Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Киселев, Базисные функции, связанные с
двумерной системой Дирака, *Функц. анализ и его
прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 72–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa402>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:07:39

В терминах системы $\mathbf{Q}_\mu^A$, подобно тому, как это делается в [2, 3], описываются сопряженные к $(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$ и $(N)_A^1 = (N)^1$ относительно $L_2(N', \mu)$ пространства. А именно, пусть $(\mathcal{H}_{-p})_{-q,A,\mu}^{-1} \subseteq \mathcal{P}'_\mu$ — пространство обобщенных функций $\Phi \in \mathcal{P}'_\mu$, для которых $\|\Phi\|_{-p,-q,A,\mu}^2 := \sum_{m=0}^\infty 2^{-qm} |\Phi^{(m)}|_{-p}^2 < \infty$, где $\Phi^{(m)} \in N'_\mathbb{C}^{\otimes m}$ — ядра из представления (5). Тогда для достаточно больших p и q пространство $(\mathcal{H}_{-p})_{-q,A,\mu}^{-1}$ является сопряженным к $(\mathcal{H}_p)_{q,A}^1$ относительно $L_2(N', \mu)$, а $(N)_\mu^{-1} := \text{ind} \lim_{p,q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{-p})_{-q,A,\mu}^{-1}$ сопряжено к $(N)^1$.

Отметим, что на $(N)_\mu^{-1}$ можно рассматривать дифференциальные уравнения, сопряженные к уравнениям вида (3), для которых справедлив аналог теоремы 2.

Авторы благодарны Ю. М. Березанскому, Ю. Л. Далецкому и Ю. Г. Кондратьеву за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л. Функци. анализ и его прил., **25**, вып. 2, 68–70 (1991).
2. Albeverio S., Daletsky Yu., Kondratiev Yu., Streit L. J. Funct. Anal., **138**, No. 2, 311–350 (1996).
3. Kondratiev Yu., Streit L., Westerkamp W., Yan J. Generalized functions in infinite dimensional analysis, IAS report No. 1995-002, 1995.
4. Us G. F. Methods Funct. Anal. Topol., **1**, No. 1, 93–108 (1995).
5. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Функци. анализ и его прил., **29**, вып. 3, 51–55 (1995).
6. Березанский Ю. М. Функци. анализ и его прил., **30**, вып. 4, 61–65 (1996).
7. Boas R. P., Buck R. C. Polynomial expansions of analytic functions. Springer, Berlin, 1964.

Киевский политехнический институт
Киевский университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию
27 сентября 1995 г.
В переработанном виде
23 мая 1997 г.

УДК 517.9

Базисные функции, связанные с двумерной системой Дирака*

© 1998. О. М. КИСЕЛЕВ

В работе построен специальный базис в пространстве гладких интегрируемых функций двух вещественных переменных. Базисные функции связаны с решением двумерной системы Дирака

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix} \varphi, \quad E(-kz) \varphi|_{|z| \rightarrow \infty} = I. \quad (1)$$

Здесь z, k принадлежат $\mathbb{C}$, черта означает комплексное сопряжение, $E(kz) = \text{diag}(\exp(kz), \exp(\bar{k}z))$, I — единичная матрица.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-00459) и Международного научного фонда (грант MNB300).

Введем обозначения для полуторалинейных форм с весами $f(z)$ и $h(k)$:

$$(\varphi^{(i)}, \psi^{(j)})_f = \iint_{\mathbb{C}} dz \wedge d\bar{z} (\bar{f}(z) \varphi_{1i}(z, k) \overline{\psi_{1j}(z, k)} + f(z) \varphi_{2i}(z, k) \overline{\psi_{2j}(z, k)}), \quad (2)$$

$$\langle \varphi_{(i)}, \psi_{(j)} \rangle_h = \iint_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} (\overline{\varphi_{1i}(z, k)} \psi_{j1}(z, k) \bar{h}(k) - \overline{\varphi_{2i}(z, k)} \psi_{j2}(z, k) h(k)). \quad (3)$$

Здесь и всюду ниже под $f(z)$ и $h(k)$ понимаются неаналитические функции комплексных переменных z и k .

ТЕОРЕМА 1. Пусть q , ее частные производные по z , $\bar{z}$ до второго порядка и $|q|^2$ — гладкие интегрируемые функции и выполнено условие

$$\frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \mathbb{C}} \iint dx dy \frac{|q(x + iy)|}{|z - (x + iy)|} < 1; \quad (4)$$

тогда функция $u(z) \in C^1 \cap L_1$ представима в следующем виде:

$$u(z) = \frac{1}{\pi i} \langle \varphi_{(2)}, \psi_{(2)} \rangle_{\hat{u}}, \quad (5)$$

где коэффициенты $\hat{u}(k)$ определены формулой $\hat{u} = -(\varphi^{(2)}, \psi^{(2)})_u / (4\pi i)$. Здесь ψ — решение задачи, сопряженной к (1) относительно формы (2) с весом q .

Результаты о базисности квадратов решений одномерной системы Дирака хорошо известны [1–3]. В двумерном случае аналогичные результаты о базисности функций, связанных с нестационарным уравнением Шрёдингера с периодическим потенциалом, получены в [4].

Задача (1) используется для интегрирования системы уравнений Деви–Стьюартсона-2 (ДС-2) [5, 6]

$$i \partial_t Q + (\partial_z^2 - \partial_{\bar{z}}^2) Q + (g + \bar{g}) Q = 0, \quad \partial_{\bar{z}} g = \partial_z |Q|^2. \quad (6)$$

Если в задаче (1) положить потенциал q равным Q , то с помощью (5) можно разделить зависимость от пространственных переменных и времени в решении линеаризованной на Q , g системы уравнений ДС-2:

$$i \partial_t U + 2(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2) U + (g + \bar{g}) U + (V + \bar{V}) Q = F(z, t), \quad (7)$$

$$\partial_{\bar{z}} V = \partial_z (Q \bar{U} + \bar{Q} U).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q = Q$, функция Q из решения системы (6) удовлетворяет условиям теоремы 1 при $0 \leq t \leq T_0$ и $F(z, t) \in C_1 \cap L_1$ при любом $t \in [0, T_0]$; тогда функцию U из решения начально-краевой задачи для (7) $U|_{t=0} = U_0(z)$, $V|_{|z| \rightarrow \infty} = 0$, такую, что $U, \partial_t U, \partial_z^\alpha U, \partial_{\bar{z}}^\alpha U, \partial_z \partial_{\bar{z}} U \in C^1 \cap L_1$, $\alpha = 1, 2$, при любом $t \in [0, T_0]$ можно представить в виде $U(z, t) = -i \langle \varphi_{(2)}, \psi_{(2)} \rangle_{\hat{U}} / \pi$, где $\hat{U}$ — решение задачи Коши

$$\partial_t \hat{U} - 2i(k^2 + \bar{k}^2) \hat{U} = \hat{F}(k, t), \quad \hat{U}|_{t=0} = -\frac{1}{4\pi i} (\varphi^{(2)}, \psi^{(2)})_{U_0}; \quad (8)$$

здесь $\hat{F}(k, t) = -(\varphi^{(2)}, \psi^{(2)})_F / (4\pi i)$.

Возможность разделения переменных в (7) можно интерпретировать в рамках гамильтонова формализма как следствие существования переменных типа действие–угол для системы уравнений ДС-2 [7, 8]. Таким образом, распространен на систему уравнений (7) известный подход к решению линеаризаций интегрируемых уравнений [1–4].

Краевая задача для системы уравнений более общего, чем (1), вида и достаточно малых потенциалов из класса Шварца рассматривалась в [9]. Здесь (1) исследуется для более широкого класса потенциалов.

ЛЕММА. Пусть q удовлетворяет условию (4); тогда решение задачи (1) существует при любом $k \in \mathbb{C}$.

Для доказательства леммы 1 перейдем от задачи (1) к эквивалентной системе интегральных уравнений [6]

$$(I - G[q, k])\varphi = E(kz). \quad (9)$$

Решение системы уравнений (9) будем искать в пространстве X' непрерывных по $z, \bar{z}$ ограниченных матриц φ с нормой

$$\|\varphi\| = \max_{j=1,2} \sup_{z \in \mathbb{C}} (|E_{jj}(-kz)\varphi_{j1}(z, k)| + |E_{jj}(-kz)\varphi_{j2}(z, k)|).$$

Оператор G является сжимающим в пространстве X' , если выполнено условие (4). Лемма доказана.

Ниже потребуются асимптотика решения (1). Если q удовлетворяет условиям теоремы 1, то решение задачи (1) при $|k| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(z, k) &= \left(1 + \frac{1}{4k} \partial_{\bar{z}}^{-1} |q|^2 + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right)\right) \exp(kz), \\ \varphi_{12}(z, k) &= \left(-\frac{1}{2k} \bar{q} + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right)\right) \exp(kz); \end{aligned} \quad (10)$$

здесь $\partial_{\bar{z}}^{-1} |q|^2 = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} dw \wedge d\bar{w} \frac{|q(w, \bar{w})|^2}{z - w}$.

Асимптотика функций φ использовалась в [6] для вычисления q по данным рассеяния задачи (1).

Матрица φ — решение задачи (1) — является еще и решением так называемой $\bar{D}$ -задачи [5]

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{k}} \varphi_{11} & \partial_{\bar{k}} \varphi_{12} \\ \partial_{\bar{k}} \varphi_{21} & \partial_{\bar{k}} \varphi_{22} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi E(-kz)|_{|k| \rightarrow \infty} = I. \quad (11)$$

Формула для вычисления $q(z)$ имеет вид [5, 6]

$$q(z) = \frac{1}{\pi i} \iint_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} b(k) \varphi_{11}(z, k) \exp(\overline{-kz}), \quad (12)$$

где $b(k)$ — данные рассеяния для задачи (1) — вычисляются по формуле

$$b(k) = \frac{1}{4\pi i} \iint_{\mathbb{C}} dz \wedge d\bar{z} q(z) \varphi_{22}(z, k) \exp(-kz). \quad (13)$$

Формулу (5) можно получить, формально проварьировав выражение (12) по δb и выражение (13) по δq . Строгое доказательство (5) приведено ниже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Правая часть (5) имеет вид

$$h = \frac{1}{\pi i} \iint_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} \left[\frac{1}{4\pi i} \iint_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' (u(z') \overline{\varphi_{12}(z', k)} \psi_{21}(z', k) + \bar{u}(z') \overline{\varphi_{22}(z', k)} \psi_{22}(z', k)) \overline{\varphi_{21}(z, k)} \psi_{21}(z, k) - \frac{1}{4\pi i} \iint_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' (\bar{u}(z') \varphi_{12}(z', k) \overline{\psi_{12}(z', k)} + u(z') \psi_{22}(z', k) \overline{\psi_{22}(z', k)}) \overline{\varphi_{22}(z, k)} \psi_{22}(z, k) \right].$$

Интегралы по z' , $\bar{z}'$ сходятся в силу интегрируемости функции f ; двойной интеграл по k , $\bar{k}$ представим как интеграл по кругу C_R радиуса R при $R \rightarrow \infty$. Поменяем порядок интегрирования по z' , $\bar{z}'$ и по k , $\bar{k}$. Заменим в подынтегральных выражениях комплексные сопряжения элементов матриц φ и ψ по формулам $\overline{\varphi_{11}} = \varphi_{22}$, $\overline{\varphi_{21}} = -\varphi_{12}$, $\overline{\psi_{11}} = \psi_{22}$, $\overline{\psi_{21}} = -\psi_{12}$.

Положим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varphi_{22}(z', k) \psi_{22}(z, k) dk - \varphi_{21}(z', k) \psi_{21}(z, k) d\bar{k}, \\ \omega_2 &= \varphi_{11}(z, k) \psi_{11}(z', k) d\bar{k} - \varphi_{12}(z, k) \psi_{12}(z', k) dk, \\ \omega_3 &= -\varphi_{11}(z', k) \psi_{21}(z, k) d\bar{k} + \varphi_{12}(z', k) \psi_{22}(z, k) dk, \\ \omega_4 &= -\varphi_{12}(z, k) \psi_{22}(z', k) dk + \varphi_{11}(z, k) \psi_{21}(z', k) d\bar{k}. \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, получим

$$h = \iint_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' u(z') \iint_{C_R} \omega_1 \wedge \omega_2 + \iint_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' \overline{u(z')} \iint_{C_R} \omega_4 \wedge \omega_3.$$

Из системы (11) и сопряженной к ней относительно формы (3) с весом $b(k)$ системы для ψ следует, что формы ω_j , $j = 1, \dots, 4$, замкнуты. Применив формулу Стокса, от интеграла по большому кругу перейдем к интегралу по большой окружности. После подстановки асимптотик подынтегральных функций по k при $|k| \rightarrow \infty$ и перехода к пределу получим

$$h = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{C}} dz' \wedge d\bar{z}' u(z') \frac{\exp(k(z' - z) + \overline{k(z - z')})}{(z' - z)(\overline{z - z'})} = u(z).$$

Доказательство теоремы 2 сводится к обоснованию формулы (8):

$$\partial_t \widehat{U} = (\partial_t \varphi^{(2)}, \psi^{(2)})_U + (\varphi^{(2)}, \partial_t \psi^{(2)})_U + (\varphi^{(2)}, \psi^{(2)})_{\partial_t U}. \quad (14)$$

Если $q = Q$, то матрица φ удовлетворяет системе уравнений эволюции по t [5, 6]

$$\partial_t \varphi = \varphi \begin{pmatrix} -2ik & 0 \\ 0 & 2i\bar{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i\partial_z^2 + ig & i\partial_z Q - iQ\partial_z \\ i\partial_z \bar{Q} - i\bar{Q}\partial_z & -2i\partial_z^2 - i\bar{g} \end{pmatrix} \varphi. \quad (15)$$

Используем эту систему уравнений и систему уравнений эволюции для ψ при вычислении производной (14). Производную $\partial_t \varphi^{(2)}$ заменим в силу системы (15), производную $\partial_t \psi^{(2)}$ — в силу уравнений эволюции для $\psi^{(2)}$, производную $\partial_t U$ — в силу системы уравнений (7). В результате в правой части формулы (14) не содержится выражений от производных по t . Далее, после преобразований интегралов эта формула приводится к виду (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaup D. J. J. Math. Anal. Appl., **54**, No. 3, 849–864 (1976).
2. Герджиков В. С., Христов Е. Х. Матем. заметки, **28**, № 4, 501–512 (1980).
3. Kaup D. J. SIAM J. Appl. Math., **31**, No. 1, 121–133 (1976).
4. Кричевер И. М. УМН, **44**, No. 2, 121–184 (1989).
5. Fokas A. S., Ablowitz M. J. J. Math. Phys., **25**, No. 8, 2494–2505 (1984).
6. Arcadiev V. A., Pogrebkov A. K., Polivanov M. C. Phys. D, **36**, 189–197 (1989).
7. Кулиш П. П., Луновский В. Д. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **161**, 54–71 (1987).
8. Villaroel J., Ablowitz M. J. Inverse Problems, **7**, 451 (1991).
9. Sung L. Y., Fokas A. S. Preprint Institute for Nonlinear Studies, ins #98, April, 1990.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Поступило в редакцию

7 февраля 1996 г.

В переработанном виде

9 января 1997 г.

УДК 513.83

Почти евклидовы плоскости в ℓ_p^n

© 1998. Ю. И. Любич, О. А. Шаталова

Под ℓ_p^n ($p \geq 1$) мы понимаем пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p}$$

в канонических координатах. Вопрос о существовании евклидовых подпространств в ℓ_p^n естествен с геометрической точки зрения, а также тесно связан с различными задачами, возникающими в спектральной теории, численном анализе, теории чисел, теории представлений групп и т. д. (см. [3, 4, 6, 7]). В настоящей заметке мы ограничимся рассмотрением двумерных подпространств (плоскостей).

ТЕОРЕМА 1 [3]. Если ℓ_p^n содержит евклидову плоскость, то $p \in 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$.

Обратное утверждение верно при достаточно большом n .

ТЕОРЕМА 2 [4, 6]. При $p \in 2\mathbb{N}$ пространство ℓ_p^n содержит евклидову плоскость тогда и только тогда, когда $n \geq p/2 + 1$.

При $n \leq p/2$ естественно рассматривать « ε -евклидовы» плоскости с возможно меньшим значением ε . Конечно, при этом уже не нужны ограничения