Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Закалюкин, О. М. Мясниченко, Лагранжевы особенности при симплектической редукции, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 1–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:57:53

УДК 514.853

Лагранжевы особенности при симплектической редукции*

© 1998. В. М. ЗАКАЛЮКИН, О. М. МЯСНИЧЕНКО

Введение

Лагранжевы многообразия с особенностями встречаются во многих задачах анализа. Впервые интересный класс таких многообразий (раскрытые ласточкины хвосты) возник в вариационной задаче с односторонними ограничениями (задаче об обходе препятствия) [1]. Волновые фронты простых устойчивых лагранжевых проектирований раскрытых ласточкиных хвостов тесно связаны с дискриминантами коксетеровских групп, порожденных отражениями [2, 3].

Решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с начальными условиями, образующими изотропное подмногообразие гиперповерхности уровня гамильтониана, приводят к другим классам особых лагранжевых многообразий — раскрытым зонтикам Уитни [4, 3].

В этих примерах особые лагранжевы многообразия порождаются (иногда с дополнительными компонентами) неморсовскими производящими семействами, т.е. являются образами при симплектической редукции неособого лагранжева подмногообразия большей размерности относительно нетрансверсальной ему гиперповерхности. Условия нетрансверсальности в этих ситуациях весьма специфичны — пересечение лагранжева и коизотропного подмногообразий содержит неособое изотропное подмногообразие, имеющее коразмерность 1 в лагранжевом. Раскрытые ласточкины хвосты и зонтики Уитни имеют (за исключением случая минимальных размерностей) неизолированные особенности.

Естественной группой эквивалентностей в таких задачах является группа симплектоморфизмов, сохраняющих некоторое лагранжево расслоение (например, кокасательное). При этом устойчивость таких особенностей рассматривается в классе лагранжевых вложений заданного особого подмногообразия.

Общие конструкции, позволяющие получать устойчивые простые (т.е. не содержащие непрерывных инвариантов) ростки лагранжевых проектирований для такой группы, описаны в [5].

В настоящей работе мы классифицируем простые лагранжевы ростки, получаемые в результате произвольной симплектической редукции, с точностью до действия большей группы — группы всех симплектоморфизмов.

Отметим, что похожая задача об особенностях симплектической редукции

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 96-01-00710 и ИНТАС 96-0713.

(правда, для группы симплектоморфизмов, сохраняющих расслоение) рассмотрена в [6].

Наш список простых классов весьма поучителен — появляется еще одна новая связь простых алгебр Ли A, B, C, D, E, F с лагранжевыми особенностями.

Простейшую особенность, отвечающую морсовской нетрансверсальности, мы рассматриваем более подробно. Ее устойчивость доказана по отношению к меньшей группе, состоящей из симплектоморфизмов, сохраняющих расслоение объемлющего симплектического пространства, одним из слоев которого является заданная гиперповерхность.

Эта особенность используется для оценки числа траекторий натуральной механической системы, стартующих с заданного подмногообразия конфигурационного пространства и выходящих на границу области возможных движений.

Определения и результаты

Рассмотрим пару (L^n, C^{2n-k}) , состоящую из ростков в нуле лагранжева подмногообразия L и коизотропного подмногообразия C стандартного симплектического пространства $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Две такие пары назовем *эквивалентными*, если одна переводится в другую некоторым локальным симплектоморфизмом окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

Паре (L, C) отвечает росток редуцированного лагранжева подмногообразия (вообще говоря, особого) $\rho(L, C)$ в симплектической базе расслоения многообразия C на характеристические слои (на которых симплектическая форма является нулевой).

Пара называется *простой*, если ростки L и C имеют такие представители, ростки малых деформаций которых во всякой точке задают пары, эквивалентные одной из конечного списка нормальных форм.

Хорошо известно [7], что если L^n трансверсально в нуле ростку многообразия C^{2n-k} , то пересечение $L \cap C$ трансверсально характеристическому слоению многообразия C и $\rho(L, C)$ — неособое лагранжево подмногообразие. Все такие пары эквивалентны между собой.

Надстройкой ранга t пары (L, C) назовем пару $(L \times X, C \times Y)$ в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2m}$, снабженном симплектической формой, равной сумме стандартных симплектических форм на сомножителях, поднятых на произведение с помощью соответствующих проекций. Здесь X и Y — трансверсальные между собой лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{R}^{2m}$. Очевидно, что все надстройки данного ранга эквивалентных пар эквивалентны между собой.

Всякая нетрансверсальная пара эквивалентна надстройке (*касательной*) пары, для которой лагранжево подмногообразие касается коизотропного. В этом последнем случае существуют координаты Дарбу (p, q) с началом в рассматриваемой точке, в которых C задается уравнениями $p_1 = \dots = p_k = 0$ и росток L задается некоторой производящей функцией $S(q)$,

$$L = \left\{ (p, q) \mid p = \frac{\partial S}{\partial q} \right\},$$

принадлежащей кубу максимального идеала $\mathfrak{m}_q$ в кольце ростков в нуле функций от q . Такие координаты Дарбу будем называть *приспособленными*, а такую производящую функцию S — *приведенной*.

Приспособленные координаты (а следовательно, и приведенная производящая функция) определяются ростком пары неоднозначно.

Выбор таких координат Дарбу равносильно выбору ростка симплектоморфизма, переводящего росток многообразия C в росток координатного коизотропного подпространства и касательное пространство к L в нуле в координатное лагранжево подпространство $p = 0$.

Таким образом, множества приведенных производящих функций у эквивалентных пар совпадают.

Обозначим через G_k группу ростков в нуле симплектоморфизмов стандартного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющих коизотропное подпространство $C_0 = \{p_1 = \dots = p_k = 0\}$ и касательное пространство в нуле к лагранжеву подмногообразию $L_0 = \{p = 0\}$, а через G_k^+ — ее подгруппу, элементы которой сохраняют ориентацию пространства C_0 . Заметим, что G_k изоморфна полупрямому произведению подгруппы G_k^+ и группы $\mathbb{Z}_2$, порожденной отражением

$$I: (p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto (-p_1, p_2, \dots, p_n, -q_1, q_2, \dots, q_n),$$

меняющим ориентацию подпространства C_0 .

Итак, классификация эквивалентных пар с точностью до надстройки сводится к классификации приведенных производящих функций относительно действия G_k на графиках их градиентов.

Пусть $k < n$. Обозначим через $Q(z_1, \dots, z_k)$ невырожденную квадратичную форму $Q = \pm z_1^2 \pm \dots \pm z_k^2$.

ТЕОРЕМА 1. (i) *Всякий простой росток эквивалентен надстройке над ростком пары (L^n, C^{2n-1}) , в которой C^{2n-1} — гиперповерхность.*

(ii) *Всякий простой росток (L^n, C^{2n-1}) нетрансверсального пересечения L и C эквивалентен ростку пары (L_S^n, C_0^{2n-1}) , заданному в координатах Дарбу $(y, p_1, \dots, p_{n-1}; x, q_1, \dots, q_{n-1})$, $\omega = dy \wedge dx + \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i$, гиперповерхностью $C_0 = \{y = 0\}$ и лагранжевым подмногообразием L_S , имеющим производящую функцию $S(x, q_1, \dots, q_{n-1})$ одного из следующих видов:*

1) $S = x^3 + xf(q)$, где $f(q) \in \mathfrak{m}_q^2$ — одна из простых особенностей функций

$$A_k: k \geq 2, f(q) = \pm q_1^{k+1} + Q(q_2, \dots, q_{n-1})$$

(при нечетном k особенности со знаками $\pm$ эквивалентны),

$$D_{k+1}: k \geq 3, f(q) = q_1^2 q_2 \pm q_2^k + Q(q_3, \dots, q_{n-1}),$$

$$E_6: f(q) = q_1^3 \pm q_2^4 + Q(q_3, \dots, q_{n-1}),$$

$$E_7: f(q) = q_1^3 + q_1 q_2^3 + Q(q_3, \dots, q_{n-1}),$$

$$E_8: f(q) = q_1^3 + q_2^5 + Q(q_3, \dots, q_{n-1}),$$

2) $C_k: k \geq 2, S = x^{2k+1} + x^2 q_1 + xQ(q_2, \dots, q_{n-1}),$

3) $B_k: k \geq 2, S = x^3 q_2 + x^2 q_1 + x(\pm q_2^k + Q(q_3, \dots, q_{n-1})),$

4) $F_4: S = x^5 + x^2 q_1 + x(q_2^3 + Q(q_3, \dots, q_{n-1})),$

5) $U_3: S = \pm x^4 + xQ(q_1, \dots, q_{n-1}).$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1. Классы C_k , F_4 имеют другую эквивалентную форму (при $n > 2$): $S = x^3 q_2 + x^2 q_1 + xf$, где f — соответствующая простая краевая особенность функции от $q_2, \dots, q_{n-1}$ с краем $q_2 = 0$. В частности, B_2 эквивалентно C_2 .

2. Таблица примыканий отличается от известной для краевых особенностей лишь примыканием $U_3 \rightarrow B_2$.

Для особенности A_1 пары справедливо более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (симплектическая лемма Морса). Пусть $h: (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток регулярной функции и $(L, 0)$ — такой росток в нуле лагранжева подмногообразия, что ограничение h на L имеет в нуле невырожденную (морсовскую) критическую точку. Пусть выполнено следующее условие общности положения: характеристическое направление гиперповерхности $h = 0$ не принадлежит касательному конусу к пересечению $L \cap \{h = 0\}$.

Тогда симплектоморфизмом некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{2n}$ и гладкой заменой в пространстве-образе функции h росток в нуле пары L и h приводится к паре, состоящей из функции $h = y$ и лагранжева многообразия, имеющего производящую функцию $S = x^3 + x(\pm q_1^2 \pm \dots \pm q_{n-1}^2)$ в некоторых координатах Дарбу $y, p_1, \dots, p_{n-1}, x, q_1, \dots, q_{n-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если гиперповерхность уровня $h = 0$ общим образом касается в нуле лагранжева многообразия L^n , то в семействе редуцированных лагранжевых подмногообразий $l_c = \rho(L, \{h = c\})$, лежащих в симплектических многообразиях характеристик гиперповерхностей $h = c$, при прохождении значения c через 0 рождается или умирает одна точка трансверсального самопересечения.

Пусть на (конфигурационном) многообразии M^n задана натуральная механическая (гамильтонова) система. То есть заданы кинетическая энергия $T: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, являющаяся положительно определенной квадратичной формой на слоях, и потенциальная энергия $\Pi: M \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть при всяком значении гамильтониана $h = T + \Pi$ из некоторого интервала пространство характеристик (траекторий) системы изоморфно некоторому гладкому симплектическому многообразию.

Рассмотрим траектории системы, начальные условия которых принадлежат лагранжеву подмногообразию ковекторов T^*M , обращающихся в нуль на касательных пространствах к заданному гладкому стартовому подмногообразию $\tilde{M}$ общего положения в конфигурационном пространстве.

СЛЕДСТВИЕ 2. Четность числа траекторий, достигающих границы области возможности движения (т. е. пересечения гиперповерхности уровня гамильтониана с нулевым сечением кокасательного расслоения), равна четности числа критических точек ограничения функции Π на $\tilde{M}$.

Доказательство следствия 2 вытекает из теоремы 2 и свойства обратимости натуральных механических систем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простые пары в случае, когда $k = n$, т. е. C — лагранжево подмногообразие, описываются известной теоремой Голубицкого–Гийемина о контакте лагранжевых подмногообразий. Простые особенности здесь отвечают особенностям A, D, E производящих функций (см. также замечание 3 ниже).

Доказательства

Нам потребуются следующие элементарные свойства рассматриваемой группы преобразований.

ЛЕММА 1. *Симплектоморфизм φ из G_k^+ можно соединить гладкой гомотопией в G_k^+ с тождественным преобразованием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейные части φ_* в нуле симплектоморфизмов φ из G_k^+ , сохраняющих C_0 и L_0 , образуют, как легко видеть, связную подгруппу Λ_k симплектической линейной группы. Симплектоморфизм же $\tilde{\varphi} = (\varphi_*^{-1})\varphi$ имеет в нуле единичную линейную часть, т.е. достаточно близок к тождественному вблизи нуля. Поэтому локально он задается «производящей» функцией $\mathcal{F}(P, q)$ (с нулевой 2-струей в нуле) по формулам

$$\tilde{\varphi}: (p, q) \mapsto (P, Q), \quad \sum_{i=1}^n (Q_i dP_i + p_i dq_i) = d\left(\sum_{i=1}^n P_i q_i + \mathcal{F}(P, q)\right).$$

Условие сохранения C_0 означает, что функции

$$p_i = P_i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}$$

при $i = 1, \dots, k$ обращаются в нуль, если $P_1 = \dots = P_k = 0$. Оно, очевидно, выполнено и для семейства симплектоморфизмов $\tilde{\psi}_t$ с производящими функциями $t\mathcal{F}(P, q)$, $t \in [0, 1]$. Искомая гомотопия является композицией симплектоморфизма $\tilde{\psi}_t$ и соответствующей гомотопии в Λ_k .

ЛЕММА 2. *Если гамильтоново векторное поле V_h касается коизотропного подмногообразия C , то его гамильтониан h постоянен на всяком слое характеристического слоения этого подмногообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подмногообразие C является совместным множеством нулей некоторых независимых регулярных функций $f_1, \dots, f_k$, находящихся в инволюции. Коммутирующие (в точках из C) гамильтоновы векторные поля V_{f_i} порождают касательные пространства к слоям характеристического слоения.

Условие касания поля V_h подмногообразия C означает, что $L_{V_h} f_i = 0$, но $L_{V_h} f_i = [h, f_i] = -L_{V_{f_i}} h$. Таким образом h постоянна вдоль всякого V_{f_i} , т.е. вдоль всякого слоя.

Применяя эту лемму к координатному подпространству C_0 , получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Инфинитезимальные преобразования из G_k^+ задаются гамильтоновыми векторными полями с гамильтонианами h , представимыми в виде*

$$h = \sum_{i=1}^k p_i h_i(p, q) + h_0(p_{k+1}, \dots, p_n, q_{k+1}, \dots, q_n)$$

с некоторыми гладкими h_i и h_0 . Гамильтониан h_0 определяет редуцированное векторное поле на базе характеристического расслоения.

ЛЕММА 3. *Пусть в некоторых координатах Дарбу p, q росток лагранжева многообразия $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ задается производящей функцией $S(q)$, и пусть Φ_t — однопараметрическое семейство локальных симплектоморфизмов, заданное гамильтоновым фазовым потоком с гамильтонианом $H_t(p, q)$. То-*

гда производящие семейства $S_t(q)$ (в этих же координатах) лагранжевы многообразия $\Phi_t(L)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = -H_t\left(\frac{\partial S_t}{\partial q}, q\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лагранжевы подмногообразия $\Phi_t(L)$, вложенные каждое в свой временной слой t расширенного фазового пространства $T^*\mathbb{R}^{n+1}$, образуют лагранжево подмногообразие с производящей функцией $S(t, q) = S_t(q)$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, которая удовлетворяет неавтономному уравнению Гамильтона–Якоби $\partial S/\partial t + H_t(\partial S/\partial q, q) = 0$, что и требовалось показать.

Координаты q_i будем далее обозначать через x_i при $i = 1, \dots, k$ и через z_{i-k} при $i = k+1, \dots, n$, а двойственные координаты p_i — соответственно через y_i и w_{i-k} .

Итак, касательное пространство $T_S G$ к G_k^+ -орбите приведенной функции S по лемме 3 и следствию 3 состоит из всех функций вида

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial x_i} h_i\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial z}, x, z\right) + h_0\left(\frac{\partial S}{\partial z}, z\right)$$

с гладкими h_i и h_0 , причем $h_i(0) = 0$, $h_0(w, z) \in \mathfrak{m}_{w,z}^2$.

Группа G_k^+ содержит подгруппу R_k^+ симплектоморфизмов, сохраняющих еще и лагранжево расслоение $(p, q) \mapsto q$. Преобразования из R_k^+ действуют на производящие функции S как правые замены переменных q , расслоенные над пространством z , и сложения с функциями от z (с нулевой 2-струей).

Касательное пространство $T_S R^+$ к орбите этой группы отличается от предыдущего тем, что функции h_0 аффинны по $\partial S/\partial z$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если графики градиентов $L(S_1)$ и $L(S_2)$ приведенных функций S_1 и S_2 G_k^+ -эквивалентны, то 3-струи $j^3 S_i$ этих функций R_k^+ -эквивалентны и, в частности, 3-струи сужений этих функций на слой $z = 0$ правозэквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 1 и выберем переводящую $L(S_1)$ в $L(S_2)$ гомотопию в G_k^+ , являющуюся фазовым потоком с некоторым гамильтонианом h_t , удовлетворяющим при всяком t условию следствия 3. Поскольку начало координат все время остается на месте, значение h_0 в начале координат можно считать нулевым. В силу леммы 3 соответствующее семейство производящих функций S_t удовлетворяет условию

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = -\sum_{i=1}^k \frac{\partial S_t}{\partial x_i} h_{it}\left(\frac{\partial S_t}{\partial q}, q\right) + h_{0t}\left(\frac{\partial S_t}{\partial z}, z\right).$$

Для приведенной производящей функции S 3-струи в нуле касательных пространств $J^3 T_S G_k$ и $J^3 T_S R_k^+$ совпадают. Действительно, эти пространства различаются множеством функций, принадлежащих квадрату идеала, порожденного функциями $\partial S/\partial z$, каждая из которых принадлежит $\mathfrak{m}_q^2$. Итак, $j^3 \partial S_t/\partial t \in J^3 T_S R_k^+$. В частности, положив $z = 0$ и введя обозначение

$s_t(x) = S_t(x, 0)$, получаем

$$\frac{\partial s_t}{\partial t} = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial s_t}{\partial x_i} \tilde{h}_i(x, t) \mod \{\mathbf{m}_x^4\}$$

с некоторыми гладкими $\tilde{h}_i$. Тем самым выполнены соответствующие гомологические уравнения для семейства $j^3 S_t$ (по отношению к группе R_k^+) и для 3-струи семейства s_t (по отношению к группе правых замен), что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. 1. Орбите всей группы G_k также отвечает правая орбита $j^3 s$, поскольку отражение I действует на производящую функцию правой заменой $(q_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto (-q_1, q_2, \dots, q_n)$.

2 (теорема Голубицкого–Гийемина). Если $k = n$, то G_k -орбиты касающихся лагранжевых L и C классифицируются правыми орбитами S (в этом случае $T_S G_k = T_S R_k^+$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Простым G_k -орбитам отвечают, очевидно, простые правые орбиты 3-струй сужений функций $s(x)$. Приведенным функциям $S(q)$ отвечают сужения из $\mathbf{m}_x^3$, 3-струи которых не просты при $k > 2$.

Все особенности с $k = 2$ примыкают к классу $D_4^\pm$ с $j^3 s_D(x) = x_1^3 \pm x_1 x_2^2$. Всякая функция S из этого класса R_2^+ -эквивалентна функции со следующей 3-струей:

$$j^3 S(x, z) = s_D(x) + \lambda_1(z)(x_1^2 \mp x_2^2) + \lambda_2(z)x_1 + \lambda_3(z)x_2.$$

При этом линейная форма λ_1 и квадратичные формы λ_2, λ_3 определены G_2 -орбитой функции S с точностью до правой замены.

Такой набор, конечно, имеет непрерывные инварианты (в количестве $2(n-k)$) относительно группы линейных замен z . Итак, простых пар с $k \geq 2$ не существует. Пункт (i) теоремы 1 доказан.

Осталось рассмотреть случай $k = 1$. В дальнейшем индекс 1 у G_1 и R_1^+ будем опускать. В пространстве 3-струй семейств функций одной переменной x с параметрами $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ R^+ -орбиты разбиваются на три класса

$$x^3 + x\tilde{Q}(z) \leftarrow x^2 z_1 + x\tilde{Q}_2(z_2, \dots, z_{n-1}) \leftarrow x\tilde{Q}(z).$$

Здесь $\tilde{Q}(z), \tilde{Q}_2(z_2, \dots, z_{n-1})$ — представители орбит действия линейной группы на квадратичных формах от z и $z_2, \dots, z_{n-1}$ соответственно.

Функция S из первого такого класса R^+ -эквивалентна функции вида $S(q) = x^3 + x\lambda(z)$. Касательное пространство к ее G -орбите

$$T_S G = \left\{ (3x^2 + \lambda(z))h(x, z) + h_0\left(x \frac{\partial \lambda}{\partial z}, z\right) \right\}$$

совпадает для такой функции с касательным пространством к ее R^+ -орбите

$$T_S R^+ = \left\{ (3x^2 + \lambda(z))h(x, z) + x \frac{\partial \lambda}{\partial z} a(z) + b(z) \right\}.$$

Здесь h, a, b — произвольные гладкие функции. Таким образом, G -орбиты таких функций S находятся во взаимно однозначном соответствии с правыми орбитами функций $\lambda(z)$, что и доказывает п. (ii) теоремы 1.

Рассмотрение оставшихся случаев основано на осторожном (поскольку касательное пространство к G -орбитам зависит от S нелинейно) применении спектральной последовательности Арнольда [7].

Гамильтониан H инфинитезимального преобразования из группы G принадлежит $\mathbf{m}_{p,q}^2$; поэтому m -струя $J^m T_S G$ касательного пространства $T_S G$ к G -орбите функции S зависит только от $j^m S$. Пусть функции S_0 и S_1 соединены гомотопией S_t , $t \in [0, 1]$, принадлежащей одной орбите группы G ; тогда m -струи s_t функций S_t удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial s_t}{\partial t} = -j^m \left(H_t \left(\frac{\partial s_t}{\partial q}, q \right) \right),$$

которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно компонент m -струй s_t . Коэффициенты полиномиальной правой части этого уравнения определяются струей соответствующего семейства гладких гамильтонианов H_t . В силу единственности решения s_t такого уравнения (при фиксированном H_t) с заданным начальным условием s_0 семейство G -эквивалентностей, порожденное семейством гамильтонианов H_t , переводит произвольное продолжение $\tilde{S}$ струи s в семейство функций $\tilde{S}_t$, m -струи которых при всяком t совпадают с s_t .

Две m -струи s_0 и s_1 назовем G_m^+ -эквивалентными, если они соединяются гомотопией s_t , для которой $\partial s_t / \partial t \in J^m T_{s_t} G$, т.е. гомотопией, которая является решением (с заданными граничными условиями) указанного обыкновенного дифференциального уравнения, отвечающего некоторому семейству m -струй гамильтонианов H_t . Струи s_0 и s_1 будем называть G_m -эквивалентными (и обозначать это так: $s_0 \approx s_1$), если s_0 G_m -эквивалентна либо s_1 , либо $I(s_1) = S_1(-x, z)$. Ясно, что j^m -струи функций из одной G -орбиты принадлежат одному классу $\approx$ -эквивалентности.

ЛЕММА 4 (определитель особенностей с вырожденными 3-струями).

1. Пусть 3-струя приведенной производящей функции S принадлежит второму классу: $j^3 S \approx x^2 z_1 + x \hat{Q}(z_2, \dots, z_{n-1})$.

1.0. Если $\hat{Q}(z)$ невырождена, то $j^4 S \approx x^2 z_1 + x(\pm z_2^2 \pm \dots \pm z_{n-1}^2)$ и либо $J^5 S \approx x^5 + x^2 z_1 + x \hat{Q}$ (в этом случае функция S G -эквивалентна нормальной форме C_2), либо найдется такое $k > 2$, что $j^i(S) \approx x^2 z_1 + x \hat{Q}$ при всех $i \leq 2k$ и $j^{2k+1} S \approx x^{2k+1} + x^2 z_1 + x \hat{Q}$ (в этом случае S G -эквивалентна нормальной форме C_k), либо S имеет коразмерность ∞ в пространстве функций.

1.1. Если коранг формы $\hat{Q}$ равен 1, $\hat{Q} = \pm z_2^2 \pm \dots \pm z_{n-1}^2$, то либо $j^4 S \approx x^3 z_2 + x^2 z_1 + x \hat{Q}$ (тогда функция S либо G -эквивалентна одной из нормальных форм B_k , либо принадлежит подмножеству коразмерности ∞), либо $j^5 S \approx x^5 + x^2 z_1 + x(z_2^2 \pm z_3^2 \pm \dots \pm z_{n-1}^2)$ (и в этом случае S G -эквивалентна F_4), либо $j^5 S \approx x^2 z_1 + x(z_2^3 \pm z_3^3 \pm \dots \pm z_{n-1}^2)$ и тогда $j^6 S \approx x^2 z_1 + \dots + z_2 x^5 a$ ($a \in \mathbb{R}$ — модуль), либо $j^5 S \approx x^5 + x^2 z_1 + x(z_2^4 \pm z_3^4 \pm \dots \pm z_{n-1}^2) = a x^3 z_2^2$ (a — модуль), либо, наконец, $J^5 S \approx$ -эквивалентна струе, примыкающей к предыдущему классу (и, таким образом, также не проста).

1.2. Если коранг формы $\hat{Q}$ равен 2, $\hat{Q} = \pm z_4^2 \pm \dots \pm z_{n-1}^2$, то либо $j^4 S \approx$

$x^3 z_2 + x^2 z_1 + x(\hat{Q} + z_3^3 + a z_3 z_2^2 + z_3^3)$ (a — модуль), либо $j^4 S \approx x^2 z_1 + x(\hat{Q} + z_2^3 \pm z_2 z_3^2)$ или $j^4 S$ примыкает к этому классу. В этих случаях $j^5 S$ не проста.

При коранге формы $\hat{Q}$, большем 2, 5-струи также не просты.

2. Пусть 3-струя функции S принадлежит третьему классу $j^3 S \approx x\hat{Q}$.

2.0. Если Q невырождена, то либо $j^4 S \approx x^4 + x\hat{Q}$ (и тогда S G -эквивалентна особенностям U_3), либо $j^4 S \approx x^3 l(z) + x\hat{Q}$, где $l(z)$ — линейная форма от z , коэффициенты которой являются модулями.

2.1. Если Q вырождена, то $j^4 S \approx x^4 + a x^2 z_2^2 + x(z_2^3 \pm z_3^3 \pm \dots \pm z_{n-1}^2)$ (a — модуль) или $j^4 S$ примыкает к этому классу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Предположим, что m -струя функции S преобразованием из группы G_k приведена к нормальной форме s_m ; тогда S эквивалентна некоторому продолжению s_m . На $(m+1)$ -струи таких продолжений будем действовать подгруппой G_{k+1}^{st} G_{k+1} -преобразований, сохраняющих s_m .

Касательное пространство $K^{k+1}(s_{m+1})$ к G_{k+1}^{st} -орбите этой подгруппы содержит только такие струи, компоненты которых аффинно зависят от компонент степени $m+1$ продолжений s_{m+1} . Таким образом, G_{k+1}^{st} -орбиты в пространстве однородных функций степени $m+1$ совпадают с орбитами действия некоторой подгруппы аффинной группы этого пространства. Представители таких орбит являются G_{k+1} -нормальными формами s_{m+1} .

Простые орбиты примыкают не более чем к конечному числу других орбит; поэтому если для всех продолжений коразмерность $K^{k+1}(s_{m+1})$ в пространстве однородных функций степени $m+1$ положительна, то классы всех s_{m+1} не просты.

Применение этого спектрального метода индукцией по m для всех возникающих G_k -простых орбит и приводит к искомой классификации.

Например, в случае 1.0 пространство $K^4(s_4)$ всякого 4-продолжения струи $j^3 S = x^2 z_1 + x\hat{Q}(z_2, \dots, z_{n-1})$ содержит 4-струи следующих функций (здесь $\sim$ означает равенство по модулю $\mathbf{m}_{x,z}^5$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial z_1} z_i z_j &\sim x^2 z_i z_j, & \left(\frac{\partial S}{\partial z_1} \right)^2 &\sim x^4, & \frac{\partial S}{\partial z_1} \frac{\partial S}{\partial z_j} &\sim 2x^3 z_j, \\ \frac{\partial S}{\partial z_j} z_i z_k &\sim 2x z_i z_j z_k, & \frac{\partial S}{\partial z_j} \frac{\partial S}{\partial z_m} &\sim 4x^2 z_j z_m, \\ \frac{\partial S}{\partial x} z_i z_j &\sim (2x z_1 + Q) z_i z_j, & \frac{\partial S}{\partial x} x^2 &\sim 2x^3 z_1 + x^2 Q, \end{aligned}$$

а также все мономы 4-й степени от z . Таким образом, это касательное пространство содержит пространство всех 4-продолжений, которые, следовательно, образуют одну орбиту.

Итак, G -эквивалентностью приведем функцию S к виду $S_{(5)}$, для которого 4-струя нормализована: $j^4 S_{(5)} = x^2 z_1 + x\hat{Q}$. Если $j^5 S_{(5)}$ содержит с ненулевым коэффициентом моном x^5 , то, как легко видеть, классы перечисленных выше образующих, а также функций $(\partial S_{(5)}/\partial z_1)^3$, $(\partial S_{(5)}/\partial x)x$, порождают над кольцом C_z (ростков функций от z) фактор модуля $\mathbf{m}_{x,z}^5$ по

идеалу, порожденному над $C_{x,z}$ функцией $(\partial S/\partial x)x^3$ и $\mathbf{m}_z^6$. По лемме Накамы классы этих функций порождают и фактор $\mathbf{m}_{x,z}^5/C_{x,z}\{(\partial S/\partial x)x^3\}$, т.е. $\mathbf{m}_{x,z}^5$ принадлежит $T_{S_{(5)}}G$. Итак, 5-струя является достаточной, т.е. гомотопическим методом функция $S_{(5)}$ приводится к виду C_2 .

Если же в $j^5S_{(5)}$ коэффициент при x^5 нулевой, то $J^5T_{S_{(5)}}G$ имеет положительную коразмерность в пространстве 5-струй (не содержит класса x^5). Таким образом, этот случай не G -эквивалентен предыдущему (он инвариантен по отношению к G_5^{st} -преобразованиям, сохраняющим 4-струю $S_{(5)}$). Все такие 5-струи образуют одну G_5^{st} -орбиту. Подобно случаю 4-струи, легко видеть, что все 6-продолжения 5-струи $j^5S = x^2z_1 + x\widehat{Q}$ эквивалентны между собой. Рассмотрение старших струй приводит поочередно к классам C_k или к классу коразмерности ∞ (примыкающему ко всем C_k). Остальные пункты определителя особенностей рассматриваются аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В некоторых координатах Дарбу $(p, q) = (y, w, x, z)$, $\omega = dy \wedge dx + \sum_{i=1}^{n-1} dw_i \wedge dz_i$, расслоение на гиперповерхности уровня функции φ выпрямляется: $\varphi = \varphi(y)$, и лагранжево многообразие L задается приведенной производящей функцией $S(x, z)$.

Группе G_y симплектоморфизмов, сохраняющих такое расслоение, отвечает алгебра гамильтоновых векторных полей, $\partial/\partial y$ -компонента которых зависит только от y . Их гамильтонианы представляются в виде

$$H = xh_1(y) + h_2(y, z, w).$$

Квадратичность касания L и гиперповерхности $\{y=0\}$, а также и условие невырожденности означают, что функция S приводится R^+ -эквивалентностью (с сохранением только слоя $\{y=0\}$) к функции $S_0 = x^3 + x(\pm z_1^2 \pm \dots \pm z_{n-1}^2)$ класса A_1 . При этом 3-струю j^3S можно привести к такому виду линейным симплектоморфизмом из $R^+ \subset G$ и сдвигом, порожденным гамильтонианом, зависящим только от z . Такие преобразования, очевидно, принадлежат и группе G_y .

Пользуясь стандартным гомотопическим методом, для доказательства теоремы достаточно показать, что касательное пространство к орбите группы G_y в каждом продолжении

$$S = S_0 + S_t, \quad S_t \in \mathbf{m}_{p,q}^4(t),$$

этой 3-струи содержит все пространство $\mathbf{m}_{p,q}^4(t)$, состоящее из функций от p, q и дополнительного параметра t , при каждом t принадлежащих $\mathbf{m}_{p,q}^4$. По лемме 3 такое касательное пространство есть множество сужений гамильтониана H на лагранжево подмногообразие $L(S)$:

$$y = 3x^2 \pm z_1^2 \pm \dots \pm z_{n-1}^2 + \frac{\partial S_t}{\partial x}, \quad w_i = \pm 2xz_i + \frac{\partial S_t}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Рассмотрим произвольную функцию $\beta(x, z, t)$. В силу подготовительной теоремы Мальгранжа (примененной к отображению $(x, z, t) \mapsto (y, z, t)$) существует разложение

$$\beta = xH_1 + H_0,$$

где H_0, H_1 — гладкие функции от y, z, t . Обозначим через $B_{i1}(y, z, t)$, $B_{i0}(y, z, t)$ коэффициенты подобных разложений для функций $\partial S_t / \partial z_i$:

$$\frac{\partial S_t}{\partial z_i} = xB_{i1} + B_{i0}.$$

Заметим, что $B_{ij} \in \mathbf{m}_{y,z}^2$ при любом t ; поэтому по теореме деления функцию $H_1(y, z, t)$ можно представить в виде

$$H_1(y, z, t) = h_0(y, t) + \sum_{i=1}^{n-1} (\pm 2z_i + B_{i1}) h_{i1}(y, z, t).$$

Подставляя это выражение в формулу разложения для β , получаем

$$\begin{aligned} \beta &= xh_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (\pm 2xz_i + xB_{i1}) h_{i1} + H_0 \\ &= xh_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (\pm 2xz_i + xB_{i1} + B_{i0}) h_{i1} + H_0 - \sum_{i=1}^{n-1} B_{i0} h_{i1}. \end{aligned}$$

Заметим, что выражения в скобках равны w_i ; таким образом,

$$\beta = xh_0(y, t) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i h_{i1}(y, z, t) + \tilde{h}(y, z, t),$$

где $\tilde{h} = H_0 - \sum_{i=1}^{n-1} B_{i0} h_{i1}$. Это равенство и является искомым представлением функции $\beta(x, z, t)$ в качестве элемента касательного пространства к G_y -орбите. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Фактически мы доказали большее. Найденный гамильтониан является аффинным по переменным w_i , т.е. $L(S_0 + S_t)$ можно привести к $L(S_0)$ симплектоморфизмом, сохраняющим лагранжево расслоение $(y, w, x, z) \mapsto (y, z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 4, 1–14 (1981).
2. Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений. УМН, **43**, вып. 3, 125–160 (1988).
3. Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. В кн.: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 33, ВИНТИ, М., 1988, с. 55–112.
4. Закалюкин В. М. Одно обобщение лагранжевых триад. УМН, **41**, вып. 4, 180 (1986).
5. Закалюкин В. М., Робертс Р. М. Об устойчивых лагранжевых многообразиях с особенностями. Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 3, 28–34 (1992).
6. Domitrz W., Janeczko S. Equivalence of Lagrangian germs in the presence of a surface. Banach Center Publ., Vol. 39, pp. 31–37.
7. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений 1. Наука, М., 1982.