Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Пивоварчик, О спектрах малых колебаний струны при наличии вязкого трения на одном конце, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:06:41

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_{p/2,p} \leq \left(\frac{\binom{p}{p/2} + 2}{\binom{p}{p/2} - 2} \right)^{1/p} - 1. \quad (2)$$

Обозначим правую часть неравенства (2) через η_p . Очевидно, при $p \rightarrow \infty$

$$\eta_p \sim \frac{4}{p} \left(\frac{p}{p/2} \right)^{-1}.$$

Оказывается, что оценка (2) завышена не более чем вдвое асимптотически.

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место неравенство*

$$\varepsilon_{p/2,p} \geq \frac{2}{p} \left(\frac{p}{p/2} \right)^{-1}.$$

Представляется правдоподобным, что оценка (2) асимптотически точна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourgain J., Lindenstrauss J. In: Springer Lect. Notes in Math., Vol. 1376, 1989, pp. 278–288.
2. Dvoretzky A. In: Proc. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem, 1961, pp. 123–160.
3. Любич Ю. И. Сиб. матем. ж., **11**, № 2, 358–369 (1970).
4. Lyubich Yu. I., Vaserstein L. N. Geom. Dedicata, **47**, 327–362 (1993).
5. Milman V. D. In: Springer Lect. Notes in Math., **1317**, 283–289 (1988).
6. Reznick B. Memoirs Am. Math. Soc., **96**, 463 (1992).
7. Seidel J. J. Discrete Math., **136**, 281–293 (1994).

Department of Mathematics
Technion, Haifa, Israel

Поступило в редакцию
23 мая 1997 г.

УДК 517.984+517.5

О спектрах малых колебаний струны при наличии вязкого трения на одном конце

© 1998. В. Н. Пивоварчик

Задача, описывающая малые колебания струны, левый конец которой закреплен (свободен), а правый может двигаться с вязким трением перпендикулярно равновесной длине струны, имеет вид

$$\frac{du'}{dM(x)} + \lambda^2 u = 0, \quad (1)$$

$$u(\lambda, 0) = 0 \quad (u'_-(\lambda, 0) = 0), \quad (2) \quad ((2'))$$

$$\lambda^{-1} u'_+(\lambda, l) + i\nu u(\lambda, l) = 0. \quad (3)$$

Смысл операции $d/dM(x)$ см. в [1], $M(x)$ — неотрицательная неубывающая функция распределения массы струны, $M(x+0) = M(x)$ для всех $x \in [0, l]$, и

мы полагаем $M(-0) = 0$ и $M(l+0) < \infty$. Скачки функции $M(x)$ описывают сосредоточенные массы, горизонтальные участки ($M(x) \equiv \text{const}$) соответствуют безмассовым участкам (где струна является нитью), а $u'_-(x)$ и $u'_+(x)$ — соответственно левая и правая производные. Коэффициент вязкого трения ν больше 0. Уравнение (3) содержит множитель λ^{-1} , поскольку нам удобно исключить точку $\lambda = 0$ из спектра задачи (1), (2'), (3). Задачи (1), (2), (3) и (1), (2'), (3) (в дальнейшем задачи I и II) рассматривались в [2–4]. Их спектры симметричны относительно мнимой оси, что является следствием вещественности $M(x)$ и ν . Эти спектры состоят из нормальных собственных значений, лежащих в открытой верхней полуплоскости. Для задачи II это доказано в [3, 4], а для задачи I доказывается аналогично. Множество $\{\lambda_k\}$ из верхней полуплоскости назовем отделенным от вещественной оси, если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $\text{Im } \lambda_k \geq \varepsilon$ для всех λ_k (пустое множество считаем отделенным по определению). Обозначим через $u(\lambda, x)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3). Функция $\chi(\lambda) = -\lambda u(\lambda, 0)/u'_-(\lambda, 0)$ называется передаточной функцией [2]. Передаточную функцию назовем регулярной, если $\chi(\lambda) \in H_\infty$ и $\text{Re } \chi(\lambda) \geq \delta > 0$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$. Выполнение этих условий является важным в теории абсолютной устойчивости пассивных систем рассеяния [5, 6]. Назовем струну кусочно гладкой на $(a, b]$ (на (a, b)), если $M(x)$ непрерывна на $(a, b]$ (на (a, b)) и не имеет горизонтальных участков на $(a, b]$ (на (a, b)), $M'(x)$ и $M''(x)$ кусочно непрерывны, причем имеют лишь конечное число точек разрыва I рода, не имея иных точек разрыва, и на интервалах между точками разрыва функции $M'(x)$ принадлежат $W_{2,\text{loc}}^2$, для всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $0 < M'(x+0) < \infty$ и для всех $x \in (a, b]$ справедливы неравенства $0 < M'(x-0) < \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть струна является кусочно гладкой на $(0, l]$. Тогда спектры задач I и II отделены от вещественной оси.

В доказательстве этой и последующих теорем используется сведение задач I и II с помощью преобразования Лиувилля [7] к многоточечной задаче Штурма–Лиувилля с краевым условием, зависящим от спектрального параметра, и применяются известные интегральные представления для решений [8]. Пример асимптотического поведения собственных значений приведен в [9]. Отметим, что теорема 1 для $M'(x)$, удовлетворяющих условию Липшица, была доказана ранее в [12]. Там же получена оценка величины ε .

Обозначим через r число скачков функции $M(x)$ на $(0, l]$, а через s число горизонтальных участков.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s = 0$, $0 < r < \infty$ и струна кусочно гладкая всюду, кроме точек скачков. Тогда спектры задач I и II не отделены от вещественной оси.

В качестве примера рассмотрим случай одной сосредоточенной массы в точке $l_1 \in (0, l)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s = 0$, $r = 1$, и пусть функция $M(x)$ имеет скачок в точке $l_1 \in (0, l)$, т. е. $M(l_1) \neq M(l_1 - 0)$, причем $M(x) \in W_2^3(0, l_1) \cup W_2^3(l_1, l)$. Тогда при соответствующей нумерации спектр задачи I удовле-

творяет следующим равенствам:

$$\lambda_{2n} = \frac{\pi n}{a_1} + o(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\lambda_{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi n}{a_2} + \frac{i}{2a_2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right) + o(1) & (\alpha > 1), \\ \frac{\pi(n-1/2)}{a_2} + \frac{i}{2a_2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \right) + o(1) & (0 < \alpha < 1), \end{cases}$$

где

$$a_1 = \int_0^{l_1} (M'(x))^{1/2} dx, \quad a_2 = \int_{l_1}^l (M'(x))^{1/2} dx, \quad \alpha = \nu(M'(l))^{-1/2},$$

и $\lambda_{-n} = -\overline{\lambda_n}$ для не чисто мнимых λ_n . При $\alpha = 1$ либо $\operatorname{Im} \lambda_{2n-1} \rightarrow \infty$, либо ветвь $\{\lambda_{2n-1}\}_1^\infty \cup \{\lambda_{-2n+1}\}_1^\infty$ отсутствует.

Отметим, что эта ветвь отсутствует и в случае, когда $l_1 = l$. Соответствующие этому случаю асимптотики получены в [10]. Аналогичные результаты получены и для задачи II.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r = 0$, $0 < s < \infty$ и 0 не принадлежит горизонтальному участку функции $M(x)$. Пусть струна является кусочно гладкой вне горизонтальных участков. Тогда спектры задач I и II не отделены от вещественной оси.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $M(x)$ — кусочно гладкая функция на $(0, l]$ и 0 не является точкой скачка. Тогда передаточная функция регулярна.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $0 < s + r < \infty$ и 0 не принадлежит горизонтальному участку и не является точкой скачка. Пусть всюду, кроме точек скачка и горизонтальных участков, $M(x)$ является кусочно гладкой. Тогда передаточная функция не регулярна.

Рассмотрим задачу для струны с трением вдоль всей длины (коэффициент p больше 0), имеющую кольцо массы $\mu > 0$ на правом конце (левый закреплен), причем коэффициент трения кольца ν больше 0:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda^2 u - ip\lambda u = 0, \quad (4)$$

$$u(\lambda, 0) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} + i\nu\lambda u(\lambda, l) - \mu\lambda^2 u(\lambda, l) = 0, \quad (6)$$

где $A(x)$ — переменная жесткость струны (а плотность предполагается равной 1 тождественно).

ТЕОРЕМА 7. Если $A(x) \in W_2^4(0, l)$, то при соответствующей нумерации

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a} + \frac{ip}{2} + \frac{p_1}{n} + \frac{ip_2}{n^2} + \frac{p_3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $p_2 \leq 0$, если $\nu \leq p\mu$, $p_j \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Доказательство теоремы 7 см. в [11].

СЛЕДСТВИЕ. Спектр задачи (4)–(6) отделен от вещественной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. С., Крейн М. Г. В кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, М., 1968, с. 648–737 (дополнение II).
2. Аров Д. З. Сиб. матем. ж., **16**, № 3, 440–465 (1975).
3. Крейн М. Г., Нудельман А. А. ДАН СССР, **247**, № 5, 1046–1049 (1979).
4. Крейн М. Г., Нудельман А. А. J. Operator Theory, **22**, 369–395 (1989).
5. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. Наука, М., 1978.
6. Нудельман М. А. Алгебра и анализ, **6**, вып. 4, 187–203 (1994).
7. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics, Vol. 1. Interscience, New York, 1953.
8. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
9. Губреев Г. М., Пивоварчик В. Н. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 1, 70–74 (1997).
10. Pivovarchik V. N. Inverse problem for a smooth string with damping at one end. J. Operator Theory, **38**, No. 2, 243–263 (1997).
11. Pivovarchik V. N. Direct and inverse problems for a weakly damped string. To appear in J. Operator Theory.
12. Cox S., Zuazua E. Indiana Univ. Math. J., **44**, No. 2, 545–573 (1995).

Одесская государственная академия
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
28 августа 1996 г.

УДК 517.95

О волновом уравнении в цилиндре с ребрами

© 1998. Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с компактным замыканием, граница ∂G которой содержит коническую точку O — начало координат. Вне O граница гладкая, в окрестности этой точки область совпадает с открытым конусом $\mathbb{K}$. В цилиндре $Q = \{(x, t) : x \in G, t \in \mathbb{R}\}$ рассматривается задача

$$u_{tt} - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \partial Q. \quad (2)$$

Обсуждаются ее разрешимость в пространствах с весовыми нормами и асимптотика решений вблизи конической точки.

1. Функциональные пространства. Пусть s — целое неотрицательное число и $\beta \in \mathbb{R}$. Пространство $V_\beta^s(\mathbb{K})$ получается пополнением множества $C_0^\infty(\mathbb{K} \setminus O)$ по норме

$$\|v; V_\beta^s(\mathbb{K})\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int |x|^{2(\beta-s+|\alpha|)} |D_x^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3)$$