Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Любич, О. А. Шаталова, Почти евклидовы
плоскости в ℓ_p^n , *Функц. анализ и его прил.*, 1998,
том 32, выпуск 1, 76–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:39:48

Используем эту систему уравнений и систему уравнений эволюции для ψ при вычислении производной (14). Производную $\partial_t \varphi^{(2)}$ заменим в силу системы (15), производную $\partial_t \psi^{(2)}$ — в силу уравнений эволюции для $\psi^{(2)}$, производную $\partial_t U$ — в силу системы уравнений (7). В результате в правой части формулы (14) не содержится выражений от производных по t . Далее, после преобразований интегралов эта формула приводится к виду (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Каур D. J. J. Math. Anal. Appl., **54**, No. 3, 849–864 (1976).
2. Герджиков В. С., Христов Е. Х. Матем. заметки, **28**, № 4, 501–512 (1980).
3. Каур D. J. SIAM J. Appl. Math., **31**, No. 1, 121–133 (1976).
4. Кричевер И. М. УМН, **44**, No. 2, 121–184 (1989).
5. Fokas A. S., Ablowitz M. J. J. Math. Phys., **25**, No. 8, 2494–2505 (1984).
6. Arcadiev V. A., Pogrebkov A. K., Polivanov M. C. Phys. D, **36**, 189–197 (1989).
7. Кулиш П. П., Луновский В. Д. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **161**, 54–71 (1987).
8. Villaroel J., Ablowitz M. J. Inverse Problems, **7**, 451 (1991).
9. Sung L. Y., Fokas A. S. Preprint Institute for Nonlinear Studies, ins #98, April, 1990.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Поступило в редакцию

7 февраля 1996 г.

В переработанном виде

9 января 1997 г.

УДК 513.83

Почти евклидовы плоскости в ℓ_p^n

© 1998. Ю. И. Любич, О. А. Шаталова

Под ℓ_p^n ($p \geq 1$) мы понимаем пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p}$$

в канонических координатах. Вопрос о существовании евклидовых подпространств в ℓ_p^n естествен с геометрической точки зрения, а также тесно связан с различными задачами, возникающими в спектральной теории, численном анализе, теории чисел, теории представлений групп и т. д. (см. [3, 4, 6, 7]). В настоящей заметке мы ограничимся рассмотрением двумерных подпространств (плоскостей).

ТЕОРЕМА 1 [3]. Если ℓ_p^n содержит евклидову плоскость, то $p \in 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$.

Обратное утверждение верно при достаточно большом n .

ТЕОРЕМА 2 [4, 6]. При $p \in 2\mathbb{N}$ пространство ℓ_p^n содержит евклидову плоскость тогда и только тогда, когда $n \geq p/2 + 1$.

При $n \leq p/2$ естественно рассматривать « ε -евклидовы» плоскости с возможно меньшим значением ε . Конечно, при этом уже не нужны ограничения

на p , а проблема оказывается связанной с классической теоремой Дворецкого [2], в силу которой для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon, p)$, такое, что при $n \geq n(\varepsilon, p)$ пространство ℓ_p^n содержит ε -евклидову плоскость. Иными словами, при $n \geq n(\varepsilon, p)$ существует линейное вложение $f: \ell_2^2 \rightarrow \ell_p^n$, удовлетворяющее неравенству $\|f\| \cdot \|f^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, где $f^{-1}: \text{Im } f \rightarrow \ell_2^2$ — левое обратное к f . Для наименьшего значения $n(\varepsilon, p)$ при $p \notin 2\mathbb{N}$ имеется двухсторонняя оценка

$$a(p)\varepsilon^{-1/(p+1)} \leq n(\varepsilon, p) \leq b(p)\varepsilon^{-1/(p+1)} \ln^4 \varepsilon,$$

являющаяся частным случаем одной теоремы Бургейна и Линденштрауса [1]. (Явный вид коэффициентов $a(p)$ и $b(p)$ неизвестен.) Таким образом, если $p \notin 2\mathbb{N}$, то $n(\varepsilon, p) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном p , в то время как если $p \in 2\mathbb{N}$, то $n(\varepsilon, p) = p/2 + 1$, согласно теореме 2, т.е. в этом случае $n(\varepsilon, p)$ не зависит от ε .

Предполагая, что $p \in 2\mathbb{N}$, $2 \leq n \leq p/2$, мы рассмотрим вопрос о наименьшем $\varepsilon = \varepsilon_{n,p}$, при котором в ℓ_p^n имеется ε -евклидова плоскость. По соображениям компактности такое $\varepsilon_{n,p}$ существует. По теореме 2 $\varepsilon_{n,p} = 0$ при $n \geq p/2 + 1$. Отметим, что одна из количественных форм теоремы Дворецкого (см. [5]) дает оценку $\varepsilon_{n,p} \leq cn^{-2}$, где c — абсолютная константа. Таким образом, $\varepsilon_{n,p} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по p . Ниже мы даем количественное уточнение этого факта.

Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_{n,p}(\varphi) = \binom{p}{p/2} + 2 \sum_{j=1}^{[p/(2n)]} \binom{p}{p/2 - nj} \cos 2nj\varphi.$$

ЛЕММА. *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_{n,p} \leq \left(\frac{\max T_{n,p}(\varphi)}{\min T_{n,p}(\varphi)} \right)^{1/p} - 1. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 3. *Если $p = O(n)$, то $\varepsilon_{n,p}$ экспоненциально стремится к нулю.*

В некотором диапазоне значений (n, p) правая часть неравенства (1) может быть вычислена явно.

ТЕОРЕМА 4. *Если $n > p/4$, то*

$$\varepsilon_{n,p} \leq \left(\frac{\binom{p}{p/2} + 2\binom{p}{p/2-n}}{\binom{p}{p/2} - 2\binom{p}{p/2-n}} \right)^{1/p} - 1.$$

Если $p/8 < n \leq p/4$, то

$$\varepsilon_{n,p} \leq \left(\frac{\binom{p}{p/2} + 2\binom{p}{p/2-n} + 2\binom{p}{p/2-2n}}{\binom{p}{p/2} - 2\binom{p}{p/2-n} + 2\binom{p}{p/2-2n}} \right)^{1/p} - 1.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_{p/2,p} \leq \left(\frac{\binom{p}{p/2} + 2}{\binom{p}{p/2} - 2} \right)^{1/p} - 1. \quad (2)$$

Обозначим правую часть неравенства (2) через η_p . Очевидно, при $p \rightarrow \infty$

$$\eta_p \sim \frac{4}{p} \left(\frac{p}{p/2} \right)^{-1}.$$

Оказывается, что оценка (2) завышена не более чем вдвое асимптотически.

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место неравенство*

$$\varepsilon_{p/2,p} \geq \frac{2}{p} \left(\frac{p}{p/2} \right)^{-1}.$$

Представляется правдоподобным, что оценка (2) асимптотически точна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourgain J., Lindenstrauss J. In: Springer Lect. Notes in Math., Vol. 1376, 1989, pp. 278–288.
2. Dvoretzky A. In: Proc. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem, 1961, pp. 123–160.
3. Любич Ю. И. Сиб. матем. ж., **11**, № 2, 358–369 (1970).
4. Lyubich Yu. I., Vaserstein L. N. Geom. Dedicata, **47**, 327–362 (1993).
5. Milman V. D. In: Springer Lect. Notes in Math., **1317**, 283–289 (1988).
6. Reznick B. Memoirs Am. Math. Soc., **96**, 463 (1992).
7. Seidel J. J. Discrete Math., **136**, 281–293 (1994).

Department of Mathematics
Technion, Haifa, Israel

Поступило в редакцию
23 мая 1997 г.

УДК 517.984+517.5

О спектрах малых колебаний струны при наличии вязкого трения на одном конце

© 1998. В. Н. Пивоварчик

Задача, описывающая малые колебания струны, левый конец которой закреплен (свободен), а правый может двигаться с вязким трением перпендикулярно равновесной длине струны, имеет вид

$$\frac{du'}{dM(x)} + \lambda^2 u = 0, \quad (1)$$

$$u(\lambda, 0) = 0 \quad (u'_-(\lambda, 0) = 0), \quad (2) \quad ((2'))$$

$$\lambda^{-1} u'_+(\lambda, l) + i\nu u(\lambda, l) = 0. \quad (3)$$

Смысл операции $d/dM(x)$ см. в [1], $M(x)$ — неотрицательная неубывающая функция распределения массы струны, $M(x+0) = M(x)$ для всех $x \in [0, l]$, и