Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Качановский, Г. Ф. Ус, Биортогональные системы Апшеля в анализе на дуально-ядерных пространствах, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 69–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:02:56

УДК 517.9

Биортогональные системы Аппеля в анализе на дуально-ядерных пространствах

© 1998. Н. А. Качановский, Г. Ф. Ус

Биортогональный анализ относительно аналитических мер μ на дуально-ядерном пространстве N' построен в [1–4] на основе биортогонального разложения пространства $L_2(N', \mu)$ по системе $\mathbf{P}^\mu$ полиномов Аппеля на N' и двойственной системе обобщенных функций $\mathbf{Q}^\mu$. В [5, 6] установлено, что подход из [1–4] может быть широко обобщен, если заменить экспоненты характеристиками L_1 -гипергруппы, а обычный сдвиг — обобщенным. Отметим, что, согласно терминологии, принятой в классической теории полиномов Аппеля (см., например, [7]), система $\mathbf{P}^\mu$ из [1–4] состоит из полиномов Аппеля на N' , порожденных голоморфной функцией $1/l_\mu$, где l_μ — преобразование Лапласа меры μ .

В настоящей заметке для построения анализа на N' применяется система полиномов Аппеля $\mathbf{P}^A$, порожденная произвольной голоморфной в нуле функцией A . В итоге получается более гибкая (в смысле приложений), чем в [2–4], шкала функциональных пространств, охватывающая пространства из [2–4] и сохраняющая все преимущества биортогонального подхода. Кроме того, примененная система $\mathbf{P}^A$ позволяет обобщить на бесконечномерный случай классический метод решения дифференциальных уравнений разложением в ряды по полиномам Аппеля [7].

1. Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, N — сепарабельное ядерное пространство Фреше, плотно и непрерывно вложенное в $\mathcal{H}$, и N' — пространство, сопряженное к N относительно $\mathcal{H}$. Тогда (в силу ядерности) $N = \text{pr} \lim_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_p$, $N' = \text{ind} \lim_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{-p}$, где $\mathcal{H}_p$, $p \in \mathbb{Z}$, — гильбертовы пространства, причем $\mathcal{H}_{p+1}$ вложено в $\mathcal{H}_p$ оператором типа Гильберта–Шмидта для любого $p \in \mathbb{Z}$ и $\mathcal{H}_{-p}$ — негативное пространство цепочки $\mathcal{H}_{-p} \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_p$. Обозначим через $|\cdot|_p$ норму в $\mathcal{H}_p$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание между N' и N , задаваемое расширением скалярного произведения в $\mathcal{H}$, и сохраним эти обозначения для тензорных степеней пространств и комплексификаций.

Пусть $N_{\mathbb{C}}$ — комплексификация пространства N . Обозначим через $\text{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$ алгебру ростков голоморфных в нуле функций $A: N_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть μ — вероятностная мера на $(N', \mathcal{B}(N'))$, такая, что 1) ее преобразование Лапласа $l_\mu(\cdot) := \int_{N'} \exp\{\langle x, \cdot \rangle\} d\mu(x)$ принадлежит $\text{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$; 2) если φ — непрерывный на N' полином, то $\varphi = 0 \pmod{\mu}$ влечет за собой $\varphi \equiv 0$. Совокупность таких мер, называемых аналитическими невырожденными мерами, обозначим через $\mathcal{M}_a(N')$.

2. Пусть $a \in \text{Hol}_0(\mathbb{C})$, $a(0) \neq 0$. Положим $e_a(t; x) := a(t) \exp\{xt\}$, $t, x \in \mathbb{C}$. В силу голоморфности функции e_a представим ее в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n P_n^a(x)$, где $P_n^a(x)$, $n \geq 0$, — полином n -й степени. Полиномы $P_n^a(\cdot)$, $n \geq 0$, называются

полиномами Аппеля, порожденными функцией a , и e_a — их производящая функция [7].

Введем бесконечномерный аналог системы $\{P_n^a(\cdot), n \geq 0\}$. Для $A \in \text{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$, $A(0) \neq 0$, функция $e_A(\theta; z) := A(\theta) \exp\{\langle z, \theta \rangle\}$, $\theta \in N_{\mathbb{C}}$, $z \in N'_{\mathbb{C}}$, допускает представление

$$e_A(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle P_n^A(z), \theta^{\otimes n} \rangle, \quad (1)$$

где $P_n^A(z) \in N'_{\mathbb{C}}{}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \geq 0$, а $\widehat{\otimes}$ — симметрическое тензорное произведение. Систему $\mathbf{P}^A := \{\langle P_n^A(\cdot), \varphi^{(n)} \rangle : \varphi^{(n)} \in N'_{\mathbb{C}}{}^{\widehat{\otimes} n}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ полиномов на N' назовем *системой полиномов Аппеля, порожденными функцией A* . Заметим, что при $A(\theta) = 1/l_{\mu}(\theta)$, $\mu \in \mathcal{M}_a(N')$, система $\mathbf{P}^A$ изучена в [3].

Положим

$$(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1 := \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^A(x), \varphi^{(n)} \rangle : \|\varphi\|_{p,q,A}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{nq} |\varphi^{(n)}|_p^2 < \infty \right\},$$

$$(N)_A^1 := \text{pr} \lim_{p,q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_p)_{q,A}^1.$$

В [3] доказано, что пространство основных функций $(N)_{1/l_{\mu}}^1$ не зависит от $\mu \in \mathcal{M}_a(N')$ и совпадает с пространством $(N)^1$ сужений на N' целых на $N'_{\mathbb{C}}$ функций первого порядка роста минимального типа. Аналогичная инвариантность имеется и для пространств $(N)_A^1$ (см. теорему 1).

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $A \in \text{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$, $A(0) \neq 0$, $(N)_A^1$ и $(N)^1$ совпадают как топологические пространства.*

Для доказательства $x^{\otimes m}$, $x \in N'$, выражаются через $P_n^A(x)$, $n \leq m$, и используются неравенства Коши для голоморфных функций на $N'_{\mathbb{C}}$.

3. Пусть $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$, $t \in \mathbb{C}$, — голоморфная в нуле функция. Рассмотрим дифференциальное уравнение (бесконечного, вообще говоря, порядка) $a(D)y = f$. Если $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ — целая функция, то решение этого уравнения имеет вид $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{1/a}(t)$, где $P_n^{1/a}(\cdot)$, $n \geq 0$, — полиномы Аппеля, порожденные функцией $1/a \in \text{Hol}_0(\mathbb{C})$ (см., например, [7]).

Этот метод решения дифференциальных уравнений допускает обобщение на бесконечномерный случай. А именно, определим дифференциальный оператор $\langle \Phi^{(n)}, D^{\otimes n} \rangle$ порядка n с постоянным коэффициентом $\Phi^{(n)} \in N'_{\mathbb{C}}{}^{\widehat{\otimes} n}$, полагая

$$\langle \Phi^{(n)}, D^{\otimes n} \rangle \langle x^{\otimes m}, \varphi^{(m)} \rangle := 1_{\{m \geq n\}} \frac{m!}{(m-n)!} \langle x^{\otimes(m-n)} \widehat{\otimes} \Phi^{(n)}, \varphi^{(m)} \rangle \quad (2)$$

($1_{\{m \geq n\}}$ — индикатор множества $\{m \geq n\}$) и продолжая его по линейности и непрерывности с мономами на $(N)^1$.

Пусть $\tilde{A}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \tilde{A}_n, \theta^{\otimes n} \rangle$, $\tilde{A}_0 \neq 0$, — голоморфная в $0 \in N_{\mathbb{C}}$ функция (из (1) при $A = \tilde{A}$ и $z = 0$ следует, что $\tilde{A}_n = P_n^{\tilde{A}}(0)$). Рассмотрим

дифференциальное уравнение бесконечного, вообще говоря, порядка

$$\tilde{A}(D)y \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \tilde{A}_n, D^{\otimes n} \rangle y = f. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (3) корректно разрешимо в $(N)^1$. При этом, если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^A(x), \varphi^{(n)} \rangle$, то $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{A/\bar{A}}(x), \varphi^{(n)} \rangle$ — его решение.

Это следует из соотношения $\tilde{A}(D)\langle P_n^A(x), \varphi^{(n)} \rangle = \langle P_n^{A\bar{A}}(x), \varphi^{(n)} \rangle$, проверяемого непосредственным вычислением, и теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оператор (2) можно продолжить по непрерывности на пространство $(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$, где p больше или равно числу p' , такого, что $\Phi^{(n)} \in \mathcal{H}_{-p',\mathbb{C}}^{\otimes n}$, а $q > 1$. При этом можно показать, что если $f \in (\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$ для достаточно больших p и q , то решение y уравнения (3) принадлежит $(\mathcal{H}_p)_{q,A/\bar{A}}^1 \subseteq (\mathcal{H}_p)_{q-1,A}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 2 следует, что оператор $\tilde{A}(D)$ осуществляет изометрический изоморфизм между пространствами $(\mathcal{H}_p)_{q,A/\bar{A}}^1$ и $(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$.

4. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_a(N')$. Построим двойственную к $\mathbf{R}^A$ относительно $L_2(N', \mu)$ систему $\mathbf{Q}_\mu^A$ обобщенных функций. Для этого рассмотрим цепочку $\mathcal{P}'_\mu \supseteq L_2(N', \mu) \supseteq \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — пространство непрерывных полиномов на N' ; через $\langle \Phi, \varphi \rangle$ обозначим действие обобщенной функции $\Phi \in \mathcal{P}'_\mu$ на основную $\varphi \in \mathcal{P}$. Пусть $A \in \text{Hol}_0(N_\mathbb{C})$, $A(0) \neq 0$. Положим

$$Q_m^{\mu,A}(\Phi^{(m)}; \cdot) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle \langle \Phi^{(m)} \hat{\otimes} B_k, D^{\otimes(m+k)} \rangle^* 1 \rangle(\cdot), \quad \Phi^{(m)} \in N_\mathbb{C}'^{\otimes m}, \quad (4)$$

где $B_k \in N_\mathbb{C}'^{\otimes k}$ берется из разложения $1/(A(\theta)l_\mu(\theta)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle B_k, \theta^{\otimes k} \rangle$, а оператор $\langle \Phi^{(m)}, D^{\otimes m} \rangle^* \in \mathcal{L}(\mathcal{P}'_\mu)$ сопряжен к (2) относительно $L_2(N', \mu)$. Соотношение (4) определяет обобщенную функцию из $\mathcal{P}'_\mu$, поскольку для полинома $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \langle x^{\otimes k}, \varphi^{(k)} \rangle$ лишь конечное число слагаемых в спаривании $\langle Q_m^{\mu,A}(\Phi^{(m)}; \cdot), \varphi(\cdot) \rangle$ отлично от нуля. Более того, справедлив следующий результат (совпадающий в случае $A = 1/l_\mu$ с доказанным в [2, 3]).

ТЕОРЕМА 3. Система $\mathbf{Q}_\mu^A \subset \mathcal{P}'_\mu$ элементов вида (4) биортогональна к $\mathbf{R}^A$ в том смысле, что $\langle Q_m^{\mu,A}(\Phi^{(m)}; \cdot), \langle P_n^A(\cdot), \varphi^{(n)} \rangle \rangle = \delta_{nm} n! \langle \Phi^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$. Любой элемент $\Phi \in \mathcal{P}'_\mu$ единственным образом представим в виде

$$\Phi(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{\mu,A}(\Phi^{(m)}; \cdot), \quad \Phi^{(m)} \in N_\mathbb{C}'^{\otimes m}. \quad (5)$$

Эта теорема доказывается прямым вычислением, причем ядра $\Phi^{(m)}$ из (5) определяются соотношением

$$\langle \Phi^{(m)}, \varphi^{(m)} \rangle := \langle \Phi(\cdot), \langle P_m^A(\cdot), \varphi^{(m)} \rangle \rangle, \quad \varphi^{(m)} \in N_\mathbb{C}'^{\otimes m}.$$

В терминах системы $\mathbf{Q}_\mu^A$, подобно тому, как это делается в [2, 3], описываются сопряженные к $(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$ и $(N)_A^1 = (N)^1$ относительно $L_2(N', \mu)$ пространства. А именно, пусть $(\mathcal{H}_{-p})_{-q,A,\mu}^{-1} \subseteq \mathcal{P}'_\mu$ — пространство обобщенных функций $\Phi \in \mathcal{P}'_\mu$, для которых $\|\Phi\|_{-p,-q,A,\mu}^2 := \sum_{m=0}^\infty 2^{-qm} |\Phi^{(m)}|_{-p}^2 < \infty$, где $\Phi^{(m)} \in N'_\mathbb{C}^{\otimes m}$ — ядра из представления (5). Тогда для достаточно больших p и q пространство $(\mathcal{H}_{-p})_{-q,A,\mu}^{-1}$ является сопряженным к $(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$ относительно $L_2(N', \mu)$, а $(N)_\mu^{-1} := \text{ind} \lim_{p,q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{-p})_{-q,A,\mu}^{-1}$ сопряжено к $(N)^1$.

Отметим, что на $(N)_\mu^{-1}$ можно рассматривать дифференциальные уравнения, сопряженные к уравнениям вида (3), для которых справедлив аналог теоремы 2.

Авторы благодарны Ю. М. Березанскому, Ю. Л. Далецкому и Ю. Г. Кондратьеву за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л. Функци. анализ и его прил., **25**, вып. 2, 68–70 (1991).
2. Albeverio S., Daletsky Yu., Kondratiev Yu., Streit L. J. Funct. Anal., **138**, No. 2, 311–350 (1996).
3. Kondratiev Yu., Streit L., Westerkamp W., Yan J. Generalized functions in infinite dimensional analysis, IAS report No. 1995-002, 1995.
4. Us G. F. Methods Funct. Anal. Topol., **1**, No. 1, 93–108 (1995).
5. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Функци. анализ и его прил., **29**, вып. 3, 51–55 (1995).
6. Березанский Ю. М. Функци. анализ и его прил., **30**, вып. 4, 61–65 (1996).
7. Boas R. P., Buck R. C. Polynomial expansions of analytic functions. Springer, Berlin, 1964.

Киевский политехнический институт
Киевский университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию
27 сентября 1995 г.
В переработанном виде
23 мая 1997 г.

УДК 517.9

Базисные функции, связанные с двумерной системой Дирака*

© 1998. О. М. КИСЕЛЕВ

В работе построен специальный базис в пространстве гладких интегрируемых функций двух вещественных переменных. Базисные функции связаны с решением двумерной системы Дирака

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix} \varphi, \quad E(-kz) \varphi|_{|z| \rightarrow \infty} = I. \quad (1)$$

Здесь z, k принадлежат $\mathbb{C}$, черта означает комплексное сопряжение, $E(kz) = \text{diag}(\exp(kz), \exp(\bar{k}z))$, I — единичная матрица.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-00459) и Международного научного фонда (грант MNB300).