Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Т. Сильченко, Об одном классе полугрупп,
Функц. анализ и его прил., 1999, том 33, вы-
пуск 4, 90–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:26:10

неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} C \geq \frac{\text{mult}_x}{\deg} Y \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{m}{m-1} \cdot \frac{l+1}{l} \cdots \frac{2l-1}{2l-2}.$$

Но отношение $(\text{mult}_x/\deg)(\cdot)$ не превосходит единицы, откуда и следует (ii). Это завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исковских В. А., Манин Ю. И. Матем. сб., **86**, № 1, 140–166 (1971). 2. Pukhlikov A. V. Invent. Math., **134**, No. 2, 401–426 (1998).

Институт системного анализа РАН

Поступило в редакцию
29 июля 1999 г.

УДК 517.94

Об одном классе полугрупп

© 1999. Ю. Т. Сильченко

1. Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$v' + Av = f(t) \quad (0 < t \leq 1), \quad v(0) = v_0 \quad (1)$$

в банаховом пространстве E . Здесь A — заданный линейный оператор с областью определения $D \subset E$, $f(t)$ — заданная непрерывная при $t > 0$ функция со значениями в E и v_0 — заданный элемент из E .

Эта задача изучалась многими авторами (см. [1, 2] и имеющуюся там библиографию) и исследовалась полугрупповыми методами. При этом, как правило, использовались сильно непрерывные и аналитические полугруппы. Оператор A для таких полугрупп оказывается плотно заданным, и для его резольвенты $(A + \lambda I)^{-1}$ в случае аналитической полугруппы в некоторой полуплоскости $\text{Re } \lambda > w > 0$ комплексной плоскости выполнена оценка

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-r} \quad (2)$$

с $r = 1$.

Однако в приложениях встречается иная ситуация — оператор A может иметь не плотную в E область определения и его резольвента может допускать худшую оценку убывания ($r < 1$). Так, в [3] приводится пример оператора дифференцирования $A = (-1)^k d^{2n}/dx^{2n}$ в пространстве $L_p(0, 1)$ с нерегулярными граничными условиями. В этом случае D не обязательно является плотным в L_p множеством, в оценке (2) может быть $r < 1$, а соответствующая полугруппа может иметь в нуле особенность.

В данной заметке приводятся другие примеры неплотно заданных операторов A и отвечающих им полугрупп $U(t)$. При этом используется класс полугрупп $A(\alpha, \beta)$, введенный в [3]. Эти полугруппы и их производные допускают оценки

$$\|U(t)\| \leq Mt^{-\alpha}e^{-wt}, \quad \|U'(t)\| \leq Mt^{-\beta}e^{-wt} \quad (3)$$

при некоторых $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$, $w > 0$, причем β не связано жестким образом с α . Это отличает указанный класс полугрупп от изучавшихся ранее классов (см., например, работы [1, 4, 5]). В заметке приводятся некоторые свойства таких полугрупп, изучаются дробные степени оператора A и, наконец, рассматривается задача (1) и приводится теорема ее разрешимости. Отметим, что в этой теореме параметр β может быть любым числом, лишь удовлетворяющим условию $\beta \geq 1 + \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Это отличает данную теорему от соответствующего результата из [3], где рассмотрен более общий случай переменного операторного коэффициента $A = A(t)$, но $\beta < 2$.

2. Приведем примеры полугрупп класса $A(\alpha, \beta)$.

1) Пусть оператор A действует в пространстве $L_2(-\infty, +\infty) \times L_2(-\infty, +\infty)$ и задан формулой

$$Av = \{-\mathcal{D}^2 v_1 - i\mathcal{D}^k v_1, -\mathcal{D}^l v_1 - \mathcal{D}^2 v_2 - i\mathcal{D}^k v_2\},$$

где $\mathcal{D} = i d/dx$, $v = \{v_1, v_2\}$, $k \geq 2$, $l \geq 2$. Такой оператор порождает систему дифференциальных уравнений, параболическую по Г. Е. Шилову [1]. Если к обеим частям системы применить преобразование Фурье по x и обозначить образ функции $v(t, x)$ через $\bar{v}(t, p)$, то мы придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + A(p)\bar{v} = 0, \quad \text{где } A(p) = \begin{pmatrix} p^2 - ip^k & 0 \\ -p^l & p^2 - ip^k \end{pmatrix}.$$

При этом

$$U(t, p) = \begin{pmatrix} e^{(ip^k - p^2)t} & 0 \\ tp^l e^{(ip^k - p^2)t} & e^{(ip^k - p^2)t} \end{pmatrix}$$

является полугруппой класса $A(l/2 - 1, (l+k)/2 - 1)$, так как $|p^l e^{-tp^2}| \leq ct^{-l/2}$.

2) Пусть E — множество последовательностей $v = \{x_n, y_n\}_1^\infty$, для которых конечна норма $\|v\| = \sum_{n=1}^\infty (n^{1/2}|x_n| + |y_n|)$, и $L = \{v \in E : x_1 = y_1 = 0\}$ — подпространство в E . Положим

$$U(t)v = \{0, 0; (x_n \cos nt - y_n \sin nt)e^{in^p t - nt}, (x_n \sin nt + y_n \cos nt)e^{in^p t - nt}\}_2^\infty.$$

Эта оператор-функция является полугруппой класса $A(1/2, 1/2 + p)$ при любом $p \geq 1$. При этом в оценке (2) $r = 2 - 3/(2p)$ при $p < 3/2$ и $r = 1$ при $p \geq 3/2$.

3) Пусть $E = L_1(0 + \infty) \cap L_p(0, +\infty)$ с нормой $\|v\| = \|v\|_{L_1} + \|v\|_{L_p}$ и A — оператор дифференцирования, $A = -d^2/dx^2$, с областью определения $D(A) = \{v(x) \in E, \text{ существует } v'' \in E \text{ и } \int_0^\infty v(x) dx = 0\}$. Тогда полугруппа, порожденная этим оператором, задается формулой

$$U(t)\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty [e^{-(s+x)^2/4t} + e^{-(s-x)^2/4t}] \varphi(s) ds - \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(s) ds,$$

она принадлежит классу $A(1/2 - 1/(2p), 3/2 - 1/(2p))$ и в (2) показатель убывания резольвенты r равен $1/2 + 1/(2p)$.

Отметим, что в примерах 1)–2) параметры α и β и α и r не связаны между собой какими-либо равенствами, а в примерах 2)–3) области определения операторов не являются плотными множествами в E . Поэтому в дальнейшем не используются свойства резольвенты оператора A , а параметры α и β не связаны какими-либо равенствами.

3. Оценки (3) позволяют строить отрицательные дробные степени оператора A . Пусть существует ограниченный обратный оператор A^{-1} . Обозначим через $D(A^{-\rho})$ множество элементов $v \in E$, для которых несобственно сходится интеграл $\int_0^\infty s^{\rho-1} U(s)v ds$ ($\rho > 0$). Для таких v положим

$$A^{-\rho}v = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty s^{\rho-1} U(s)v ds.$$

Из этого определения легко следует непрерывное вложение $D \subset D(A^{-\rho})$. Если $\rho > \alpha$, то $D(A^{-\rho}) = E$ и операторы $A^{-\rho}$ ограничены. При $\rho < \alpha$, как показывает пример из [1], эти операторы могут быть неограниченными.

Установим некоторые свойства дробных степеней.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

- (a) $A^{-p}A^{-q} = A^{-(p+q)}$, $p > 0$, $q > \alpha$;
- (b) $A^{-p}A^{-q} = A^{-q}A^{-p} = A^{-(p+q)}$, $p, q > \alpha$;
- (c) $A^{-p}A^{-q}v = A^{-(p+q)}v = A^{-q}A^{-p}v$, $p > \alpha$, $q > 0$, $v \in D(A^{-q})$.

Доказательство этих свойств следует из равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\varepsilon^\infty \tau^{p-1} U(\tau) \left\{ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\delta^\infty s^{q-1} U(s)v ds \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_{\varepsilon+\delta}^\infty \left\{ \int_{\varepsilon/\delta}^{1-\delta/\sigma} s^{p-1} (1-s)^{q-1} ds \right\} \sigma^{p+q-1} U(\sigma)v d\sigma, \end{aligned}$$

в котором нужно перейти к пределу сначала при $\sigma \rightarrow +0$, а затем при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Положительные дробные степени оператора A определяются обычным образом [1] как обратные операторы к отрицательным дробным степеням, $A^\rho = (A^{-\rho})^{-1}$.

ЛЕММА 2. *Имеют место неравенства моментов*

$$\begin{aligned} \|A^{-\rho}v\| &\leq C \|A^{-1}v\|^{\rho-\alpha} \|v\|^{1+\alpha-\rho}, \quad \text{если } \rho \in (\alpha, 1], \\ \|A^\rho v\| &\leq C \|Av\|^{\rho+\alpha} \|v\|^{1-\rho-\alpha}, \quad \text{если } \rho \in (0, 1-\alpha), v \in D. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\rho > \alpha$ оператор $A^{-\rho}$ ограничен и

$$\begin{aligned} \|A^{-\rho}v\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^N s^{\rho-1} \|U(s)\| \|v\| ds + \frac{1}{\Gamma(\rho)} \left\| \int_N^\infty s^{\rho-1} AU(s)A^{-1}v ds \right\| \\ &\leq C_1 N^{\rho-\alpha} \|v\| + C_2 N^{\rho-\alpha-1} \|A^{-1}v\|. \end{aligned}$$

Минимизируя последнее выражение по $N > 0$, получим первое неравенство. Положив в нем $v_1 = A^{-1}v$ и воспользовавшись леммой 1, получим второе неравенство.

ЛЕММА 3. *Справедливо неравенство*

$$\|A^\rho U(t)\| \leq Ct^{-\beta\rho-\alpha(1-\rho)-\delta} e^{-wt}, \quad \rho \in (0, 1).$$

Здесь $\delta > 0$, если $\beta > 1 + \alpha$, и $\delta = 0$, если $\beta = 1 + \alpha$.

ЛЕММА 4. *Справедливы предельные соотношения*

- (a) $\lim_{t \rightarrow +0} U(t)A^{-\rho} = A^{-\rho}$ при $\rho > \min \left\{ 2\alpha, \frac{\beta-1}{\beta-\alpha} \right\}$;

(b) если $\overline{D} = E$, то $\lim_{t \rightarrow +0} U(t)A^{-\rho} = A^{-\rho}$ при $\rho > \alpha$.

Доказательство лемм 3 и 4 приведено в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\rho \leq \alpha$ выражение $[U(t) - I]A^{-\rho}$ может не стремиться к нулю. Об этом говорит пример 1 разд. 2.

4. Обратимся к задаче (1). Под ее решением понимается непрерывная при $t \geq 0$ функция $v = v(t)$, для которой существуют и непрерывны при $t > 0$ функции $v'(t)$, $Av(t)$ и выполнены соотношения (1). Такое решение в [1] называется «ослабленным». Рассмотрим однородную задачу

$$v' + Av = 0 \quad (t > 0), \quad v(0) = v_0. \quad (4)$$

Если существует полугруппа $U(t)$ класса $A(\alpha, \beta)$, порожденная оператором A , то решение задачи (4) дается формулой $v(t) = U(t)v_0$, при условии, что $v_0 \in D(A^\rho)$, где ρ такое же, как в лемме 4, и в общем случае это ρ улучшить нельзя. Отметим также, что здесь нет ограничений на параметры α и β .

Перейдем к неоднородной задаче (1). Ее решение имеет вид

$$v(t) = U(t)v_0 + g(t),$$

где $g(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)ds$ — частное решение неоднородного уравнения (1). Свойства функции $g(t)$ исследованы в [4]. Отметим, что условие $\beta < 2$ возникло в [3] при построении разрешающего оператора задачи с переменным операторным коэффициентом. В случае постоянного оператора это условие отсутствует. Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) существует ограниченный обратный оператор A^{-1} ;
- (2) существует полугруппа $U(t)$ класса $A(\alpha, \beta)$ при некоторых $w > 0$, $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha + 1 \leq \beta$;
- (3) $\|f(t + \Delta t) - f(t)\| \leq Ct^{-\mu}|\Delta t|^\varepsilon$ при некоторых $\varepsilon \in ((\beta - 1)/(\beta - \alpha), 1]$, $\mu \in [0, 1]$;
- (4) $v_0 \in D(A^\rho)$ при некотором $\rho \in (\min\{2\alpha, (\beta - 1)/(\beta - \alpha)\}, 1]$; если $\overline{D} = E$, то $v_0 \in D(A^\rho)$ при $\rho \in (\alpha, 1]$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение $v(t)$, которое задается формулой

$$v(t) = U(t)v_0 + \int_0^t U(t-s)f(s)ds.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука, М., 1967. 2. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. В кн.: Математический анализ, Итоги науки и техники, Т. 21, ВИНТИ, М., 1983, с. 139–264. 3. Сильченко Ю. Т., Соболевский П. Е. Сиб. матем. ж., **27**, № 4, 93–104 (1986). 4. Соболевский П. Е. ДАН СССР, **196**, № 3, 535–537 (1971). 5. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. ЭЛМ, Баку, 1985.

Воронежский госуниверситет,
математический факультет

Поступило в редакцию
9 апреля 1997 г.
В переработанном виде
30 марта 1998 г.