Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Икромов, Ф. Шарипов, О дискретном спектре неаналитической матричнозначной модели Фридрихса, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 63–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:26:16

УДК 517.984.46

О дискретном спектре неаналитической матричнозначной модели Фридрихса*

© 1998. И. А. ИКРОМОВ, Ф. ШАРИПОВ

1. Рассмотрим самосопряженный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^\nu, \mathbb{C}^n)$ по формуле

$$(Hf)(x) = (H(K)f)(x) = U(x)f(x) + \int_{\mathbb{T}^\nu} K(x, y)f(y) dy. \quad (1)$$

Здесь $\mathbb{T}^\nu$ — это ν -мерный тор, $\mathbb{C}^n$ есть n -мерное комплексное пространство, $L^2(\mathbb{T}^\nu, \mathbb{C}^n)$ — комплексное гильбертово пространство квадратично суммируемых по норме функций на $\mathbb{T}^\nu$ со значениями в $\mathbb{C}^n$, а $U(x)$ и $K(x, y)$ — непрерывные функции соответственно на $\mathbb{T}^\nu$ и $\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$ со значениями в пространстве $M_n(\mathbb{C})$ комплексных $n \times n$ -матриц, удовлетворяющие условиям

$$U^*(x) = U(x), \quad K^*(x, y) = K(y, x), \quad (2)$$

где $*$ означает переход к сопряженной матрице.

Впервые оператор вида (1) в пространстве $L^2(-1, 1)$ был рассмотрен К. Фридрихсом [1, 2] в случае $U(x) = x$ в качестве простой модели теории возмущений непрерывного спектра. Непосредственное развитие модель Фридрихса получила в работах [3–9] и др.

В случае когда матричнозначные функции $U(x)$ и $K(x, y)$ являются аналитическими, спектральные свойства оператора вида (1) изучены в работах [6, 7, 9–11]. В частности, при некоторых дополнительных условиях доказана конечность дискретного спектра оператора H .

В этой работе установлена конечность дискретного спектра оператора H для более широкого класса функций $U(x)$ и $K(x, y)$.

2. Обозначим через $\Sigma_{\text{ess}}(H)$ существенный спектр оператора H , а через $\Delta_z(x)$ определитель матрицы $U(x) - zE$, где E — единичная матрица, $z \in \mathbb{C}$. Из теоремы Вейля о существенном спектре и принципа минимакса (см. [12]) следует справедливость следующих соотношений:

$$\Sigma_{\text{ess}}(H) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^\nu} \{z \in \mathbb{C} : \Delta_z(x) = 0\} = \bigcup_{i=1}^k [m_i, M_i],$$

где $[m_i, M_i]$ ($i = 1, \dots, k$, $k \leq n$) — попарно непересекающиеся сегменты.

Обозначим через Γ множество $\{m_1, \dots, m_k, M_1, \dots, M_k\}$.

ЛЕММА 1. Для любого фиксированного $z \in \Gamma$ число $A = 0$ является глобальным экстремальным значением непрерывной на торе $\mathbb{T}^\nu$ вещественнозначной функции $\Delta_z(x)$.

* Исследование было частично поддержано Узбекским фондом фундаментальных исследований (конт. № 44) и Международным научным фондом (грант No. MGM000).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная вещественнозначная функция на торе $\mathbb{T}^\nu$. Экстремальная точка $x^0 \in \mathbb{T}^\nu$ функции $\varphi(x)$ называется конечнократной, если существуют числа $m > 0$, $c > 0$ и окрестность $V(x^0)$ точки x^0 , такие, что для каждого $x \in V(x^0)$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(x^0)| \geq c|x - x^0|^m, \quad \text{где } |x - x^0|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_\nu - x_\nu^0)^2. \quad (3)$$

В противном случае экстремальная точка x^0 называется бесконечнократной. Точная нижняя грань множества чисел $m > 0$, для которых выполняется условие (3), называется кратностью экстремальной точки x^0 . Кратностью экстремального значения A функции $\varphi(x)$ называется сумма кратностей всех экстремальных точек из $\varphi^{-1}(A)$, где $\varphi^{-1}(A)$ — полный прообраз точки A при отображении φ .

Обозначим через $C^{\alpha+0}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, M_n(\mathbb{C}))$ пространство непрерывных матричнозначных функций $K(x, y)$ на $\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$, таких, что для любого мультииндекса β с $|\beta| \leq [\alpha]$ производная $K^{(\beta)}(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\{\alpha\} + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α и $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что для каждого фиксированного $z \in \Gamma$ число $A = 0$ является экстремальным значением функции $\Delta_z(x)$ кратности $\leq \mu$, где μ — некоторое положительное число. Тогда для любой функции $K(x, y)$ из класса $C^{2\mu-\nu/2+0}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, M_n(\mathbb{C}))$ оператор H имеет лишь конечное число собственных значений (с учетом кратностей) вне существенного спектра.*

При доказательстве теоремы 1 используется следующая лемма:

ЛЕММА 2. *Пусть $z \in \Gamma$. Если матричнозначная функция $K(x, y)/\Delta_z(x)$ квадратично суммируема по норме на $\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$, то существует положительное число $\varepsilon = \varepsilon(z)$, такое, что оператор H , определяемый по формуле (1), имеет лишь конечное число собственных значений (с учетом кратностей) в множестве $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \setminus \Sigma_{\text{ess}}(H)$.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Из условий теоремы 1 следует, что для каждого $z \in \Gamma$ функцию $K(x, y)$ можно представить в виде

$$K(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y)$$

так, чтобы выполнялись условия

$$\|K_1(x, y)/\Delta_z(x)\| \in L^2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu), \quad K_1^*(x, y) = K_1(y, x), \quad K_2^*(x, y) = K_2(y, x)$$

и интегральный оператор с ядром $K_2(x, y)$ в пространстве $L^2(\mathbb{T}^\nu, \mathbb{C}^n)$ являлся конечномерным. В силу леммы 2 существует положительное число $\varepsilon = \varepsilon(z)$, такое, что оператор $H(K_1)$ имеет лишь конечное число собственных значений (с учетом кратностей) в множестве $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \setminus \Sigma_{\text{ess}}(H)$. Так как при конечномерном возмущении мощность дискретного спектра меняется лишь на конечное число (см. [12]), то оператор $H(K) = H(K_1 + K_2)$ также имеет конечное число собственных значений в множестве $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \setminus \Sigma_{\text{ess}}(H)$. Поскольку точками сгущения дискретного спектра оператора H могут быть только точки из Γ , то отсюда следует справедливость утверждения теоремы 1.

3. Предположим, что матричнозначная функция $U(x)$ является аналитической. Тогда для каждого фиксированного $z \in \mathbb{R}$ функция $\Delta_z(x)$ является вещественно-аналитической на $\mathbb{T}^\nu$. Из неравенства Лоясевича (см. [13]) следует, что изолированная экстремальная точка вещественно-аналитической функции на торе $\mathbb{T}^\nu$ является конечнократной экстремальной точкой в смысле определения 1. Поэтому из теоремы 1 следует справедливость следующей теоремы, которая является обобщением аналогичных теорем из работ [6, 9] о конечности дискретного спектра.

ТЕОРЕМА 2. Пусть матричнозначная функция $U(x)$ аналитична на $\mathbb{T}^\nu$ и для каждого $z \in \Gamma$ множество $\Delta_z^{-1}(0)$ конечно. Тогда существует положительное число $s > 0$, такое, что для каждой матричнозначной функции $K(x, y)$ из класса $C^{s+0}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, M_n(\mathbb{C}))$ оператор H имеет конечное число собственных значений (с учетом кратностей) вне существенного спектра.

Как показывают примеры, в теореме 2 условие конечности множества $\Delta_z^{-1}(0)$ является существенным.

4. Пусть $\varphi \in C^s(\mathbb{T}^\nu)$, где s — натуральное число. Через $J_a^s \varphi$, $a \in \mathbb{T}^\nu$, обозначается s -струя функции φ в точке a (см. [13]). Из теоремы 1 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $U(x) \in C^{\mu+3}(\mathbb{T}^\nu, M_n(\mathbb{C}))$, где μ — некоторое натуральное число. Если для любых $z \in \Gamma$ и $a \in \Delta_z^{-1}(0) = L$ существует гладкая функция $\psi(x)$ на $\mathbb{T}^\nu$, для которой точка a является критической точкой кратности $n(a)$ и $J_a^{\mu+1} \Delta_z = J_a^{\mu+1} \psi$, $\sum_{a \in L} n(a) \leq \mu$, то для любой функции $K(x, y) \in C^{2\mu+2-\nu/2+0}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, M_n(\mathbb{C}))$ оператор H имеет конечное число собственных значений (с учетом кратностей) вне существенного спектра.

Авторы выражают глубокую благодарность С. Н. Лакаеву за полезные обсуждения, а также Р. А. Минлосу и рецензентам за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** Friedrichs K. Ann. Math., **97**, 247–274 (1938).
- 2.** Friedrichs K. Comm. Pure Appl. Math., **1**, 361–406 (1948).
- 3.** Ладыженская О. А., Фаддеев Л. Д. Докл. АН СССР, **145**, № 2, 301–304 (1962).
- 4.** Фаддеев Л. Д. Труды МИАН СССР, **73**, 292–313 (1964).
- 5.** Павлов Б. С., Петрас С. В. Функци. анализ и его прил., **4**, вып. 2, 54–56 (1970).
- 6.** Lakaev S. N. Comm. Math. Univ. Carolinae, **27**, 341–357 (1986).
- 7.** Лакаев С. Н. Докл. АН УзССР, № 4, 9–10 (1979).
- 8.** Дынкин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И. Алгебра и анализ, **3**, вып. 2, 77–90 (1991).
- 9.** Abdullaev Zh. I., Lakaev S. N. Advances in Soviet Math., **5**, 1–37 (1991).
- 10.** Minlos R. A., Mogilner A. I. Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard, P. Exner, P. Seba, eds., Inst. Nucl. Res., Dubna (USSR), Singapore, 1988, p. 243–257.
- 11.** Маматов Ш. С., Минлос Р. А. Теор. матем. физ., **79**, 163–180 (1989).
- 12.** Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4, Анализ операторов. Мир, М., 1982.
- 13.** Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. Мир, М., 1968.

Самаркандский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
27 апреля 1995 г.