Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Граев, Разностные и (r, s) -аналоги GG -функций, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 59–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:02:16

УДК 517.58

Разностные и (r, s) -аналоги GG -функций^{*}

© 1998. М. И. ГРАЕВ

1. В [6, 7] предложен новый подход к гипергеометрическим функциям. Он состоит в том, что эти функции определяются не как решения дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, а как решения GG -систем — совокупности линейных соотношений между функцией, ее первыми частными производными и сдвигами функции по параметрам. Согласно [7], каждая GG -система задается линейным подпространством $L \subset \mathbb{C}^N$ и состоит из следующих уравнений в пространстве функций $f(\alpha, a)$ на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$:

$$(\partial_i f)(\alpha, a) = f(\alpha - e_i, a), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$f(\alpha + l, a) = f(\alpha, a) \quad \text{для любого } l \in L, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i (\theta_i f)(\alpha, a) = \langle \omega, \alpha \rangle f(\alpha, a) \quad (3)$$

для любого $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\mathbb{C}^N)'$, ортогонального L . Здесь $\partial_i = \partial/\partial a_i$, $\theta_i = a_i \partial/\partial a_i$ и $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^N$. Решения системы (1)–(3), голоморфные относительно a , называются GG -функциями, ассоциированными с подпространством L .

Если подпространство L линейно порождено подрешеткой $\Lambda = L \cap \mathbb{Z}^N$, то любая GG -функция является решением ассоциированной с Λ общей гипергеометрической системы дифференциальных уравнений в смысле [1]. Таким образом, общие гипергеометрические функции можно определять не через системы дифференциальных уравнений высших порядков, а как решения GG -систем (1)–(3). В случае подпространств L общего положения GG -функции не сводятся к решениям систем дифференциальных уравнений, но они во многом схожи с общими гипергеометрическими функциями.

В [7] были построены решения GG -систем в форме рядов и интегралов и исследованы связи этих решений с общими гипергеометрическими функциями. В данной статье рассматриваются системы (1)–(3), в которых ∂_i и θ_i — операторы более общего вида, в том числе (r, s) -аналоги и разностные аналоги GG -систем. Для этих систем построены решения, аналогичные решениям из [7].

2. Построим формальные решения системы уравнений (1)–(3), где ∂_i и θ_i — произвольные линейные операторы в пространстве функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[\partial_i, \partial_j] = [\theta_i, \theta_j] = 0, \quad [\partial_i, \theta_j] = \delta_{ij} \partial_i, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Обозначим (см. [2]) через $\mathbb{C}^I$, где $I \subset [1, N]$, координатное подпространство в $\mathbb{C}^N$, порожденное векторами e_i , $i \in I$. Аналогично определим подрешетки

^{*} Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 95-01-01364).

$\mathbb{Z}^I \subset \mathbb{Z}^N$. Назовем подмножество $I \subset [1, N]$ базой относительно подпространства $L \subset \mathbb{C}^N$, если $\#I = \text{codim } L$ и $\mathbb{C}^I \cap L = 0$, а потому $\mathbb{C}^N = L \oplus \mathbb{C}^I$.

Пусть $I \subset [1, N]$ — произвольная база относительно подпространства L и $J = [1, N] \setminus I$. Зададим линейное отображение

$$\pi_I: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^I,$$

положив $\pi_I L = 0$ и $\pi_I \alpha = \alpha$ при $\alpha \in \mathbb{C}^I$. Тогда

$$L = \{\alpha - \pi_I \alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}^J\}.$$

Обозначим через V_I совокупность функций $v(\beta, a)$ на $\mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^N$, перестановочных с операторами ∂_i и θ_i , $i = 1, \dots, N$, и удовлетворяющих условиям периодичности: $v(\beta - e_i, a) = v(\beta, a)$, $i \in I$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что существует функция $\Phi(\alpha, a)$ на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$(\theta_i \Phi)(\alpha, a) = \alpha_i \Phi(\alpha, a), \quad (5)$$

$$(\partial_i \Phi)(\alpha, a) = \begin{cases} \Phi(\alpha - e_i, a) & \text{при } \alpha_i \neq 0, \\ 0 & \text{при } \alpha_i = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$i = 1, \dots, N$. Тогда системе уравнений (1)–(3) формально удовлетворяют следующие формальные ряды:

$$f(\alpha, a) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^J} v(\pi_I(\alpha - m), a) \Phi(\pi_I(\alpha - m) + m, a), \quad (7)$$

где I — произвольная база, $v \in V_I$; суммирование ведется по подмножеству $\mathbb{Z}_+^J \subset \mathbb{Z}^J$ векторов с неотрицательными координатами.

В частности, положив $v(\beta, a) = e^{2\pi i \langle k, \beta \rangle}$, где $k \in (\mathbb{Z}^I)'$, получаем для каждой базы I следующий набор формальных решений системы (1)–(3):

$$f_{I,k}(\alpha, a) = e^{2\pi i \langle k, \pi_I \alpha \rangle} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^J} e^{-2\pi i \langle k, \pi_I m \rangle} \Phi(\pi_I(\alpha - m) + m, a).$$

В силу теоремы конструкция решений систем (1)–(3) для различных операторов ∂_i и θ_i сводится к явному описанию функции $\Phi(\alpha, a)$, удовлетворяющей условиям (5), (6), и исследованию условий сходимости рядов (7). В случае $\partial_i = \partial/\partial a_i$ и $\theta_i = a_i \partial/\partial a_i$ функция $\Phi(\alpha, a)$ имеет вид

$$\prod_{i=1}^N \frac{a_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}.$$

Явное выражение функции Φ для (r, s) -аналогов и разностных аналогов GG -систем см. в пп. 3 и 4. Заметим, что вместе с функцией Φ условиям (5), (6) удовлетворяют также функции $\varphi\Phi$, где $\varphi(\alpha, a)$ — произвольная функция на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, удовлетворяющая условию (2) и условиям периодичности $\varphi(\alpha - e_i, a) = \varphi(\alpha, a)$ для любого $i = 1, \dots, N$ и перестановочная с операторами ∂_i и θ_i .

3. Рассмотрим систему (1)–(3), в которой $\theta_i = a_i \partial/\partial a_i$, а ∂_i — произвольные линейные операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (4). Такие операторы ∂_i действуют на мономы $a^\alpha = a^{\alpha_1} \dots a^{\alpha_N}$ по

формуле $\partial_i a^\alpha = u_i(\alpha) a^{\alpha - e_i}$, а их попарная перестановочность эквивалентна соотношению

$$u_i(\alpha) u_j(\alpha - e_i) = u_j(\alpha) u_i(\alpha - e_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Предположим, что u_i — аналитические функции, удовлетворяющие условию

$$u_i(\alpha) = 0 \quad \text{при } \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

и что существует аналитическая функция $\Gamma_u(\alpha)$, удовлетворяющая функциональным уравнениям

$$\Gamma_u(\alpha + \mathbb{I}) = u_i(\alpha) \Gamma_u(\alpha + \mathbb{I} - e_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)$. Тогда условиям (5), (6) удовлетворяет функция $\Phi(\alpha, a) = a^\alpha / \Gamma_u(\alpha + \mathbb{I})$. Далее, V_I для любой базы I состоит из функций $v(\beta)$ на $\mathbb{C}^I$, удовлетворяющих условиям периодичности $v(\beta - e_i) = v(\beta)$ при $i \in I$. Таким образом, в силу п. 2, каждой базе I отвечает следующий набор формальных решений системы (1)–(3):

$$f(\alpha, a) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^J} \left(v(\pi_I(\alpha - m)) \frac{a^{\pi_I(\alpha - m) + m}}{\Gamma_v(\pi_I(\alpha - m) + m + \mathbb{I})} \right), \quad v \in V_I.$$

ПРИМЕР. (r, s) -аналоги GG -систем: ∂_i — оператор (r_i, s_i) -дифференцирования по $t = a_i$,

$$(\partial_i f)(t) = \frac{f(r_i t) - f(s_i t)}{t(r_i - s_i)}, \quad 0 < |r_i| < |s_i|.$$

Тогда $u_i(\alpha) = (r_i^{\alpha_i} - s_i^{\alpha_i}) / (r_i - s_i)$ и, положив $q_i = r_i s_i^{-1}$, имеем $\Gamma_u(\alpha) = \prod_{i=1}^N \Gamma_{u_i}(\alpha_i)$, где

$$\Gamma_{u_i}(\alpha_i) = s_i^{(\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2)/2} (1 - q_i)^{1 - \alpha_i} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - q_i^{k+1}}{1 - q_i^{k + \alpha_i}}.$$

Условия сходимости таких рядов легко получаются из оценки

$$\Gamma_{u_i}(\alpha_i) \sim c s_i^{(\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2)/2} (1 - q_i)^{1 - \alpha_i} \quad \text{при } \operatorname{Re} \alpha_i \rightarrow +\infty.$$

Отметим, что если L — одномерное подпространство, порожденное вектором $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, то при подходящем выборе чисел r_i, s_i в качестве решений получаются q -аналоги обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_q$, см. [3, 4].

4. Рассмотрим систему уравнений (1)–(3), в которой

$$\begin{aligned} (\partial_i f)(\alpha, a) &= \frac{1}{h_i} (f(\alpha, a) - f(\alpha, a - h_i e_i)), \\ (\theta_i f)(\alpha, a) &= \frac{a_i}{h_i} (f(\alpha, a + h_i e_i) - f(\alpha, a)), \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, N$, где h_i — произвольные фиксированные числа. Ее решения назовем разностными GG -функциями, ассоциированными с подпространством L . Легко убедиться, что операторы ∂_i и θ_i удовлетворяют коммутационным соотношениям (4). Заметим также, что в пределе при $h_i \rightarrow 0$ они переходят соответственно в операторы $\partial / \partial a_i$ и $a_i \partial / \partial a_i$.

Для таких систем имеем

$$\Phi(\alpha, a) = \prod_{i=1}^N \left(h_i^{\alpha_i} \frac{\Gamma(\alpha_i + a_i/h_i)}{\Gamma(\alpha_i + 1)\Gamma(a_i/h_i)} \right);$$

V_I состоит из функций $v(\beta, a)$ на $\mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условиям

$$v(\beta - e_i, a + h_j e_j) = v(\beta, a), \quad i \in I, \quad j = 1, \dots, N.$$

Согласно п. 2, разностной GG -системе формально удовлетворяют следующие ряды:

$$f(\alpha, a) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^J} \left\{ v(\pi_I(\alpha - m), a) \prod_{i \in I} \frac{h_i^{\pi_I(\alpha - m)_i} \Gamma(\pi_I(\alpha - m)_i + a_i/h_i)}{\Gamma(\pi_I(\alpha - m)_i + 1) \Gamma(a_i/h_i)} \right. \\ \left. \times \prod_{j \in J} \frac{a_j(a_j + h_j) \cdots (a_j + (m_j - 1)h_j)}{m_j!} \right\}, \quad (8)$$

где I — произвольная база, $v \in V_I$, $\pi_I: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^I$ — проекция с ядром L и $(\pi_I \alpha)_i$ есть i -я координата вектора $\pi_I \alpha$.

В случае ограниченного v ряд (8) сходится, если, например, $\prod_{i \in I} |h_i^{-(\pi_I e_j)_i}| \leq 1$ для всех $i \in I$ и $\operatorname{Re}(a_i/h_i) < 0$, $i = 1, \dots, N$.

ПРИМЕР. $L \subset \mathbb{C}^N$ — одномерное подпространство, порожденное вектором $(1, \dots, 1)$, и $h_1 = \dots = h_N = 1$. Решением системы (1)–(3), отвечающим $I = \{1, \dots, N-1\}$ и $v \equiv 1$, является

$$f(\alpha, a) = c(\alpha, a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 - \alpha_N + a_1)_n \cdots (\alpha_{N-1} - \alpha_N + a_{N-1})_n (a_N)_n}{(\alpha_1 - \alpha_N + 1)_n \cdots (\alpha_{N-1} - \alpha_N + 1)_n n!}, \quad (9)$$

где

$$c(\alpha, a) = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha_i - \alpha_N + 1)}{\Gamma(\alpha_i - \alpha_N + a_i) \Gamma(a_i)} \quad \text{и} \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1).$$

Если рассматривать $\beta_i = \alpha_i - \alpha_N + 1$ и $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_N + a_i$, $i = 1, \dots, N-1$, как параметры, то как функция от a_N ряд (9) является разностным аналогом гипергеометрического ряда Похгаммера; см. [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Зелевинский А. В. ДАН, **295**, вып. 1, 14–19 (1987).
2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. УМН, **47**, вып. 4, 3–82 (1992).
3. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. ДАН, **331**, вып. 2, 140–143 (1993).
4. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. ДАН, **333**, вып. 5, 567–570 (1993).
5. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С., Спиринов С. А. ДАН, **336**, вып. 6, 730–732 (1994).
6. Гельфанд И. М., Граев М. И. ДАН, **354**, вып. 2, 155–158 (1997).
7. Гельфанд И. М., Граев М. И. ДАН, **354**, вып. 5, 583–586 (1997).
8. Граев М. И. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 1, 72–76 (1995).