Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 20–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa4>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 03:31:06

УДК 517.9

Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом*

© 2006. С. А. НАЗАРОВ

§1. Постановка задачи

1. Задача о резонаторе с цилиндрическим волноводом. Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, совпадающая внутри полупространства $\mathbb{R}_+^n = \{x = (y, z) : y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, z = x_n > 0\}$ с цилиндром $Q = \{x : y \in \omega, z \in \mathbb{R}\}$ (волноводом); здесь ω — область в $\mathbb{R}^{n-1}$, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью $\partial\omega$. Считаем, что подмножество $G = \{x \in \Omega : z < 0\}$ (резонатор) имеет компактное замыкание $\overline{G} = G \cup \partial G$. В области Ω рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned}\Delta_x u(x) + k^2 u(x) &= 0, & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Как известно, задачу (1.1) нужно дополнить подходящими условиями излучения на бесконечности. Пусть λ_n и φ_n — собственные числа и отвечающие им собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta_y$ на сечении ω , причем

$$\begin{aligned}0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty, \\ (\varphi_n, \varphi_m)_\omega &= \delta_{n,m}, & n, m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\},\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, а $(\cdot, \cdot)_\omega$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\omega)$. Предположим сначала, что $\lambda_n \neq k^2$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и введем обозначения

$$\begin{aligned}U_n^\pm(x) &= (2|\Lambda_n|)^{-1/2} \exp(\mp i\Lambda_n z) \varphi_n(y), \\ \Lambda_n &= (k^2 - \lambda_n)^{1/2}, & \operatorname{Re} \Lambda_n \geq 0, \operatorname{Im} \Lambda_n \geq 0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

При $n \in N_- = \{m \in \mathbb{N} : \lambda_m < k^2\}$ формула (1.3) задает *осциллирующие* волны в цилиндре Q ; в случае $n \in N_+ = \{m \in \mathbb{N} : \lambda_m > k^2\}$ волна U_n^- экспоненциально затухает, а волна U_n^+ экспоненциально возрастает при $z \rightarrow +\infty$. Положим $N_+ = \{\mathbf{n} + 1, \mathbf{n} + 2, \dots\}$.

Если имеется собственное значение $\lambda_{\mathbf{n}-\varkappa+1} = \dots = \lambda_{\mathbf{n}} = k^2$ ненулевой кратности $\varkappa$ (такая ситуация называется *пороговой*), то $\Lambda_{\mathbf{n}-\varkappa+1} = \dots = \Lambda_{\mathbf{n}} = 0$, а вместо волн вида¹⁾ (1.3)₁ для соответствующих значений n имеются пары волн

$$U_n^0(x) = \varphi_n(y), \quad U_n^1(x) = z\varphi_n(y), \quad n = \mathbf{n} - \varkappa + 1, \dots, \mathbf{n}.\tag{1.4}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00567).

¹⁾Нижний индекс указывает номер строки в соответствующей формуле.

При этом $N_- = \{1, \dots, \mathbf{n} - \varkappa\}$. Положим также $N_0 = N_- \cup \{\mathbf{n} - \varkappa + 1, \dots, \mathbf{n}\}$. Разумеется, величины $\mathbf{n}$, $\varkappa$ и множества N_+ , N_- , N_0 зависят от k и ω , но это не отражено в обозначениях. Заметим, что $N_0 \neq N_-$ только в пороговой ситуации.

При отсутствии пороговых собственных значений *физические* условия излучения, отвечающие прибытию волны U_p^+ с бесконечности и ее отражению резонатором G , выглядят так:

$$u_p(x) = U_p^+(x) + \sum_{q=1}^{\mathbf{n}} s_{pq} U_q^-(x) + O(e^{-z \operatorname{Im} \Lambda_{\mathbf{n}+1}}), \quad p = 1, \dots, \mathbf{n}. \quad (1.5)$$

Набор $\{u_1, \dots, u_{\mathbf{n}}\}$ решений задачи (1.1), (1.5) определяет $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ -матрицу рассеяния $s = (s_{pq})$, которая оказывается унитарной (см., например, [1]).

В пороговой ситуации к совокупности уходящих волн $U_1^-, \dots, U_{\mathbf{n}-\varkappa}^-$ обычно присоединяют «стоячие» волны $U_{\mathbf{n}-\varkappa+1}^0, \dots, U_{\mathbf{n}}^0$ из списка (1.4) (частный случай осциллирующих), однако получающиеся таким образом физические условия излучения не позволяют определить унитарную матрицу рассеяния размера $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$. Дело в том, что осциллирующие волны $U_1^\pm, \dots, U_{\mathbf{n}-\varkappa}^\pm$ подчинены условиям

$$\mathbf{q}(U_m^\pm, U_n^\pm) = \pm i \delta_{m,n}, \quad \mathbf{q}(U_m^\pm, U_n^\mp) = 0, \quad (1.6)$$

обеспечивающим унитарность матрицы рассеяния, но $\mathbf{q}(U_n^0, U_n^0) = 0$ при $n = \mathbf{n} - \varkappa + 1, \dots, \mathbf{n}$. В левых частях соотношений (1.6) расположена антисимметричная полуторалинейная форма

$$\mathbf{q}(u, v) = \int_{\omega} (u(y, 0) \overline{\partial_z v(y, 0)} - \overline{v(y, 0)} \partial_z u(y, 0)) dy. \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что для волн $(1.3)_1$ и (1.4), удовлетворяющих задаче (1.1) в цилиндре Q , интеграл (1.7), возникающий в формуле Грина, не зависит от выбора сечения, т. е. в равной мере аргументами функций из подынтегрального выражения (1.7) могут служить y, t при любом $t \in \mathbb{R}$.

В статье [2] (см. также § 5.6 книги [3]) замечено, что для линейных комбинаций волн (1.4)

$$U_n^\pm(x) = 2^{-1/2} (U_n^0(y) \mp i U_n^1(y, z)), \quad n = \mathbf{n} - \varkappa + 1, \dots, \mathbf{n}, \quad (1.8)$$

соотношения (1.6) также оказываются верными, а значит, матрица s коэффициентов из представлений (1.5) с волнами $(1.3)_1$ и (1.8) вновь становится унитарной (см., например, [2]). Условия излучения (1.5), включающие линейно растущие волны, названы *естественными*.

2. «Ловушечные моды». Физически осмысленным является поиск чисел $k \in \mathbb{R}_+$, при которых задача (1.1) имеет нетривиальные решения, исчезающие на бесконечности, — по понятной причине они называются ловушечными модами. При помощи метода Фурье можно убедиться в том, что упомянутые решения убывают с экспоненциальной скоростью и образуют конечномерный линейал $\mathfrak{D}$ (это верно и для общих эллиптических краевых задач; см., например, гл. 3 и 5 в [3]). К настоящему времени разными методами построено множество примеров затухающих решений для различных краевых условий и форм области Ω (см. [4–12] и др.). В [13] для задачи о падении плоской волны на периферическую границу и в [14] для общих самосопряженных эллиптических задач

разработана процедура, оперирующая с *расширенной* матрицей рассеяния (см. далее разд. 2 §3) и позволяющая определить число линейно независимых решений, которые убывают не быстрее $O(e^{-\beta z})$ при заданном наперед показателе $\beta > 0$. Используемые в [13, 14] конструкции, первоначально имевшие отношение к постановке условий Соболева на ребрах границы (см. [15]), не допускают предельного перехода $\beta \rightarrow +\infty$, и поэтому вопрос об идентификации точечного спектра оператора задачи (1.1), рассматриваемого как неограниченный в $L_2(\Omega)$, тем не менее остался открытым. Подчеркнем, что элементы подпространства $\mathfrak{D} \subset L_2(\Omega)$ суть собственные функции этого оператора.

В настоящей статье строится унитарный оператор $\mathfrak{S}$ «фиктивного рассеяния» и устанавливается биективное отображение линеала $\mathfrak{D}$ на подпространство собственных векторов оператора $\mathfrak{S}_+$, отвечающих собственному числу 1 (теорема 3.1). Под $\mathfrak{S}_+$ подразумевается сужение оператора $\mathfrak{S}$ на ортогональное дополнение в $L_2(\omega)$ линейной оболочки функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Матрица рассеяния s и все расширенные матрицы рассеяния связываются с конечномерными аппроксимациями оператора $\mathfrak{S}$ (разд. 2 §3). Отметим, что оператор $\mathfrak{S}$ определяется по решениям смешанной краевой задачи в ограниченной области G и алгоритм его построения допускает численную реализацию.

§2. Оператор фиктивного рассеяния

1. Оператор Стеклова–Пуанкаре. Собственные функции φ_n образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(\omega)$. Введем оператор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = \varphi \mapsto T\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} i(\Lambda_n + \chi(n)) a_n \varphi_n, \quad (2.1)$$

где $\chi(n) = 1$ при $n = n - \varkappa + 1, \dots, n$ и $\chi(n) = 0$ для остальных целых n , т.е. вне порога слагаемое $\chi(n)$ в правой части (2.1) отсутствует. Поскольку $|\Lambda_n| = O(\lambda_n^{1/2})$ в силу определения (1.3), отображение $T: \mathring{H}^1(\omega) \rightarrow L_2(\omega)$ непрерывно; здесь $\mathring{H}^1(\omega)$ — подпространство функций из соболевского класса $H^1(\omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\omega$. Выполняется ортогональное разложение

$$L_2(\omega) = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_+, \quad (2.2)$$

в котором $\mathcal{L}_0$ — линейная оболочка собственных функций φ_n с индексами $n \in N_0$. Ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_+$ обозначим символами $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_+$. Форма

$$(T\varphi, \psi)_\omega = i \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda_n + \chi(n)) a_n \bar{b}_n,$$

где a_n и b_n — коэффициенты разложений функций φ и ψ по базису $\{\varphi_n\}$, определена по замыканию на пространстве $H_{00}^{1/2}(\omega)$ с нормой

$$\|[\varphi; H_{00}^{1/2}(\omega)]\| = (\|\varphi; H^{1/2}(\omega)\|^2 + \|\rho^{-1/2}\varphi; L_2(\omega)\|^2)^{1/2} \quad (2.3)$$

(см. §1.11 книги [16]), где $H^{1/2}(\omega)$ — пространство Соболева–Слободецкого, а $\rho(y) = \text{dist}(y, \partial\omega)$. Подчеркнем, что структура нормы (2.3) проистекает из условий Дирихле на $\partial\omega$ для собственных функций φ_n . В частности, следы на сечении $\Upsilon = \omega \times \{0\}$ функций из подпространства $\mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)$ (аннулируется след на

части $\Gamma = \partial\Omega \cap \partial G$ границы резонатора) попадают именно в $H_{00}^{1/2}(\omega)$. Поскольку $-i\Lambda_n > 0$ при $n \in N_+$ и $\Lambda_n > 0$ при $n \in N_-$, равенство $(T\varphi, \varphi)_\omega = 0$ имеет место только в случае $\varphi = 0$. Итак, T можно рассматривать как непрерывный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H_{00}^{1/2}(\omega)$. Его сужения T_0 и T_+ на подпространства $\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}_0\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_+ = \mathcal{P}_+\mathcal{H}$ являются кососимметрическим и симметрическим операторами соответственно; кроме того, операторы iT_0 и T_+ отрицательно определены.

При помощи метода Фурье нетрудно убедиться в том, что T — оператор Стеклова–Пуанкаре, сопоставляющий данным Дирихле Φ нормальную производную $\partial_z V(y, 0)$ решения V задачи

$$\begin{aligned} \Delta_x V(x) + k^2 V(x) &= 0, & x \in Q_+ = \omega \times \mathbb{R}_+, \\ V(x) &= 0, & x \in (\partial Q)_+ = \partial\omega \times \mathbb{R}_+, & V(y, 0) = \Phi(y), & y \in \omega, \end{aligned} \quad (2.4)$$

снабженной естественными (физическими вне порога) условиями излучения

$$V(x) - \sum_{n=1}^n a_n U_n^-(x) = O(e^{-z \operatorname{Im} \Lambda_{n+1}}). \quad (2.5)$$

Коэффициенты a_n , конечно же, самими условиями (2.5) не фиксируются.

Иными словами, для (единственного) решения задачи (2.4), (2.5) справедливо равенство $\partial_z V(y, 0) = T\Phi(y)$. В частности, благодаря соотношениям

$$\begin{aligned} \partial_z U_n^\pm(y, 0) - T U_n^\pm(y, 0) &= -(2|\Lambda_n|)^{-1/2} i \Lambda_n (1 \pm 1) \varphi_n(y), & n \in N_- \cup N_+, \\ \partial_z U_n^\pm(y, 0) - T U_n^\pm(y, 0) &= -2^{-1/2} i (1 \pm 1) \varphi_n(y), & n = \mathbf{n} - \kappa + 1, \dots, \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

задача (1.1), (1.5) в неограниченной области Ω эквивалентна задаче в ограниченной области G

$$\begin{aligned} \Delta_x w_p(x) + k^2 w_p(x) &= 0, & x \in G, & w_p(x) = 0, & x \in \Gamma = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n, \\ \partial_z w_p(y, 0) - T w_p(y, 0) &= g_p(y), & x \in \Upsilon = \omega \times \{0\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

в которой правая часть имеет вид

$$g_n(y) = -i(2\Lambda_n)^{1/2} \varphi_n(y), \quad n \in N_-, \quad g_n(y) = -i2^{1/2} \varphi_n(y), \quad n = \mathbf{n} - \kappa + 1, \dots, \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

Разрешимость задачи обеспечивается следующим утверждением, которое, в частности, гарантирует включение $w_p \in C^\infty(\overline{G})$.

ЛЕММА 2.1. *Сужение на множество G любого (гладкого) решения u_p задачи (1.1), (1.5) удовлетворяет задаче (2.7) с правой частью из (2.8), а обобщенное решение $w_p \in \dot{H}^1(G; \Gamma)$ последней задачи, выполненное на полуцилиндре Q_+ по формулам*

$$v_p(x) = U_p^+(x) + 2^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (|\Lambda_n| + \chi(n))^{1/2} b_{pn} U_n^-(x), \quad (2.9)$$

$$b_{pn} = a_{pn} - [2(|\Lambda_n| + \chi(n))]^{-1/2} \delta_{p,n}, \quad a_{pn} = (w_p|_{\Upsilon}, \varphi_n)_\omega,$$

является гладким на замыкании $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет задаче (1.1), (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о решениях u_p обеспечено выкладками (2.6). Из формул (2.9) следует, что функция $v_p \in \dot{H}_{\text{loc}}^1(\overline{Q}_+; \partial Q \setminus \Upsilon)$ является

гладкой при $z > 0$. Кроме того, она подчинена условиям излучения (1.5) и равенствам (2.4) с $\Phi(y) = w_p(y, 0)$. В силу формул (2.1) и (2.7)–(2.9) имеем

$$\begin{aligned} \partial_z w_p|_{\Upsilon} &= g_p + T w_p|_{\Upsilon} = -i[2(\Lambda_p + \chi(p))]^{1/2} \varphi_p + i \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda_n + \chi(n)) a_n \varphi_n \\ &= -i2^{-1/2} (\Lambda_p + \chi(p))^{1/2} \varphi_p + i \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda_n + \chi(n)) b_n \varphi_n = \partial_z v_p|_{\Upsilon}, \quad p = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Фигурирующие здесь ряды заведомо сходятся в $H_{00}^{-1/2}(\omega)$, однако, так как w_p и $\partial_z w_p$ совпадают с v_p и $\partial_z v_p$ на сечении Υ , функция, равная w_p на G и v_p на Q_+ , становится обобщенным решением задачи (1.1) и поэтому приобретает бесконечную дифференцируемость всюду в $\overline{\Omega}$ благодаря эллиптичности задачи. $\square$

Поскольку $u_p = v_p = w_p$ на Υ , соотношения (2.9), (1.5) и (1.2)₂ влекут за собой следующие интегральные представления элементов матрицы рассеяния:

$$s_{pq} = -\delta_{p,q} + [2(\Lambda_q + \chi(q))]^{1/2} \int_{\omega} w_p(y, 0) \varphi_q(y) dy, \quad p, q = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Отсюда вытекает, что даже при наличии нетривиальных затухающих решений задачи (1.1), а значит, и нетривиальных решений однородной задачи (2.7) матрица рассеяния s определена однозначно: следы на сечении Υ упомянутых решений ортогональны в $L_2(\omega)$ функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

2. Симметризация оператора Стеклова–Пуанкаре. Изменив в определении (2.1) коэффициенты при функциях $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots$, отвечающих экспоненциальным волнам, преобразуем оператор (2.1) в кососимметрический:

$$\mathcal{T} = T \mathcal{P}_0 - iT \mathcal{P}_+. \quad (2.11)$$

Симметрический оператор $\mathcal{M} = -i\mathcal{T}$ действует по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = \varphi \mapsto \mathcal{M} \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (|\Lambda_n| + \chi(n)) a_n \varphi_n \quad (2.12)$$

и является положительно определенным. Положительный квадратный корень из $\mathcal{M}$ обозначаем символом $\mathcal{M}^{1/2}$; он осуществляет изоморфизмы $H_{00}^{1/2}(\omega) \approx L_2(\omega)$ и $L_2(\omega) \approx H_{00}^{-1/2}(\omega)$, где $H_{00}^{-1/2}(\omega)$ — пространство, двойственное к $H_{00}^{1/2}(\omega)$. Обращаем внимание на легко проверяемые равенства

$$\mathcal{P}_0 \mathcal{M} = -i \mathcal{P}_0 T, \quad \mathcal{P}_+ \mathcal{M} = -\mathcal{P}_+ T. \quad (2.13)$$

Очевидно, что проекторы $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_+$ коммутируют с операторами T и $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$. Если рассматривать T как оператор в гильбертовом пространстве $H_{00}^{1/2}(\omega)$ (см. комментарий к определению (2.3)), то $\mathcal{M} = (T^* T)^{1/2}$.

Рассмотрим аналогичную (2.7) задачу

$$\begin{aligned} \Delta_x w(x) + k^2 w(x) &= 0, \quad x \in G, \quad w(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \\ \partial_z w(y, 0) - \mathcal{T} w(y, 0) &= g(y), \quad x \in \Upsilon = \partial G \setminus \overline{\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

в которой $g \in H_{00}^{-1/2}(\omega)$. Под обобщенным решением задачи (2.14) подразумеваем элемент w пространства $\mathfrak{H} := \dot{H}^1(G; \Gamma)$, удовлетворяющий при любой пробной функции $v \in \mathfrak{H}$ интегральному тождеству

$$(\nabla_x w, \nabla_x v)_G - k^2(w, v)_G - i(\mathcal{M}w, v)_\Gamma = (g, v)_\Gamma, \quad (2.15)$$

где $(\cdot, \cdot)_G$ — скалярное произведение в $L_2(G)$, а $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ — расширение скалярного произведения в $L_2(\Upsilon)$ до двойственности между пространствами $\mathcal{H} = H_{00}^{1/2}(\Upsilon)$ и $\mathcal{H}^* = H_{00}^{-1/2}(\Upsilon)$.

ЛЕММА 2.2. *При любой функции $g \in \mathcal{H}^*$ задача (2.15) = (2.14) имеет единственное обобщенное решение $w \in \mathfrak{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, переформулируем тождество (2.15)) как абстрактное уравнение

$$w + (K + iM)w = \mathfrak{g} \in \mathfrak{H}. \quad (2.16)$$

При этом K и M — непрерывные и симметрические операторы в пространстве $\mathfrak{H} = \dot{H}^1(G; \Gamma)$, снабженном скалярным произведением $(\nabla_x w, \nabla_x v)_G$, а правая часть $\mathfrak{g} \in \mathfrak{H}$ определена так, что $(\nabla_x v, \nabla_x \mathfrak{g})_G = (v, g)_\Gamma$ для любого $v \in \mathfrak{H}$. Оператор K компактный, т. е. по альтернативе Фредгольма достаточно убедиться в отсутствии нетривиальных решений $w^\pm \in \mathfrak{H}$ однородных уравнений

$$w^\pm + Kw^\pm \pm iMw^\pm = 0. \quad (2.17)$$

Если $w^\pm$ — такое решение, то, учитывая эквивалентность формулировок (2.15) и (2.16), получаем равенство

$$(\nabla_x w^\pm, \nabla_x w^\pm)_G - k^2(w^\pm, w^\pm)_G = \pm i(\mathcal{M}w^\pm, w^\pm)_\Gamma.$$

Поскольку левая часть вещественна, $(\mathcal{M}w^\pm, w^\pm)_\Gamma = 0$, т. е. $w^\pm|_\Gamma = 0$ благодаря положительной определенности оператора (2.12). Следовательно, функция $w^\pm$ принадлежит пространству $\dot{H}^1(G)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$(\nabla_x w^\pm, \nabla_x v)_G = k^2(w^\pm, v)_G \quad \forall v \in \dot{H}^1(G; \Gamma).$$

Иными словами, $w^\pm$ — собственная функция смешанной краевой задачи для оператора Лапласа. Как известно (см., например, [17]), нетривиальная собственная функция не может полностью аннулироваться на множестве Υ , где заданы условия Неймана. Полученное противоречие доказывает, что уравнения (2.17) имеют лишь тривиальные решения. $\square$

3. Унитарный оператор фиктивного рассеяния. Пусть $\varphi \in L_2(\omega)$, а $\mathscr{W}(\varphi) \in \dot{H}^1(G; \Gamma)$ — решение задачи (2.15) с функцией

$$g = -2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\varphi \quad (2.18)$$

в правой части. Определим оператор $\mathfrak{S}$ в пространстве $L_2(\omega)$ по формуле

$$\mathfrak{S}\varphi = i\varphi - 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\mathscr{W}(\varphi)|_\Gamma. \quad (2.19)$$

Подчеркнем, что в случае $\varphi = \varphi_n$, где $n = 1, \dots, \mathbf{n}$, функции (2.18) и (2.8) совпадают. Поскольку

$$\|\mathscr{W}(\varphi); H_{00}^{1/2}(\Upsilon)\| \leq c\|\mathscr{W}(\varphi); H^1(G)\| \leq c\|g; H_{00}^{-1/2}(\omega)\| \leq c\|\varphi; L_2(\omega)\|,$$

оператор $\mathfrak{S}$ непрерывен. Проверим его изометричность.

Пусть $\varphi, \psi \in L_2(\omega)$. Напишем дважды тождество (2.15), положив один раз $w = \mathcal{W}(\varphi)$, $v = \mathcal{W}(\psi)$, а другой $w = \mathcal{W}(\psi)$, $v = \mathcal{W}(\varphi)$. Второе тождество после комплексного сопряжения вычтем из первого. Формула (2.18) обеспечивает равенство

$$0 = i(\mathcal{M}\mathcal{W}(\varphi) - 2^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}\varphi, \mathcal{W}(\varphi))_{\Upsilon} + i(\mathcal{W}(\varphi), \mathcal{M}\mathcal{W}(\psi) - 2^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}\psi)_{\Upsilon}.$$

Продолжим преобразование правой части при помощи соотношения (2.19):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{i}{2}(2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{W}(\varphi) - 2i\varphi, 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{W}(\psi))_{\Upsilon} \\ &\quad + \frac{i}{2}(2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{W}(\varphi), 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{W}(\psi) - 2i\psi)_{\Upsilon} \\ &= \frac{i}{2}((- \mathfrak{S}\varphi - i\varphi, - \mathfrak{S}\psi + i\psi)_{\Upsilon} + (- \mathfrak{S}\varphi + i\varphi, - \mathfrak{S}\psi - i\psi)_{\Upsilon}) \\ &= i(\mathfrak{S}\varphi, \mathfrak{S}\psi)_{\Upsilon} - i(\varphi, \psi)_{\Upsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\mathfrak{S}$ изометричен.

ТЕОРЕМА 2.1. $\mathfrak{S}$ — унитарный оператор в $L_2(\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось убедиться в сюръективности оператора $\mathfrak{S}$. Пусть Ψ — произвольный элемент пространства $L_2(\Omega)$, а $V \in \mathring{H}^1(G; \Gamma)$ — решение задачи (2.15), в которой краевое условие на сечении Υ заменено таким:

$$\partial_z V(y, 0) + \mathcal{T}V(y, 0) = 2^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}\Psi(y), \quad y \in \omega.$$

В лемме 2.2 было показано, что видоизмененная задача также однозначно разрешима. Положим $\varphi = -i\Psi - 2^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}V \in L_2(\omega)$; тогда выполняется равенство $\partial_z V|_{\Upsilon} - \mathcal{T}V|_{\Upsilon} = 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\varphi$, т. е. $V = -\mathcal{W}(\varphi)$ в силу определения (2.18). Теперь соотношение (2.19) принимает вид

$$\mathfrak{S}\varphi = i(-i\Psi - 2^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}V) - 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{W}(\varphi) = \Psi,$$

что и требовалось. $\square$

Унитарный оператор $\mathfrak{S}$ назовем *оператором фиктивного рассеяния* — причины выбора термина поясняются в разд. 2 §3. Отметим, что формула (2.19) весьма похожа на определение *характеристического оператора узла* (см. [18, §1.3]), но содержит «лишний» множитель i , а именно, характеристический оператор в [18] совпадает с матрицей рассеяния s (см. далее следствие 3.1). Однако на этом и кончаются аналогии с книгой [18], в которой подпространство $\ker\{s - \mathbb{I}_0\}$ собственных векторов матрицы рассеяния s , отвечающих собственному числу 1, ассоциируется с *собственными внутренними состояниями узла* и возможностью *закрытия каналов рассеяния*. Постановка искусственных краевых условий $(2.14)_2$ в некотором не связанном с определениями из [18] смысле «открывает» все возможные каналы рассеяния, а в финальной формуле (3.12) фигурирует собственное число $-i$ матрицы рассеяния s . В частности, последнее обстоятельство создает впечатление ненатуральности «рассеяния», порождающего оператор $\mathfrak{S}$, который далее послужит для описания необходимых и достаточных условий существования экспоненциально затухающих решений задачи (1.1).

§3. Критерий существования ловушечных мод

1. Основная теорема. Цель этого раздела — установить взаимно однозначное соответствие между подпространством $\mathfrak{D}$ экспоненциально затухающих решений однородной задачи (1.1) и линейалом $\ker(\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+)$ собственных функций оператора $\mathfrak{S}_+ = \mathcal{P}_+ \mathfrak{S} \mathcal{P}_+$ в $\mathcal{L}_+$, отвечающих собственному числу 1; здесь $\mathbb{I}_+$ — тождественное отображение в $\mathcal{L}_+$, а $\mathcal{L}_+$ — компонента ортогонального разложения (2.2).

ТЕОРЕМА 3.1. Отображение

$$L_2(\omega) = \mathfrak{D} \ni u \mapsto \mathfrak{N}u = \varphi := 2^{-1/2}(1-i)\mathcal{M}^{1/2}u|_{\Upsilon} \quad (3.1)$$

является взаимно однозначным отображением на линейал $\ker\{\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+\} \subset \mathcal{L}_+ \subset L_2(\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду экспоненциального затухания решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, суженное на полуцилиндр Q_+ , допускает разложение

$$u|_{Q_+} = \sum_{n=\mathbf{n}+1}^{\infty} a_n U_n^-. \quad (3.2)$$

Таким образом, $u|_{\Upsilon} \in \mathcal{H}_+$ и $\varphi \in \mathcal{M}^{1/2}\mathcal{H}_+ = \mathcal{L}_+$. Кроме того, используя формулы (2.13) и (3.1), заключаем, что $u|_G$ — решение задачи (2.14) с правой частью

$$g = \partial_z u|_{\Upsilon} - \mathcal{T}u|_{\Upsilon} = -\mathcal{M}u|_{\Upsilon} - i\mathcal{M}u|_{\Upsilon} = -2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\varphi.$$

Сравнивая это равенство с определением (2.18), видим, что $\mathcal{W}(\varphi) = u|_G$. Следовательно, согласно формулам (3.1) и (2.19) выполняется соотношение

$$\mathfrak{S}\varphi = i\varphi - 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}u|_{\Upsilon} = i\varphi - i(1+i)\varphi = \varphi,$$

означающее, в частности, что $\mathcal{P}_+ \mathfrak{S}\varphi = \varphi$. Иными словами, образ $\mathfrak{N}\mathfrak{D}$ содержится в ядре $\ker\{\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+\}$. Отображение (3.1) инъективно, так как при $u|_{\Upsilon} = 0$ разложение (3.2) влечет за собой невозможное равенство $u|_{Q_+} = 0$.

Для проверки сюръективности построим обратный оператор $\mathfrak{N}^{-1}: \ker\{\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+\} \rightarrow \mathfrak{L}$. Прежде всего заметим, что, учитывая изометричность оператора $\mathfrak{S}$, при $\varphi \in \ker\{\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+\}$ имеем

$$\|\varphi\|^2 = \|\mathfrak{S}\varphi\|^2 = \|\mathcal{P}_+ \mathfrak{S}\varphi\|^2 + \|\mathcal{P}_0 \mathfrak{S}\varphi\|^2 \implies \mathcal{P}_0 \mathfrak{S}\varphi = 0, \quad (3.3)$$

т. е. $\mathfrak{S}\varphi = \varphi$. При учете соотношений (2.14)₂ и (2.18), (2.19) находим, что

$$\begin{aligned} \partial_z \mathcal{W}(\varphi)|_{\Upsilon} &= i\mathcal{M}\mathcal{W}(\varphi)|_{\Upsilon} - 2^{1/2}i\mathcal{M}^{1/2}\varphi \\ &= 2^{-1/2}\mathcal{M}^{1/2}(i\varphi - \mathfrak{S}\varphi - 2i\varphi) = -2^{-1/2}(1+i)\mathcal{M}^{1/2}\varphi, \\ \mathcal{W}(\varphi) &= 2^{-1/2}i\mathcal{M}^{-1/2}(\mathfrak{S}\varphi - i\varphi) = 2^{-1/2}(1+i)\mathcal{M}^{-1/2}\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Нетрудно усмотреть, что ряд (3.2) с коэффициентами $a_n = (1+i)(\varphi, \varphi_n)_{\omega}$ сходится в пространстве $\mathring{H}^1(Q; \partial Q_+ \setminus \Upsilon)$ и экспоненциально затухает на бесконечности, причем согласно определениям (1.3)₁ и (1.8) сужения $\partial_z u|_{\Upsilon}$ и $u|_{\Upsilon}$ совпадают с выражениями (3.4). Итак, построено продолжение $\mathcal{W}(\varphi)$ в классе $\mathring{H}^1(\Omega)$, являющееся (обобщенным) решением задачи (1.1). Осталось повторить конец доказательства леммы 2.1. $\square$

2. Конечномерные аппроксимации оператора фиктивного рассеяния. Возьмем $\beta > 0$ и образуем линейную оболочку $\mathcal{L}_\bullet^\beta$ тех функций φ_n , для которых $n \in N^\beta = \{m \in \mathbb{N} : |\Lambda_m| < \beta\} := \{1, \dots, n^\beta\}$; дополнительно предполагаем, что $|\Lambda_{n^\beta}| < \beta < |\Lambda_{1+n^\beta}|$. Пусть $\mathcal{L}_\perp^\beta = L_2(\omega) \ominus \mathcal{L}_\bullet^\beta$, а $\mathcal{P}_\bullet^\beta$ и $\mathcal{P}_\perp^\beta$ — ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{L}_\bullet^\beta$ и $\mathcal{L}_\perp^\beta$ соответственно. Наконец, введем операторы

$$\mathfrak{S}_{\sigma\tau}^\beta = \mathcal{P}_\sigma^\beta \mathfrak{S} \mathcal{P}_\tau^\beta, \quad \sigma, \tau \in \{\bullet, \perp\}, \quad (3.5)$$

а также тождественные отображения $\mathbb{I}$ и $\mathbb{I}_\sigma^\beta$ в пространстве $L_2(\omega)$ и подпространстве $\mathcal{L}_\sigma^\beta$. Повторение с очевидными изменениями выкладки (3.3) доставляет формулу

$$\mathfrak{S}_{\bullet\perp}^\beta \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \ker\{\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta\} \subset L_2(\omega), \quad (3.6)$$

а значит,

$$\mathfrak{S}\varphi = \varphi \quad \forall \varphi \in \ker\{\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta\}. \quad (3.7)$$

Если $\mathfrak{S}\varphi = \varphi$, то $\mathfrak{S}^*\varphi = \mathfrak{S}^{-1}\varphi = \varphi$ благодаря унитарности оператора $\mathfrak{S}$, и поэтому по аналогии с формулой (3.6) обнаруживаем, что

$$(\mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta)^*\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \ker\{\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta\}. \quad (3.8)$$

Здесь $(\mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta)^*: \mathcal{L}_\perp^\beta \rightarrow \mathcal{L}_\bullet^\beta$ — сопряженное отображение. Итак, решая «алгебраическую» систему

$$\mathfrak{S}_{\bullet\bullet}^\beta \varphi_\bullet^\beta + \mathfrak{S}_{\bullet\perp}^\beta \varphi_\perp^\beta = \varphi_\bullet^\beta, \quad \mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta \varphi_\bullet^\beta + \mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta \varphi_\perp^\beta = \varphi_\perp^\beta$$

для неизвестных $\varphi_\bullet^\beta = \mathcal{P}_\bullet^\beta \varphi$ и $\varphi_\perp^\beta = \mathcal{P}_\perp^\beta \varphi$, видим, что ненулевая проекция $\varphi_\bullet^\beta$ собственной функции φ оператора $\mathfrak{S}$, отвечающая собственному числу 1, обязана удовлетворять равенству

$$\mathfrak{s}^\beta \varphi_\bullet^\beta = \varphi_\bullet^\beta, \quad (3.9)$$

причем

$$\mathfrak{s}^\beta = \mathfrak{S}_{\bullet\bullet}^\beta - \mathfrak{S}_{\bullet\perp}^\beta (\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta)^{-1} \mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta. \quad (3.10)$$

Поясним определение (3.10): в качестве $(\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta)^{-1}$ выступает любой линейный обратный, действующий из образа оператора $\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta$ в $\mathcal{L}_\perp^\beta$; при этом в силу (3.8) оператор $\mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta$ действует в упомянутый образ и в силу (3.6) левый множитель $\mathfrak{S}_{\bullet\perp}^\beta$ устраняет произвол в выборе обратного.

ЛЕММА 3.1. 1) *Справедливо равенство*

$$\dim \ker\{\mathfrak{S} - \mathbb{I}\} = \dim \ker\{\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta\} + \dim \ker\{\mathfrak{s}^\beta - \mathbb{I}_\bullet^\beta\}. \quad (3.11)$$

2) *Оператор (3.10) на конечномерном пространстве $\mathcal{L}_\bullet^\beta$ реализуется как унитарная матрица с элементами $\mathfrak{s}_{pq}^\beta = (\mathfrak{s}^\beta \varphi_p, \varphi_q)_\omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Равенство (3.11), конечномерный аналог которого установлен в [15, 13], обеспечено рассуждениями, приведенными к формуле (3.9).

2) Ввиду конечномерности подпространства $\mathcal{L}_\bullet^\beta$ достаточно проверить изометричность отображения $\mathfrak{s}^\beta: \mathcal{L}_\bullet^\beta \rightarrow \mathcal{L}_\bullet^\beta$. Для $\psi_\bullet \in \mathcal{L}_\bullet^\beta$ положим $\psi_\perp = (\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta)^{-1} \mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta \varphi_\bullet \in \mathcal{L}_\perp^\beta$ и $\psi = \psi_\bullet + \psi_\perp \in L_2(\omega)$. Нетрудно убедиться в том, что $\mathfrak{S}\psi = \mathfrak{s}^\beta \psi_\bullet + \psi_\perp$, а значит, по теореме 2.1 имеем $\|\psi_\bullet\|^2 + \|\psi_\perp\|^2 = \|\mathfrak{S}\psi\|^2 =$

$\|\mathfrak{s}^\beta \psi_\bullet\|^2 + \|\psi_\perp\|^2$. Сокращая слева и справа величину $\|\psi_\perp\|^2$, получаем нужное равенство. $\square$

Формулы (3.7), (3.9) и (3.11) показывают, что для самого оператора фиктивного рассеяния ядро $\ker\{\mathfrak{S} - \mathbb{I}\}$ раскладывается в прямую сумму двух подпространств, причем при малом $\beta > 0$ первое подпространство отождествляется с $\ker\{\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\beta \in (0, \delta)$, где $\delta > 0$ — тот же показатель, что и в (1.5). Тогда оператор $i\mathfrak{s}^\beta$ реализуется как матрица рассеяния s и верна формула

$$\dim \ker\{\mathfrak{S}_+ - \mathbb{I}_+\} = \dim \ker\{\mathfrak{S} - \mathbb{I}\} - \dim \ker\{s + i\mathbb{I}_0\}, \quad (3.12)$$

где $\mathbb{I}_0$ — тождественное отображение на компоненте $\mathcal{L}_0$ в разложении (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду установленного равенства (3.11) проверить нужно лишь то, что оператор (3.10) реализуется как матрица $-is$. В силу (2.8) и (2.12), (2.13) решение w_p задачи (2.7) (напоминаем, что оно неединственное, но берется какое-нибудь) удовлетворяет краевому условию

$$\partial_z w_p|_\Gamma - \mathcal{T} w_p|_\Gamma = -i[2(\Lambda_p + \chi(p))]^{1/2} \varphi_p + (T - \mathcal{T}) w_p|_\Gamma = -2^{1/2} i \mathcal{M}^{1/2} (\varphi_p + \psi_p),$$

где $\psi_p = 2^{-1/2}(1 - i)\mathcal{M}^{1/2} \mathcal{P}_+ w_p|_\Gamma$. Таким образом, согласно формулам (2.18) и (2.19) справедливы равенства $w_p = \mathcal{W}(\varphi_p + \psi_p)$ и $\mathfrak{S}(\varphi_p + \psi_p) = i(\varphi_p + \psi_p) - 2^{1/2} i \mathcal{M}^{1/2} w_p|_\Gamma$. Проецируя последнее на подпространства $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_\bullet^\beta$ и $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_\perp^\beta$ при учете включений $\psi_p \in \mathcal{L}_+$ и $\mathcal{M}^{1/2} \mathcal{P}_+ w_p|_\Gamma \in \mathcal{L}_+$, в обозначениях (3.5) получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\bullet\bullet}^\beta \varphi_p + \mathfrak{S}_{\bullet\perp}^\beta \psi_p &= i\varphi_p - 2^{1/2} i \mathcal{P}_0 \mathcal{M}^{1/2} w_p|_\Gamma, \\ \mathfrak{S}_{\perp\bullet}^\beta \varphi_p + (\mathfrak{S}_{\perp\perp}^\beta - \mathbb{I}_\perp^\beta) \psi_p &= (i - 1)\psi_p - 2^{1/2} i \mathcal{P}_+ \mathcal{M}^{1/2} w_p|_\Gamma = 0, \end{aligned}$$

а значит, по определению (3.10) $\mathfrak{s}^\beta \varphi_p = i\varphi_p - 2^{1/2} i \mathcal{P}_0 \mathcal{M}^{1/2} w_p|_\Gamma$. Интегральные представления (2.10) элементов матрицы рассеяния дают окончательную формулу

$$(\mathfrak{s}^\beta \varphi_p, \varphi_q)_\omega = i\delta_{p,q} - 2^{1/2} i (\Lambda_q + \chi(q))^{1/2} (w_p|_\Gamma, \varphi_q)_\omega = -is_{pq}. \quad \square$$

Как упоминалось в пояснениях к соотношениям (2.6)₁, уходящие волны $U_1^-, \dots, U_n^-$ удовлетворяют однородным краевым условиям (2.7)₁, а значит, и однородным условиям (2.14) благодаря связям (2.13). При $n > \mathbf{n}$ затухающие при $z \rightarrow +\infty$ волны U_n^- теряют последнее свойство из-за появления множителя $-i$ при $T\mathcal{P}_+$ в формуле (2.11). Следуя [14], образуем подобные (1.8) комбинации экспоненциальных волн

$$U_n^\pm = 2^{-1/2} (U_n^- \mp iU_n^+), \quad n \in N_-. \quad (3.13)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция U_n^- удовлетворяет однородным краевым условиям (2.14)₂. Назовем волны U_n^- уходящими, а U_n^+ — приходящими; в [13, 14] на основе такой классификации введена расширенная $\mathbf{n}^\beta \times \mathbf{n}^\beta$ -матрица рассеяния $\mathbf{s}^\beta$, составленная из коэффициентов в искусственных условиях излучения

$$u_p(x) = U_q^+(x) + \sum_{n=1}^{\mathbf{n}^\beta} s_{pq}^\beta U_q^-(x) + O(e^{-z \operatorname{Im} \Lambda_{\mathbf{n}^\beta}}), \quad p = 1, \dots, \mathbf{n}^\beta,$$

где $U_m^\pm = U_m^\pm$ при $m = 1, \dots, n$, а показатель β выбран так, как указано в начале раздела. Матрица s^β обладает следующим «считающим» свойством [14]:

$$\dim \mathfrak{L}^\beta = \dim \ker\{s^\beta - \mathbb{I}_\bullet^\beta\} - \dim \ker\{s - \mathbb{I}_0\}. \quad (3.14)$$

Здесь $\mathfrak{L}^\beta \subset \mathfrak{L}$ — подпространство решений, исчезающих на бесконечности со скоростью не выше $O(e^{-z\beta})$. Формулу (3.12) следует интерпретировать как бесконечномерный аналог формулы (3.14).

Несмотря на соотношение $\partial_z U_n^-|_\Upsilon = \mathcal{T} U_n^-|_\Upsilon$ (ср. с комментариями к задаче (2.4), (2.5)), говорить о $\mathcal{T}$ как об операторе Стеклова–Пуанкаре для задачи (2.4) с искусственными условиями излучения не приходится, поскольку невозможно придать смысл бесконечным рядам с экспоненциально возрастающими функциями $\{U_n^-\}_{n \in N_-}$ при произвольной $\varphi \in L_2(\omega)$, а значит, и найти подходящее продолжение решения $\mathcal{W}(\varphi)$ задачи (2.14), (2.18) на полуцилиндр Q_+ не удастся. Именно поэтому к названию оператора $\mathfrak{S}$, имеющего все свойства обычных операторов рассеяния, добавлен эпитет *фиктивный*.

Тот факт, что востребованная в настоящей статье вспомогательная задача (2.14) в ограниченной области G однозначно разрешима, тем более удивителен, что попытки [19, 20] численной реализации признака [13, 14] существования затухающих решений не привели к успеху, в частности, из-за однозначной разрешимости использованной в [19, 20] аппроксимационной задачи с искусственными краевыми условиями¹⁾ на усекающей поверхности $\Upsilon_R = \omega \times \{R\}$. Дело в том, что появление решения однородной задачи в неограниченной области, излишне быстро исчезающего на бесконечности, делает норму обратного оператора недопустимо большой, а погрешности вычислений неприемлемыми. Кроме того, при больших R разность $U_n^+(y, R)^{-1} U_n^-(y, R) - 1$ составляет $O(\exp(-2\Lambda_n R))$, т. е. на удаленном сечении Υ_R волны $U_n^+(y, R)$ и $U_n^-(y, R)$ из (3.13) неразличимы для компьютера. При малых $R > 0$ искусственное краевое условие $\mathcal{P}_+ w = 0$ на Υ_R , использованное в [19, 20], опять-таки привносит существенные погрешности; при этом схема вычисления расширенной матрицы рассеяния остается устойчивой, но в результате определяется матрица, не имеющая отношения к исходной задаче в области Ω с волноводом Q_+ .

Задача (2.14), легко поддающаяся численному анализу, лишена упомянутых недостатков прежде всего потому, что теорема 3.1 доставляет *критерий* существования ловушечных мод, не ставя никаких ограничений на скорость их затухания, а искусственные краевые условия назначены на сечении $\Upsilon = \Upsilon_0$, приближенном к резонатору G .

Закончим статью конкретным примером решения, быстро исчезающего на бесконечности.

ПРИМЕР 3.1. Пусть f — гладкая неотрицательная функция, отличная от нулевой, и $\Omega(f) = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1/2, z > -f(y)\}$ — полуполоса с криволинейным основанием $\Sigma(f)$ и боковыми сторонами $\Gamma_\pm(f)$. В работе [21] показано, что при условии

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(y) \cos(2\pi y) dy > 0 \quad (3.15)$$

¹⁾В [19, 20] эти условия включают равенство $\mathcal{P}_\perp^\beta w = 0$ на Υ_R , демпфирующее волны, которые затухают со скоростью $o(\exp(-\beta z))$.

найдутся волновое число $k_1 \in (0, \pi)$ и затухающее как $O(\exp(-z[\pi^2 - k_1^2]^{1/2}))$ нетривиальное решение u_1 смешанной краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + k^2 u(x) &= 0, \quad x \in \Omega(f), \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_{\pm}(f), \quad \partial_{\nu} u(x) = 0, \quad x \in \Sigma(f). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Обращаем внимание на то, что лишь для упрощения изложения ранее граница $\partial\Omega$ предполагалась гладкой и всюду на ней ставились условия Дирихле, — возможные сингулярности в угловых точках и точках смены типа краевого условия не выводят решение из соболевского класса H^1 .

Пусть $f(y) = 0$ при $|y| \in (1/4, 1/2)$ и $f(0) > 0$, т.е. ограничение (3.15) выполнено. Продолжим функцию f по 1-периодичности на ось $\mathbb{R}$ и положим $f_m(y) = m^{-1}f(m^{-1}y)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$. Благодаря условиям Дирихле в задаче (3.16) решение u_1 продолжается по нечетности через лучи $\{x : y = j + 1/2, z > 0\}$, $j \in \mathbb{Z}$, до гладкой 2-периодической функции на надграфике функции f . Поэтому $u_m(x) = u_1(m^{-1}x)$ — решение задачи (3.16) в области $\Omega(f_m)$ с волновым числом $k = mk_1$. Это решение убывает со скоростью $O(\exp(-zm[\pi^2 - k_1^2]^{1/2}))$ и поэтому в его разложении отсутствуют волны

$$U_n^-(x) = c_n \exp(-z[\pi^2 n^2 - k_m^2]^{1/2}) \sin(\pi n(y + 1/2)), \quad (3.17)$$

где $n = 1, \dots, m-1$, а c_n — нормирующий множитель. Нетрудно видеть, что в случае $n \in (mk_1\pi^{-1}, m)$ волны (3.17) экспоненциально затухают при $z \rightarrow +\infty$, причем за счет увеличения коэффициента m количество таких волн можно сделать сколь угодно большим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilcox C. Scattering Theory for Diffraction Gratings. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
2. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач. В сб.: Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Проблемы матем. физики, вып. 13, Изд-во ЛГУ, Л., 1991, с. 192–244.
3. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М., 1991.
4. Ursell F. Trapping modes in the theory of surface waves. Proc. Cambridge Philos. Soc., **47**, 347–358 (1951).
5. Jones D. S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains. Proc. Cambridge Philos. Soc., **49**, 668–684 (1953).
6. Evans D. V. Trapped acoustic modes. IMA J. Appl. Math., **49**, 45–60 (1992).
7. Linton C. M., Evans D. V. Integral equations for a class of problems containing obstacles in waveguides. J. Fluid Mech., **245**, 349–365 (1992).
8. Bonnet-Bendhia A.-S., Starling F. Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem. Math. Methods Appl. Sci., **17**, No. 5, 305–338 (1994).
9. Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D. Existence theorems for trapped modes. J. Fluid Mech., **261**, 21–31 (1994).
10. Готлиб В. Ю. О решениях уравнения Гельмгольца, сосредоточенных вблизи плоской периодической границы. Зап. научн. семин. ПОМИ, **250**, 83–96 (1998).
11. Сухинин С. В. Волноводное, аномальное и шепчущее свойства периодической цепочки препятствий. Сиб. журн. индустр. матем., **1**, №2, 175–198 (1998).
12. Камоцкий И. В., Назаров С. А. Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке. Матем. заметки, **73**, №1, 138–140 (2003).

13. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. 1. Матем. сб., **190**, №1, 109–138 (1999); 2. *ibid.*, **190**, №2, 43–70 (1999).
14. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области. Зап. научн. семин. ПОМИ, **264**, 66–82 (2000).
15. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы. Алгебра и анализ, **6**, №4, 157–186 (1994).
16. *Лионс Ж.-Л., Маджenes Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, М., 1971.
17. *Trudinger G.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
18. *Лифшиц М. С.* Операторы, колебания, волны (Открытые системы). Наука, М., 1966.
19. *Грикуров В. Э., Нейтаамяки П., Пламеневский Б. А., Хейккола Е.* О методе поиска поверхностных волн в дифракционных решетках. Докл. РАН, **385**, №4, 465–469 (2002).
20. *Grikurov V. E., Heikkola E., Niettaanmäki P., Plamenevskii B. A.* On computation of scattering matrices and on surface waves for diffraction gratings. Numer. Math., **94**, 269–288 (2003).
21. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области. В сб.: Проблемы матем. анализа. Вып. 19, Научная книга, Новосибирск, 1999, с. 105–148.

Институт проблем машиноведения РАН
email: serna@snark.ipme.ru

Поступило в редакцию
21 декабря 2004 г.