Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Архипов, Полубесконечные когомологии малых квантовых групп, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 54–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 06:49:58

Полубесконечные когомологии малых квантовых групп

© 1998. С. М. Архипов

Настоящая работа является кратким изложением основного результата [2]. Общая теория полубесконечных когомологий градуированных ассоциативных алгебр содержится в [3, 4]. Мы следуем [7] в обозначениях, связанных с комбинаторикой систем корней.

1. Малые квантовые группы. Зафиксируем *картановские данные* $(I, \cdot)$ конечного типа и *односвязные корневые данные* $(Y, X, \dots)$ типа $(I, \cdot)$. Таким образом, $Y = \mathbb{Z}[I]$, $X = \text{Hom}(Y, \mathbb{Z})$ и спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle: Y \times X \rightarrow \mathbb{Z}$ совпадает с естественным спариванием (см. [7, I.1.1, I.2.2]). Определены канонические вложения $I \hookrightarrow Y$, $i \mapsto i$, и $I \hookrightarrow X$, $i \mapsto i'$, где i' определяется условием $\langle i', j \rangle := 2i \cdot j / i \cdot i$. Последнее отображение продолжается до вложения $Y \subset X$. Обозначим через ht линейную функцию на X , определенную на элементах $i', i \in I$, формулой $\text{ht}(i') = 1$ и продолженную на все X по линейности. Система корней (соответственно система положительных корней), построенная по данным $(Y, X, \dots)$, обозначается через R (соответственно R^+), W обозначает группу Вейля системы корней R .

По корневым данным $(Y, X, \dots)$ Дринфельд и Джимбо построили ассоциативную алгебру $\mathbf{U}$ над полем $\mathbb{Q}(v)$ рациональных функций от переменной v с образующими $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$, $i \in I$, и соотношениями, являющимися квантовыми аналогами классических соотношений Серра в универсальной обертывающей алгебре соответствующей простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Явный вид соотношений можно найти, например, в [7, I.3.1]. Алгебры $\mathbf{U}$ называются *квантовыми группами*.

Люстиг (см. [7, V.31.1]) определил $\mathbb{Q}[v, v^{-1}]$ -подалгебру $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}}$ в $\mathbf{U}$, являющуюся квантовым аналогом целочисленной формы Костанта для универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$, $i \in I$, принадлежат $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}}$. Пусть ℓ — нечетное натуральное число, удовлетворяющее условиям из [5]. Фиксируем примитивный корень ℓ -й степени из единицы ζ . Определим $\mathbb{C}$ -алгебру $\tilde{\mathbf{U}}_{\ell} := \mathbf{U}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}[v, v^{-1}]} \mathbb{C}$, где v действует на $\mathbb{C}$ умножением на ζ . Известно, что элементы K_i^{ℓ} , $i \in I$, принадлежат центру алгебры $\tilde{\mathbf{U}}_{\ell}$. Положим $\mathbf{U}_{\ell} := \tilde{\mathbf{U}}_{\ell} / (K_i^{\ell} - 1, i \in I)$. Следуя Люстигу, определим *малую квантовую группу* $\mathbf{u}_{\ell}$ в корне из единицы ζ как подалгебру в $\mathbf{U}_{\ell}$, порожденную $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$, $i \in I$. Обозначим подалгебру в $\mathbf{u}_{\ell}$, порожденную E_i , $i \in I$ (соответственно F_i , $i \in I$, соответственно K_i , $i \in I$), через $\mathbf{u}_{\ell}^+$ (соответственно $\mathbf{u}_{\ell}^-$, соответственно $\mathbf{u}_{\ell}^0$). Заметим, что алгебра $\mathbf{u}_{\ell}$ градуирована абелевой группой X . Функция ht превращает эту X -градуировку в $\mathbb{Z}$ -градуировку на $\mathbf{u}_{\ell}$. При этом подалгебра $\mathbf{u}_{\ell}^+$ (соответственно $\mathbf{u}_{\ell}^-$) градуирована полугруппой $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (соответственно $\mathbb{Z}_{\leq 0}$).

Ниже приводятся основные факты про алгебру $\mathbf{u}_{\ell}$, которые мы будем ис-

пользовать в дальнейшем. Напомним, что аугментированная подалгебра $B \subset A$ с идеалом аугментации $\bar{B} \subset B$ называется *нормальной*, если $A\bar{B} = \bar{B}A$. Тогда $A/\bar{A}$ является алгеброй, обозначаемой через $A//B$. Фиксируем аугментацию $u_\ell: E_i \mapsto 0, F_i \mapsto 0, K_i \mapsto 1$ для всех $i \in I$. Положим $\underline{C} := u_\ell/\bar{u}_\ell$.

1.1. ЛЕММА (см. [1, 1.3; 8, Theorem 8.10]). (i) Умножение в u_ℓ определяет изоморфизм векторных пространств $u_\ell = u_\ell^- \otimes u_\ell^0 \otimes u_\ell^+$, $\dim u_\ell^\pm = \ell^\#(R^+)$; подалгебра u_ℓ^0 изоморфна групповой алгебре группы $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

(ii) Подалгебра $u_\ell \subset \mathbf{U}_\ell$ нормальна и $\mathbf{U}_\ell//u_\ell = U(\mathfrak{g})$. $\square$

Подалгебра $u_\ell^- \otimes u_\ell^0$ (соответственно $u_\ell^0 \otimes u_\ell^+$) в u_ℓ обозначается через $\mathfrak{b}_\ell^-$ (соответственно $\mathfrak{b}_\ell^+$). Напомним, что конечномерная алгебра A называется *фробениусовой*, если левые A -модули A и $A^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$ изоморфны.

1.2. ЛЕММА. Алгебры u_ℓ^+ и u_ℓ^- фробениусовы. $\square$

Определим отрицательный модуль Верма со старшим весом $\lambda \in X$ (соответственно положительный контраградиентный модуль Верма с младшим весом $\lambda \in X$) как $M^-(\lambda) := \text{Ind}_{\mathfrak{b}_\ell^+}^{u_\ell} \mathbb{C}(\lambda)$ (соответственно $DM^+(\lambda) := \text{Coind}_{\mathfrak{b}_\ell^+}^{u_\ell} \mathbb{C}(\lambda)$). Здесь $\mathbb{C}(\lambda)$ обозначает одномерный $\mathfrak{b}_\ell^+$ -модуль с образующей v_λ , такой, что $E_i v_\lambda = 0$, а $K_i v_\lambda = \zeta^{(i, \lambda)}$, $i \in I$. Лемма 1.2 влечет за собой следующее утверждение.

1.3. СЛЕДСТВИЕ. $M^-(\lambda) \xrightarrow{\sim} DM^+(\lambda - 2\rho(\ell - 1))$. Здесь и далее ρ обозначает полусумму положительных корней. $\square$

Рассмотрим следующую фильтрацию на алгебре u_ℓ . Пусть компонента $F^{\leq d}(u_\ell)$ линейно порождена X -однородными разложимыми элементами $u = u^- \otimes u^0 \otimes u^+$, такими, что $|\text{ht}(\deg u^-)| + |\text{ht}(\deg u^+)| \leq d$. Положим $\tilde{u}_\ell := \text{gr}^F u_\ell$. Очевидно, что $\text{gr}^F \mathfrak{b}_\ell^+ = \mathfrak{b}_\ell^+$, $\text{gr}^F \mathfrak{b}_\ell^- = \mathfrak{b}_\ell^-$, $\text{gr}^F u_\ell^0 = u_\ell^0$.

1.4. ЛЕММА. Элементы подалгебры $u_\ell^- \subset \tilde{u}_\ell$ коммутируют с элементами подалгебры $u_\ell^+ \subset \tilde{u}_\ell$. $\square$

X - и $\mathbb{Z}$ -градуировки, а также аугментация на $\tilde{u}_\ell$ наследуются с u_ℓ . Обозначим категорию X -градуированных конечномерных левых u_ℓ -модулей (соответственно $\tilde{u}_\ell$ -модулей) $M = \bigoplus_{\lambda \in X} M_\lambda$, таких, что K_i действует на M_λ умножением на число $\zeta^{(i, \lambda)}$, E_i переводит M_λ в $M_{\lambda+i'}$, а F_i переводит M_λ в $M_{\lambda-i'}$ для $i \in I$, с морфизмами, сохраняющими X -градуировку, через $u_\ell\text{-mod}$ (соответственно $\tilde{u}_\ell\text{-mod}$). Для $M, N \in u_\ell\text{-mod}$ и $\lambda \in \ell \cdot X$ определим $M\langle\lambda\rangle \in u_\ell\text{-mod}$ следующим образом: $M\langle\lambda\rangle_\mu := M_{\lambda+\mu}$, и положим $\text{Hom}_{u_\ell}(M, N) := \bigoplus_{\lambda \in \ell \cdot X} \text{Hom}_{u_\ell\text{-mod}}(M\langle\lambda\rangle, N)$; $\text{Hom}_{\tilde{u}_\ell}$ определяется аналогично. Очевидно, что пространства $\text{Hom}_{u_\ell}(\cdot, \cdot)$ и $\text{Hom}_{\tilde{u}_\ell}(\cdot, \cdot)$ градуированы решеткой $\ell \cdot X$.

2. Полубесконечные когомологии. Приводимое ниже определение полубесконечных когомологий является частным случаем общего определения для конечномерной алгебры $u = \mathfrak{b}^- \otimes u^+$, такой, что подалгебра u^+ фробениусова. Для комплекса X -градуированных u_ℓ -модулей $M^\bullet = \bigoplus_{\lambda \in X, q \in \mathbb{Z}} M_p^q$, $d: M_\lambda^q \rightarrow M_\lambda^{q+1}$, положим $\text{supp } M^\bullet := \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists \lambda: M_\lambda^q \neq 0, p = \text{ht}(\lambda)\}$.

Назовем комплекс *растущим вниз* (соответственно *растущим вверх*), если существуют $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, такие, что $\text{supp } M^\bullet \subset \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid s_1 q + p \leq t_1, s_2 q - p \leq t_2\}$ (соответственно $\text{supp } M^\bullet \subset \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid s_1 q + p \geq t_1, s_2 q - p \geq t_2\}$).

Пусть $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{C}om(\mathfrak{u}_\ell\text{-mod})$, причем $M^\bullet$ растёт вверх, а $N^\bullet$ растёт вниз. Выберем произвольный растущий вверх (соответственно вниз) комплекс $R_\uparrow^\bullet(M^\bullet)$ (соответственно $R_\downarrow^\bullet(N^\bullet)$) из $\mathcal{C}om(\mathfrak{u}_\ell\text{-mod})$, квазиизоморфный $M^\bullet$ (соответственно $N^\bullet$) и состоящий из $\mathfrak{u}_\ell^+$ -свободных (соответственно $\mathfrak{u}_\ell^-$ -свободных) модулей. По определению положим

$$\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(M^\bullet, N^\bullet) := H^\bullet(\text{Hom}_{\mathfrak{u}_\ell}(R_\uparrow^\bullet(M^\bullet), R_\downarrow^\bullet(N^\bullet))).$$

Аналогично определим $\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\widetilde{M}^\bullet, \widetilde{N}^\bullet)$ для растущего вверх комплекса $\mathfrak{u}_\ell$ -модулей $\widetilde{M}^\bullet$ и растущего вниз комплекса $\mathfrak{u}_\ell$ -модулей $\widetilde{N}^\bullet$. Очевидно, что пространства $\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(M^\bullet, N^\bullet)$ (соответственно $\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\widetilde{M}^\bullet, \widetilde{N}^\bullet)$) снабжены естественной $\ell \cdot X$ -градуировкой.

2.1. ЛЕММА (см. [2, Lemma 3.4.2, Theorem 5]). *Пространства $\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(M^\bullet, N^\bullet)$ не зависят от выбора резольвент и определяют функторы*

$$\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+k}(\cdot, \cdot): \mathfrak{u}_\ell\text{-mod} \times \mathfrak{u}_\ell\text{-mod} \rightarrow \mathcal{V}ect, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

2.2. ЛЕММА. Пусть $M, N \in \mathfrak{u}_\ell\text{-mod}$ являются ограничениями $\mathbf{U}_\ell$ -модулей. Тогда на пространствах $\text{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(M, N)$ определено естественное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\ell \cdot X$ -градуировка на них совпадает с X -градуировкой весового разложения относительно стандартной подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$.

Утверждение леммы 2.2 непосредственно следует из леммы 1.1(ii).

Напомним конструкцию приведенной бар-резольвенты для $M \in \mathfrak{u}_\ell\text{-mod}$ относительно подалгебры $\mathfrak{b}_\ell^+$. Рассмотрим комплекс

$$\widetilde{\text{Bar}}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M) : \widetilde{\text{Bar}}^{-k}(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M) := \mathfrak{u}_\ell \otimes_{\mathfrak{b}_\ell^+} \cdots \otimes_{\mathfrak{b}_\ell^+} \mathfrak{u}_\ell \otimes_{\mathfrak{b}_\ell^+} M$$

$(k+1)$ сомножителей из $\mathfrak{u}_\ell$) со стандартным бар-дифференциалом. Непосредственно проверяется, что подпространства в $\widetilde{\text{Bar}}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M)$, линейно порожденные мономами $u_0 \otimes \cdots \otimes u_k \otimes t$, такими, что хотя бы один из сомножителей $u_1, \dots, u_k$ принадлежит $\mathfrak{b}_\ell^+$, образуют подкомплекс, обозначаемый $\overline{\text{Bar}}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M)$. Положим $\text{Var}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M) := \widetilde{\text{Bar}}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M) / \overline{\text{Bar}}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M)$. Комплекс $\text{Var}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^-, M)$ определяется аналогично. Непосредственно проверяется, что комплекс $\text{Var}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, M)$ (комплекс $\text{Var}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^-, M)$) растёт вниз (соответственно вверх), состоит из $\mathfrak{u}_\ell^-$ -свободных (соответственно из $\mathfrak{u}_\ell^+$ -свободных) $\mathfrak{u}_\ell$ -модулей и квазиизоморфен M .

Заметим, что фильтрация F на алгебре $\mathfrak{u}_\ell$ индуцирует фильтрацию на комплексе $\text{Hom}_{\mathfrak{u}_\ell}(\text{Var}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^-, \mathbb{C}), \text{Var}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, \mathbb{C}))$ и на его когомологиях.

При этом

$$\begin{aligned} & \operatorname{gr}^F \operatorname{Hom}_{\mathfrak{u}_\ell}^\bullet(\operatorname{Bar}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^-, \mathbb{C}), \operatorname{Bar}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, \mathbb{C})) \\ &= \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^\bullet(\operatorname{Bar}^\bullet(\tilde{\mathfrak{u}}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^-, \mathbb{C}), \operatorname{Bar}^\bullet(\tilde{\mathfrak{u}}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, \mathbb{C})). \end{aligned}$$

Мы получаем следующее утверждение.

2.3. ЛЕММА. *Существует спектральная последовательность с $E_1 = \operatorname{Ext}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, сходящаяся к $E_\infty = \operatorname{gr}^F \operatorname{Ext}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.* $\square$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ КОГОМОЛОГИЙ ТРИВИАЛЬНОГО $\mathfrak{u}_\ell$ -МОДУЛЯ. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

3.1. ТЕОРЕМА.

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Ext}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), t) = \operatorname{ch}(t) := \frac{t^{-\#(R^+)} e^{-2\ell\rho} \sum_{w \in W} t^{2l(w)}}{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\ell\alpha} t^{-2}) (1 - e^{-\ell\alpha} t^2)}.$$

Здесь переменная t отвечает гомологической градуировке и для веса $\alpha = -\sum a_i i'$ символ e^α обозначает моном $\prod_i (e^{-i'})^{a_i}$. Правая часть равенства есть элемент из $\mathbb{C}[t, t^{-1}][[e^{-i'}, i \in I]]$.

Приведем набросок доказательства теоремы. Вычислим для начала полубесконечные когомологии тривиального модуля над $\tilde{\mathfrak{u}}_\ell$. Заметим, что $\mathfrak{u}_\ell^- \otimes \mathfrak{u}_\ell^+$ является нормальной подалгеброй в $\tilde{\mathfrak{u}}_\ell$.

3.2. ЛЕММА.

$$\begin{aligned} & \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^\bullet(\operatorname{Bar}^\bullet(\tilde{\mathfrak{u}}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^-, \mathbb{C}), \operatorname{Bar}^\bullet(\tilde{\mathfrak{u}}_\ell, \mathfrak{b}_\ell^+, \mathbb{C})) \\ &= (\operatorname{Hom}_{\mathfrak{u}_\ell^- \otimes \mathfrak{u}_\ell^+}^\bullet(\operatorname{Bar}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell^- \otimes \mathfrak{u}_\ell^+, \mathfrak{u}_\ell^-, \mathbb{C}), \operatorname{Bar}^\bullet(\mathfrak{u}_\ell^- \otimes \mathfrak{u}_\ell^+, \mathfrak{u}_\ell^+, \mathbb{C})))^{\mathfrak{u}_\ell^0}. \quad \square \end{aligned}$$

С другой стороны, по лемме 1.1(i) алгебра $\mathfrak{u}_\ell^0 = \mathbb{C}[\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}]$ полупроста, и мы получаем следующее утверждение.

3.3. СЛЕДСТВИЕ. $\operatorname{Ext}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = (\operatorname{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell^- \otimes \mathfrak{u}_\ell^+}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))^{\mathfrak{u}_\ell^0}$. $\square$

3.4. ЛЕММА (см. [5, Theorem 2.5]).

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \operatorname{ch}(H_\bullet(\mathfrak{u}_\ell^-, \mathbb{C}), t) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha} t^{-2})} \sum_{w \in W} t^{-l(w)} e^{w(\rho) - \rho}; \\ \text{(ii)} \quad & \operatorname{ch}(H^\bullet(\mathfrak{u}_\ell^+, \mathbb{C}), t) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha} t^2)} \sum_{w \in W} t^{l(w)} e^{w(\rho) - \rho}. \quad \square \end{aligned}$$

3.5. ЛЕММА.

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Ext}_{\mathfrak{u}_\ell^- \otimes \mathfrak{u}_\ell^+}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), t) = \operatorname{ch}(H_\bullet(\mathfrak{u}_\ell^-, \mathbb{C}), t) \operatorname{ch}(H^\bullet(\mathfrak{u}_\ell^+, \mathbb{C}), t) e^{2(1-\ell)\rho}.$$

Утверждение леммы 3.5 вытекает из леммы 1.4 и следствия 1.3.

3.6. СЛЕДСТВИЕ. $\operatorname{ch}(\operatorname{Ext}_{\tilde{\mathfrak{u}}_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), t) = \operatorname{ch}(t)$. $\square$

В частности, ненулевые пространства полубесконечных когомологий сосредоточены в нечетных гомологических градуировках. Таким образом,

спектральная последовательность из леммы 2.3 вырождается в члене E_1 . Это доказывает теорему 3.1.

4. Распределения на нильпотентном конусе. Рассмотрим простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, построенную по данным $(Y, X, \dots)$. Пусть G — соответствующая односвязная группа Ли. Тогда G действует присоединенно на $\mathfrak{g}$, сохраняя множество нильпотентных элементов $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$, называемое *нильпотентным конусом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это действие задает отображение $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли алгебраических векторных полей $\mathcal{Vect}(\mathcal{N})$. Пусть $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ — стандартная борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}$, $B \subset G$ — соответствующая борелевская подгруппа, а $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ — нильпотентный радикал подалгебры $\mathfrak{b}$. В частности, $\mathfrak{n} \subset \mathcal{N}$ — замкнутое по Зарисскому подмногообразие. Рассмотрим пространство локальных когомологий $\mathcal{N}$ с носителем в $\mathfrak{n}$ с коэффициентами в структурном пучке $H_n^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$. Известно, что $\mathcal{Vect}(\mathcal{N})$ действует на $H_n^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$ (см. [6]), и это задает представление алгебры $\mathfrak{g}$ в локальных когомологиях, интегрируемое относительно B . Многообразие $\mathcal{N}$ аффинно, и действие группы $\mathbb{C}^*$ растяжениями задает дополнительную градуировку на $H_n^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$.

4.1. ТЕОРЕМА (см. [2, Appendix A]). (i) $H_n^{\neq \#(R^+)}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}) = 0$;

$$(ii) \operatorname{ch}(H_n^{\#(R^+)}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}), t) = e^{-2\rho} \frac{\sum_{w \in W} t^{l(w)}}{\prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha} t^{-1})(1 - e^{-\alpha} t)}.$$

Здесь переменная t отвечает $\mathbb{Z}$ -градуировке по действию группы $\mathbb{C}^*$, а символ e^α для веса $\alpha = -\sum a_i i'$ обозначает моном $\prod_i (e^{-i'})^{a_i}$. Правая часть равенства есть элемент из $\mathbb{C}[t, t^{-1}][[e^{-i'}, i \in I]]$. $\square$

4.2. СЛЕДСТВИЕ. С точностью до замены градуировки по t характер представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $H_n^{\#(R^+)}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$ совпадает с характером представления этой алгебры Ли в $\operatorname{Ext}_{u_\ell}^{\infty/2+\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. $\square$

Я благодарен Б. Л. Фейгину, сформулировавшему следствие 4.2 в качестве гипотезы, за необычайно стимулирующие обсуждения, а также М. В. Финкельбергу за терпеливое внимание к работе и полезные комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersen H. H., Jantzen J. C., Soergel W. Representations of quantum groups at p th roots of unity and of semisimple groups in characteristic p : independence of p . Asterisque, **220** (1994).
2. Arkhipov S. Semi-infinite cohomology of quantum groups. Preprint q-alg/9601026 (1996).
3. Arkhipov S. Semi-infinite cohomology of associative algebras and bar duality. Preprint q-alg/9602013 (1996).
4. Arkhipov S. Semi-infinite cohomology of quantum groups II. Preprint q-alg/9610043 (1996).
5. Ginzburg V., Kumar N. Duke Math. J., **69**, 179–198 (1993).
6. Kempf G. Adv. in Math., **29**, 310–396 (1978).
7. Lusztig G. Introduction to Quantum Groups. Progress in Mathematics, Vol. 110, Birkhäuser, Boston etc., 1993.
8. Lusztig G. Geom. Dedicata, **95**, 89–114 (1990).