) *для любого неприводимого цикла $Y \subset X$ коразмерности 2 и линейной системы дивизоров $\Sigma \subset |-nK_X|$, свободной от неподвижных компонент, имеет место неравенство*

$$\text{mult}_Y \Sigma \leq n;$$

(ii) *для любого неприводимого цикла Y коразмерности 2 и любой точки $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\text{mult}_x Y \leq \frac{4}{\deg X} \deg Y.$$

Тогда X — бирационально сверхжесткое многообразие Фано.

Доказательство см. в [2].

В размерности ≥ 5 условие (i) для двойного накрытия V выполнено в силу теоремы Лефшеца. В размерности 4 это условие проверяется непосредственно.

3. Основная компонента доказательства нашей теоремы — проверка условия (ii). Она осуществляется методом гиперкасательных систем [2]. В его основе лежит следующее наблюдение. Пусть $f = q_1 + \dots + q_m = 0$ — уравнение гиперповерхности Q , $g = 1 + w_1 + \dots + w_{2l} = 0$ — уравнение гиперповерхности W^* относительно системы аффинных координат $(z_1, \dots, z_{M+1})$ с центром в точке $p \in Q \setminus W$. Тогда V есть локально полное пересечение коразмерности 2 в $\mathbb{A}_{(z_1, \dots, z_{M+1}, y)}^{M+2}$, заданное парой уравнений $f = 0$, $y^2 = g$. Пусть $x \in \sigma^{-1}(p)$ — точка, такая, что $y(x) = 1$. Рассмотрим формальный ряд $\sqrt{g} = (1 + w_1 + \dots + w_{2l})^{1/2}$ от переменных z_* , и пусть $[\sqrt{g}]_k$ — его начальный отрезок длины k . Многочлены $f_k = q_1 + \dots + q_k$, $1 \leq k \leq m$, и $(y - [\sqrt{g}]_k)$, $l \leq k \leq 2l - 2$, задают элементы линейных систем $|-kK_V|$, имеющие кратность $\geq k+1$ в точке x . Для общего двойного накрытия точка x является изолированной общей точкой этих дивизоров (именно здесь нам нужно условие общности). Пересекая Y с этими дивизорами, получим кривую $C \subset V$, удовлетворяющую

неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} C \geq \frac{\text{mult}_x}{\deg} Y \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{m}{m-1} \cdot \frac{l+1}{l} \cdots \frac{2l-1}{2l-2}.$$

Но отношение $(\text{mult}_x/\deg)(\cdot)$ не превосходит единицы, откуда и следует (ii). Это завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исковских В. А., Манин Ю. И. Матем. сб., **86**, № 1, 140–166 (1971). 2. Pukhlikov A. V. Invent. Math., **134**, No. 2, 401–426 (1998).

Институт системного анализа РАН

Поступило в редакцию
29 июля 1999 г.

УДК 517.94

Об одном классе полугрупп

© 1999. Ю. Т. Сильченко

1. Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$v' + Av = f(t) \quad (0 < t \leq 1), \quad v(0) = v_0 \quad (1)$$

в банаховом пространстве E . Здесь A — заданный линейный оператор с областью определения $D \subset E$, $f(t)$ — заданная непрерывная при $t > 0$ функция со значениями в E и v_0 — заданный элемент из E .

Эта задача изучалась многими авторами (см. [1, 2] и имеющуюся там библиографию) и исследовалась полугрупповыми методами. При этом, как правило, использовались сильно непрерывные и аналитические полугруппы. Оператор A для таких полугрупп оказывается плотно заданным, и для его резольвенты $(A + \lambda I)^{-1}$ в случае аналитической полугруппы в некоторой полуплоскости $\text{Re } \lambda > w > 0$ комплексной плоскости выполнена оценка

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-r} \quad (2)$$

с $r = 1$.

Однако в приложениях встречается иная ситуация — оператор A может иметь не плотную в E область определения и его резольвента может допускать худшую оценку убывания ($r < 1$). Так, в [3] приводится пример оператора дифференцирования $A = (-1)^k d^{2n}/dx^{2n}$ в пространстве $L_p(0, 1)$ с нерегулярными граничными условиями. В этом случае D не обязательно является плотным в L_p множеством, в оценке (2) может быть $r < 1$, а соответствующая полугруппа может иметь в нуле особенность.

В данной заметке приводятся другие примеры неплотно заданных операторов A и отвечающих им полугрупп $U(t)$. При этом используется класс полугрупп $A(\alpha, \beta)$, введенный в [3]. Эти полугруппы и их производные допускают оценки

$$\|U(t)\| \leq Mt^{-\alpha}e^{-wt}, \quad \|U'(t)\| \leq Mt^{-\beta}e^{-wt} \quad (3)$$