Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карабегов, Строгое деформационное квантование на псевдокэлеровой орбите компактной группы Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 66–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:15:37

УДК 517.9

Строгое деформационное квантование на псевдокэлеровой орбите компактной группы Ли

© 1998. А. В. КАРАБЕГОВ

В данной заметке мы строим так называемое строгое деформационное квантование (см. [1]) на орбите компактной полупростой группы Ли, на которой задана инвариантная псевдокэлерова поляризация, пользуясь результатами, полученными в [2]. Деформационное квантование на симплектическом многообразии M (см. [3]) задается ассоциативным умножением $\star$ в формальных рядах $C^\infty(M)[[\hbar]]$, $f \star g = \sum_r \hbar^r C_r(f, g)$. Здесь C_r — бидифференциальные операторы, причем $C_0(f, g) = fg$, $C_1(f, g) - C_1(g, f) = i\{f, g\}$, где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона на M . Деформационное квантование называется строгим, если на подходящем классе функций на M задано зависящее от параметра $\hbar$ семейство ассоциативных умножений $\{\star_\hbar\}$, такое, что произведение функций $f \star_\hbar g$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора по $\hbar$ в окрестности нуля, $f \star_\hbar g = \sum_r \hbar^r C_r(f, g)$.

1. Пусть K — вещественная группа Ли, k_r — ее алгебра Ли, k_r^* — дуальное пространство к k_r и $\Omega \subset k_r^*$ — коприсоединенная орбита, на которой задана инвариантная псевдокэлерова поляризация. Таким образом, форма Кириллова ω на орбите будет формой типа $(1, 1)$ относительно комплексной структуры, определяемой поляризацией. Каждому элементу $X \in k_r$ отвечает фундаментальное векторное поле v_X на Ω , гамильтоново относительно формы Кириллова, и гамильтониан f_X этого поля задается формулой $f_X(F) = \langle F, X \rangle$, $F \in \Omega$. Пусть $v_X = \xi_X + \eta_X$ — разложение поля v_X на компоненты типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Поскольку комплексная структура K -инвариантна, поле ξ_X голоморфно, а η_X антиголоморфно. Для $X \in k_r$ введем дифференциальные операторы $l_X^{(h)} = \xi_X + (i/\hbar)f_X$ и $r_X^{(h)} = \eta_X - (i/\hbar)f_X$ на Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображения $k_r \ni X \mapsto l_X^{(h)}$ и $X \mapsto r_X^{(h)}$ являются гомоморфизмами алгебры Ли k_r в алгебру Ли дифференциальных операторов первого порядка на Ω . Для любых $X, Y \in k_r$ операторы $l_X^{(h)}$ и $r_Y^{(h)}$ коммутируют.*

Пусть $g_c = k_r \otimes \mathbb{C}$ — комплексификация алгебры Ли k_r и $\mathcal{U}(g_c)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли g_c . Продолжим $X \mapsto l_X^{(h)}$ и $X \mapsto r_X^{(h)}$ до коммутирующих представлений $\mathcal{U}(g_c) \ni u \mapsto l_u^{(h)}$ и $u \mapsto r_u^{(h)}$ алгебры $\mathcal{U}(g_c)$ дифференциальными операторами на Ω .

Пусть $u \mapsto \check{u}$ — антиавтоморфизм алгебры $\mathcal{U}(g_c)$, такой, что $\check{X} = -X$ для $X \in g_c$.

ЛЕММА 1. *Для $u \in \mathcal{U}(g_c)$ выполняется равенство $l_u^{(h)} 1 = r_{\check{u}}^{(h)} 1$.*

Введем отображение $\mathcal{U}(g_c) \ni u \mapsto s_h u = l_u^{(h)} 1$. Из леммы 1 следует, что ядро I этого отображения является двусторонним идеалом в $\mathcal{U}(g_c)$. Обозна-

чим через $\mathcal{A}_\hbar$ образ отображения $u \mapsto s_\hbar u$. На $\mathcal{A}_\hbar$ возникает ассоциативное умножение $*_\hbar$, индуцированное с факторалгебры $\mathcal{U}(g_c)/I$. Отметим, что для $u, v \in \mathcal{U}(g_c)$ выполняются соотношения $l_u^{(\hbar)} s_\hbar v = s_\hbar u *_\hbar s_\hbar v = s_\hbar(uv)$.

2. В [4] мы построили деформационное квантование на произвольном кэлеровом многообразии. Эта конструкция тривиальным образом обобщается на псевдокэлеровы многообразия.

Операторы левого и правого $\star$ -умножений деформационного квантования являются формальными рядами дифференциальных операторов, или, коротко, формальными дифференциальными операторами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. На произвольном псевдокэлеровом многообразии M с псевдокэлеровой формой ω существует единственное деформационное квантование $(C^\infty(M)[[\nu]], \star)$, такое, что алгебра $\mathcal{L}$ формальных дифференциальных операторов левого $\star$ -умножения на M полностью определяется следующим условием: формальный дифференциальный оператор на Ω принадлежит $\mathcal{L}$, если его ограничение на любую стягиваемую координатную окрестность $U \subset M$ с голоморфными координатами z^k и локальным потенциалом Φ формы ω коммутирует с операторами умножения на $\bar{z}^l$ и с $\partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$.

Заметим, что $\star$ -умножение непосредственно распространяется на пространство формальных рядов Лорана с конечной главной частью $\mathcal{F} = C^\infty(M)[\nu^{-1}, \nu]$.

Зафиксируем теперь формальное деформационное квантование $(\mathcal{F}, \star)$, введенное в предложении 2, на псевдокэлеровой орбите Ω . Для $X \in k_r$ зададим формальный дифференциальный оператор $l_X^{(\nu)} = \xi_X + (i/\nu)f_X$. Отображение $k_r \ni X \mapsto l_X^{(\nu)}$ является гомоморфизмом в алгебру Ли формальных дифференциальных операторов первого порядка на Ω и продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathcal{U}(g_c) \ni u \mapsto l_u^{(\nu)}$ в алгебру формальных дифференциальных операторов на Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для $u \in \mathcal{U}(g_c)$ оператор $l_u^{(\nu)}$ принадлежит алгебре операторов левого $\star$ -умножения $\mathcal{L}$. Таким образом, отображение $\mathcal{U}(g_c) \ni u \mapsto l_u^{(\nu)} 1$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{U}(g_c)$ в алгебру $(\mathcal{F}, \star)$.

3. Пусть теперь K — компактная полупростая группа Ли. Псевдокэлеровы поляризации на орбитах группы K легко описать явно. Они связаны с реализацией орбит в виде G/P , где G — комплексная полупростая группа Ли, в которой K — максимальная компактная подгруппа, а P — параболическая подгруппа. Можно показать, что алгебры функций на коприсоединенной орбите Ω группы K , введенные в [2], совпадают с алгебрами $\mathcal{A}_\hbar$, построенными по некоторой псевдокэлеровой поляризации на Ω . В частности, когда форма $(1/\hbar)\omega$ на орбите Ω целочисленна и кэлерова, то алгебра $\mathcal{A}_\hbar$ совпадает с алгеброй ковариантных символов Березина на кэлеровом многообразии $(\Omega, (1/\hbar)\omega)$ (см. [5]).

Введем на $\mathcal{U}(g_c)$ фильтрацию $\{\mathcal{U}_d\}$, где $\mathcal{U}_d$ порождена мономами вида $X_1 \cdots X_k$, $k \leq d$, $X_j \in g_c$. Для $u \in \mathcal{U}_d$ функция $s_\hbar u$ является многочленом

от $1/\hbar$ степени не выше d . Напомним, что функция на орбите Ω , являющаяся ограничением многочлена, заданного на k_r^* , называется регулярной. Следующее предложение доказано в работе [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любой регулярной функции f на орбите Ω существуют такие элементы $u_j \in \mathcal{U}_{d(j)}$ и рациональные функции $a_j(\hbar)$, не имеющие полюса в нуле, что $f = \sum_j a_j(\hbar) \hbar^{d(j)} s_{\hbar} u_j$ при всех, кроме конечного числа, значениях $\hbar$.*

Из этого предложения следует, что регулярная функция на орбите Ω принадлежит алгебре $\mathcal{A}_{\hbar}$ для всех, кроме конечного числа, значений $\hbar$. Более того, для любых двух регулярных функций f, g на Ω и $F \in \Omega$, произведение $f *_{\hbar} g(F)$ рационально по $\hbar$ и не имеет полюса в нуле. Пользуясь соображениями из [6], получаем, что произведение $f *_{\hbar} g$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора по $\hbar$ в окрестности нуля. Обозначим соответствующий формальный асимптотический ряд через $f *_{\nu} g$. Пусть при этом $f = \sum_j a_j(\hbar) \hbar^{d(j)} s_{\hbar} u_j$. Тогда $f *_{\hbar} g = \sum_j a_j(\hbar) \hbar^{d(j)} l_{u_j}^{(h)} g$. Обозначим через $a_j(\nu)$ формальное асимптотическое разложение функции $a_j(\hbar)$ в нуле (т.е. ряд Тейлора, в котором переменная $\hbar$ заменена на формальный параметр ν). Тогда $f *_{\nu} g = \sum_j a_j(\nu) \nu^{d(j)} l_{u_j}^{(\nu)} g$. Из того что $\sum_j a_j(\nu) \nu^{d(j)} l_{u_j}^{(\nu)} \in \mathcal{L}$, непосредственно следует, что $f *_{\nu} g = f \star g$.

ТЕОРЕМА. *На любой орбите Ω компактной полупростой группы Ли K , на которой зафиксирована инвариантная псевдокэлерова поляризация, существует семейство ассоциативных алгебр $(\mathcal{A}_{\hbar}, *_{\hbar})$, элементами которых являются регулярные функции. Любая регулярная функция на Ω принадлежит $\mathcal{A}_{\hbar}$ для всех, кроме конечного числа, значений $\hbar$. Для любых регулярных функций f, g на Ω произведение $f *_{\hbar} g$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора по $\hbar$ в окрестности нуля. Этот ряд определяется $\star$ -произведением деформационного квантования, построенного по псевдокэлеровой структуре на Ω .*

Таким образом, на псевдокэлеровых орбитах компактной полупростой группы Ли возникает строгое деформационное квантование. Этот факт был установлен в [6] для кэлеровых орбит, являющихся компактными эрмитовыми симметрическими пространствами и высказан в качестве гипотезы для общих кэлеровых орбит.

Автор выражает благодарность за оказанное гостеприимство Международному центру по теоретической физике, Триест, Италия, где была выполнена часть работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weinstein A. *Astérisque*, **227**, 389–409 (1995).
2. Karabegov A. V. *Trans. Am. Math. Soc.* (1998), to appear.
3. Bayen F. et al. *Ann. Phys.*, **111**, No. 1, 1–151 (1978).
4. Карабегов А. В. *Функц. анализ и его прил.*, **30**, вып. 2, 87–89 (1996).
5. Березин Ф. А. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **38**, 1116–1175 (1974).
6. Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. H. *Trans. Am. Math. Soc.*, **337**, No. 1, 73–98 (1993).