Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Пламеневский, О волновом уравнении в цилиндре с ребрами, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:12:48

Доказательство теоремы 7 см. в [11].

СЛЕДСТВИЕ. Спектр задачи (4)–(6) отделен от вещественной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. С., Крейн М. Г. В кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, М., 1968, с. 648–737 (дополнение II).
2. Аров Д. З. Сиб. матем. ж., **16**, № 3, 440–465 (1975).
3. Крейн М. Г., Нудельман А. А. ДАН СССР, **247**, № 5, 1046–1049 (1979).
4. Крейн М. Г., Нудельман А. А. J. Operator Theory, **22**, 369–395 (1989).
5. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. Наука, М., 1978.
6. Нудельман М. А. Алгебра и анализ, **6**, вып. 4, 187–203 (1994).
7. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics, Vol. 1. Interscience, New York, 1953.
8. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
9. Губреев Г. М., Пивоварчик В. Н. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 1, 70–74 (1997).
10. Pivovarchik V. N. Inverse problem for a smooth string with damping at one end. J. Operator Theory, **38**, No. 2, 243–263 (1997).
11. Pivovarchik V. N. Direct and inverse problems for a weakly damped string. To appear in J. Operator Theory.
12. Cox S., Zuazua E. Indiana Univ. Math. J., **44**, No. 2, 545–573 (1995).

Одесская государственная академия
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
28 августа 1996 г.

УДК 517.95

О волновом уравнении в цилиндре с ребрами

© 1998. Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с компактным замыканием, граница ∂G которой содержит коническую точку O — начало координат. Вне O граница гладкая, в окрестности этой точки область совпадает с открытым конусом $\mathbb{K}$. В цилиндре $Q = \{(x, t) : x \in G, t \in \mathbb{R}\}$ рассматривается задача

$$u_{tt} - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \partial Q. \quad (2)$$

Обсуждаются ее разрешимость в пространствах с весовыми нормами и асимптотика решений вблизи конической точки.

1. Функциональные пространства. Пусть s — целое неотрицательное число и $\beta \in \mathbb{R}$. Пространство $V_\beta^s(\mathbb{K})$ получается пополнением множества $C_0^\infty(\mathbb{K} \setminus O)$ по норме

$$\|v; V_\beta^s(\mathbb{K})\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int |x|^{2(\beta-s+|\alpha|)} |D_x^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Пространство $V_\beta^s(\mathbb{K}; q)$ с положительным параметром q наделяется нормой

$$\|v; V_\beta^s(\mathbb{K}; q)\| = \left(\sum_{k=0}^s q^{2k} \|v; V_\beta^{s-k}(\mathbb{K})\|^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Пусть $\hat{u}(x, \tau) = F_{t \rightarrow \tau} u(x, t)$ — преобразование Фурье, где $\tau = \sigma - i\gamma$, причем $\sigma, t \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$. Положим $\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}$ и обозначим через $H_\beta^s(\mathbb{D}; \gamma)$ пространство с нормой

$$\|u; H_\beta^s(\mathbb{D}; \gamma)\| = \left(\int \|\hat{u}(\cdot, \sigma - i\gamma); V_\beta^s(\mathbb{K}; |\tau|)\|^2 d\sigma \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Естественным образом определяются пространства $H_\beta^s(\partial\mathbb{D}; \gamma)$ для $s = 0, 1, \dots$. Наконец, для $s = 1, 2, \dots$ введем пространство $H_\beta^{s-1/2}(\partial\mathbb{D}; \gamma)$ следов на $\partial\mathbb{D}$ функций из $H_\beta^s(\mathbb{D}; \gamma)$.

2. Задача (1), (2) в случае $Q = \mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}$ (априорная оценка решений, разрешимость). Пусть $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, причем $\chi = 1$ в окрестности начала. Положим $X(t, \gamma) = F_{\sigma \rightarrow t}^{-1} \chi((\sigma^2 + \gamma^2)^{1/2})$ и введем оператор

$$(Xu)(x, t, \gamma) = \int \frac{1}{|x|} X\left(\frac{t-t'}{|x|}, \gamma|x|\right) u(x, t') dt'. \quad (6)$$

Пусть, кроме того, $(\Lambda f)(x, t) = F_{\tau \rightarrow t}^{-1} |\tau| F_{t' \rightarrow \tau} f(x, t')$, $\tau = \sigma + i\gamma$.

В $\Omega = \mathbb{K} \cap S^{n-1}$ определим операторный пучок $\mathfrak{A}(\lambda) = (i\lambda)^2 + (n-2)i\lambda + \delta$, заданный на функциях из $H^2(\Omega)$, удовлетворяющих условию $u|_{\partial\Omega} = 0$; через δ обозначен оператор Лапласа–Бельтрами на сфере S^{n-1} . Спектр пучка состоит из нормальных собственных значений

$$\lambda_{\pm k} = i(n-2 \pm ((n-2)^2 + 4\mu_k)^{1/2})/2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{\mu_k\}$ — последовательность собственных чисел оператора $-\delta$, $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\beta \neq 2 - n/2 - i\lambda_{\pm k}$ и $\beta \leq 1$. Пусть $u \in H_\beta^2(\mathbb{D}; \gamma)$, $f = u_{tt} - \Delta u$ и $g = u|_{\partial\mathbb{D}}$. Тогда для всех $\gamma > 0$*

$$\begin{aligned} & \|Xu(\cdot, \gamma); H_\beta^2(\mathbb{D}; \gamma)\|^2 + \gamma^2 \|u; H_\beta^1(\mathbb{D}; \gamma)\|^2 + \gamma \|D_\nu u; H_\beta^0(\partial\mathbb{D}; \gamma)\|^2 \\ & \leq c \{ \|f; H_\beta^0(\mathbb{D}; \gamma)\|^2 + \|Xg(\cdot, \gamma); H_\beta^{3/2}(\partial\mathbb{D}; \gamma)\|^2 + \gamma \|g; H_\beta^1(\partial\mathbb{D}; \gamma)\|^2 \\ & \quad + \gamma^{-2} \|\Lambda^{1-\beta} f; L_2(\mathbb{D})\|^2 + \gamma^{-1} \|\Lambda^{1-\beta} g; H_0^1(\mathbb{D}; \gamma)\|^2 \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Постоянная c в (7) не зависит ни от u , ни от $\gamma > 0$.

Поясним неравенство (7). Задача (1), (2) в $\mathbb{D}$ преобразованием Фурье $F_{t \rightarrow \tau}$ и заменой переменных сводится к некоторой задаче с параметром в конусе $\mathbb{K}$. Оператор (6) переходит в умножение на срезающую функцию с носителем вблизи вершины конуса. Этим умножением выделяется зона, где для решения упомянутой задачи в конусе справедлива эллиптическая оценка ([1; см. также [2]). Вне окрестности вершины применяется «локальная гиперболическая» оценка с параметром (см., например, [3]). Такое разбиение конуса

аналогично использованному в [4] (и затем в [2]) для эллиптических задач в областях с ребрами. Последние два слагаемых справа в (7) возникают при сшивании эллиптической и гиперболической оценок. Если в (7) отбросить слагаемые с X и Λ и заменить H_β^s на H^s (ср. с $H^s(Q; \gamma)$ в п. 3), то (7) перейдет в гиперболическую оценку, известную для гладкой области [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть в полосе $\beta - 2 + n/2 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq n/2 - 1$ нет собственных чисел пучка $\mathfrak{A}$. Пусть для функций f и g конечна правая часть формулы (7). Тогда при всяком $\gamma > 0$ существует единственное решение задачи (1), (2) в $\mathbb{D}$, подчиненное неравенству (7).

3. Задача (1), (2) в цилиндре Q . Введем пространство $H^s(Q; \gamma)$, норма в котором определяется выражением (5) с заменой $V_\beta^s(\mathbb{K}; |\tau|)$ на соболевское пространство $H^s(G; |\tau|)$ с параметром. Аналогично определяются пространства $H^s(\partial Q; \gamma)$. Пространства $\mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)$ и $\mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)$ введем при помощи разбиения единицы, связанного с покрытием области G . Для функций u с носителем около «ребра» квадрат нормы в $\mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)$ совпадает с левой частью формулы (7); вдали от ребра норма равна

$$\left(\gamma^2 \|u; H^1(Q; \gamma)\|^2 + \gamma \sum \|D_\nu^j u; H^{1-j}(\partial Q; \gamma)\|^2 \right)^{1/2}, \quad j = 0, 1.$$

Квадрат нормы в пространстве $\mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)$ вектор-функций (f, g) вблизи ребра равен выражению в скобках справа в (7); далеко от ребра норма равна $(\|f; H^0(Q; \gamma)\|^2 + \gamma \|g; H^1(\partial Q; \gamma)\|^2)^{1/2}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, γ_0 — достаточно большое число, а β то же, что и в теореме 2. Тогда существует единственное решение $u \in \mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)$, причем $\|u; \mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)\| \leq c \|\{f, g\}; \mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)\|$ с постоянной c , не зависящей от γ .

4. Асимптотика решений вблизи конической точки. Теоремы 1–3 позволяют оправдать асимптотику решения с остатком из $\mathscr{H}_\beta(Q; \gamma)$ при любом заданном $\beta < 1$. Приведем простейшую формулу. Пусть $\beta - 2 + n/2 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq n/2 - 1$ — достаточно узкая полоса, которая (внутри) содержит только одно собственное число λ_{-1} пучка $\mathfrak{A}$; пусть ϕ — нормированная собственная функция. При всяком $\tau = \sigma - i\gamma$, $\gamma \geq \gamma_0$, существует решение $\zeta(\cdot, \tau)$ задачи $(\Delta - \tau^2)\zeta(\cdot, \tau) = 0$ в G , $\zeta(\cdot, \tau)|_{\partial G} = 0$, выделенное асимптотикой $\zeta(x, \tau) = \chi(|x|)((n-2)^2 + 4\mu_1)^{-1/2} |x|^{-i\lambda_{-1}-n+2} \phi(\omega) + o(|x|^{-i\lambda_{-1}-n+2})$, $\omega = x/|x|$. Положим $Z(x, t) = F_{\tau \rightarrow t}^{-1} \zeta(x, \tau)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(f, g) \in \mathscr{H}_\beta(Q, \gamma)$. Тогда решение $u \in \mathscr{H}_1(Q, \gamma)$ задачи (1), (2) допускает представление

$$u(x, t) = \chi(|x|) |x|^{i\lambda_{-1}} \phi(\omega) (Xk)(x, t) + v(x, t),$$

где

$$k(t) = \int ((f(\cdot, t'), Z(\cdot, t-t'))_G - (g(\cdot, t'), \partial_\nu Z(\cdot, t-t'))_{\partial G}) dt',$$

X — оператор (6), $v \in \mathscr{H}_\beta(Q, \gamma)$ и, например, $(\cdot, \cdot)_G$ — двойственность в $L_2(G)$.

Укажем в заключение статьи [5–7], которые не использовались в настоящей работе, но имеют отношение к ее теме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. ТММО, **16**, 209–292 (1967).
2. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М., 1991.
3. Агранович М. С. Матем. сб., **84**(126), № 1, 27–64 (1971).
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. ТММО, **37**, 49–93 (1978).
5. Шериф Н. С. А. Вестник МГУ, сер. матем., мех., вып. 3, 7–10 (1980).
6. Мельников И. И. УМН, **37**, вып. 1, 149–150 (1982).
7. Eskin G. Commun. Partial Diff. Equat., **17**, No. 1, 2, 99–160 (1992).

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: boris.plamenevskij@pobox.spbu.ru

Поступило в редакцию
22 апреля 1997 г.

УДК 512.81

Деформации алгебр Ли и формулы характера

© 1998. А. В. Стояновский

0. В этой заметке мы докажем серию комбинаторных тождеств

$$\sum_{m_1, \dots, m_{2kn} \geq 0} \frac{q^{\sum c_{ij} m_i m_j}}{(q)_{m_1} \cdots (q)_{m_{2kn}}} = \frac{\sum_{\xi \in \tilde{T}} d((k+n+1)\xi) \cdot q^{\langle \xi, \rho \rangle + (k+n+1)\langle \xi, \xi \rangle / 2}}{(q)_{\infty}^{2n^2+n}}. \quad (*)$$

Здесь использованы следующие обозначения.

В левой части равенства $k \geq 0$, $n \geq 1$ — фиксированные целые числа, $(q)_m = (1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^m)$ и c_{ij} — матричные элементы матрицы $\frac{1}{2}A_{2n} \otimes \tilde{B}_k^{-1}$ — половины тензорного произведения матрицы Картана A_{2n} на обратную симметризованную матрицу Картана B_k ,

$$(\tilde{B}_k^{-1})_{ij} = \min(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

В правой части суммирование ведется по решетке $\tilde{T}$, порожденной длинными корнями алгебры Ли C_n , т.е. $\mathfrak{sp}(2n)$, ρ — полусумма положительных корней в C_n , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — нормализованная инвариантная билинейная форма, $d(\lambda)$ — виртуальная размерность, т.е. полиномиальная функция от λ , равная размерности неприводимого представления со старшим весом λ , когда λ — доминантный целочисленный вес, и $(q)_{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i)$.

Наши тождества — в некотором смысле родственники известных тождеств Гордона. Напомним, что в работе [1] мы интерпретировали тождества Гордона в терминах теории представлений аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$. Новые тождества (*) имеют аналогичную интерпретацию в терминах алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2n+1)$. Тождества для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2n)$ при $n > 1$ остаются пока неизвестными.

1. Сначала о левой части тождеств (*). Если $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, то символом $\hat{\mathfrak{a}}$ будем обозначать соответствующую алгебру токов $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}((t))$ (центрально