Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Стояновский, Деформации алгебр Ли и формулы характера, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 84–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 06:44:39

Укажем в заключение статьи [5–7], которые не использовались в настоящей работе, но имеют отношение к ее теме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. ТММО, **16**, 209–292 (1967).
2. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М., 1991.
3. Агранович М. С. Матем. сб., **84(126)**, № 1, 27–64 (1971).
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. ТММО, **37**, 49–93 (1978).
5. Шериф Н. С. А. Вестник МГУ, сер. матем., мех., вып. 3, 7–10 (1980).
6. Мельников И. И. УМН, **37**, вып. 1, 149–150 (1982).
7. Eskin G. Commun. Partial Diff. Equat., **17**, No. 1, 2, 99–160 (1992).

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: boris.plamenevskij@pobox.spbu.ru

Поступило в редакцию
22 апреля 1997 г.

УДК 512.81

Деформации алгебр Ли и формулы характера

© 1998. А. В. Стояновский

0. В этой заметке мы докажем серию комбинаторных тождеств

$$\sum_{m_1, \dots, m_{2kn} \geq 0} \frac{q^{\sum c_{ij} m_i m_j}}{(q)_{m_1} \cdots (q)_{m_{2kn}}} = \frac{\sum_{\xi \in \tilde{T}} d((k+n+1)\xi) \cdot q^{\langle \xi, \rho \rangle + (k+n+1)\langle \xi, \xi \rangle / 2}}{(q)_{\infty}^{2n^2+n}}. \quad (*)$$

Здесь использованы следующие обозначения.

В левой части равенства $k \geq 0$, $n \geq 1$ — фиксированные целые числа, $(q)_m = (1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^m)$ и c_{ij} — матричные элементы матрицы $\frac{1}{2}A_{2n} \otimes \tilde{B}_k^{-1}$ — половины тензорного произведения матрицы Картана A_{2n} на обратную симметризованную матрицу Картана B_k ,

$$(\tilde{B}_k^{-1})_{ij} = \min(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

В правой части суммирование ведется по решетке $\tilde{T}$, порожденной длинными корнями алгебры Ли C_n , т.е. $\mathfrak{sp}(2n)$, ρ — полусумма положительных корней в C_n , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — нормализованная инвариантная билинейная форма, $d(\lambda)$ — виртуальная размерность, т.е. полиномиальная функция от λ , равная размерности неприводимого представления со старшим весом λ , когда λ — доминантный целочисленный вес, и $(q)_{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i)$.

Наши тождества — в некотором смысле родственники известных тождеств Гордона. Напомним, что в работе [1] мы интерпретировали тождества Гордона в терминах теории представлений аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$. Новые тождества (*) имеют аналогичную интерпретацию в терминах алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2n+1)$. Тождества для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2n)$ при $n > 1$ остаются пока неизвестными.

1. Сначала о левой части тождеств (*). Если $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, то символом $\hat{\mathfrak{a}}$ будем обозначать соответствующую алгебру токов $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}((t))$ (центрально

расширенную, если $\mathfrak{a}$ полупроста). Пусть $\mathbb{V}_0$ — вакуумное интегрируемое неприводимое представление алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2n+1)$ на уровне k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ (т.е. представление со старшим весом $(0, k)$). Пусть $v_0 \in \mathbb{V}_0$ — вакуумный вектор. Рассмотрим подпространство $W_0 = U(\hat{\mathfrak{n}}) \cdot v_0 \subset \mathbb{V}_0$, где $\mathfrak{n}$ — верхнетреугольная подалгебра Ли в $\mathfrak{sl}(2n+1)$, а U — универсальная обертывающая. В [1, § 1] мы анонсировали формулу характера для подпространства W_0 . Это и есть левая часть тождества (*).

Правая же часть тождества (*) есть не что иное, как формула Вейля–Каца [2] для характера вакуумного неприводимого представления алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}(2n)$ на уровне k .

Таким образом, нам осталось доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Характер вакуумного представления алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}(2n)$ на уровне k равен характеру подпространства W_0 в вакуумном представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2n+1)$ на том же уровне.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $n=1$, $\mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2)$, теорема 1 обсуждалась в [1, § 4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Идея доказательства: и алгебра Ли $\mathfrak{sp}(2n)$, и алгебра Ли $\mathfrak{n}$ вложены в алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2n+1)$. Мы деформируем подалгебру $\mathfrak{sp}(2n)$ в подалгебру $\mathfrak{n}$ и докажем, что характер соответствующего подпространства в вакуумном представлении $\mathbb{V}_0$ алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}(2n+1)$ не меняется при деформации.

2. Деформация подалгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n) \subset \mathfrak{sl}(2n+1)$ в верхнетреугольную подалгебру Ли $\mathfrak{n}$. Эта конструкция принадлежит Б. Л. Фейгину.

Пусть $e_0, e_1, \dots, e_{2n}$ — базис в стандартном $(2n+1)$ -мерном векторном пространстве V . Рассмотрим подалгебру Ли $\mathfrak{g}_\varepsilon \subset \mathfrak{sl}(2n+1)$, аннулирующую вектор e_0 и аннулирующую кососимметричную билинейную форму

$$\beta_\varepsilon = e_0 \wedge e_1 + \varepsilon e_1 \wedge e_2 + \varepsilon^2 e_2 \wedge e_3 + \dots + \varepsilon^{2n-1} e_{2n-1} \wedge e_{2n}.$$

Мы утверждаем, что при $\varepsilon \neq 0$ эта подалгебра сопряжена с $\mathfrak{sp}(2n) \subset \mathfrak{sl}(2n+1)$. Это очевидно, если учесть, что $\beta_\varepsilon^n \wedge e_0 \neq 0 \in \wedge^{2n+1} V$. С другой стороны, посмотрим, во что вырождается эта подалгебра при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вот список инвариантов нашей алгебры Ли $\mathfrak{g}_\varepsilon$ во внешней алгебре $\wedge V$:

$$\begin{aligned} \text{в } \Lambda^1 V & \quad e_0, \\ \text{в } \Lambda^2 V & \quad \beta_\varepsilon = e_0 \wedge e_1 + o(1), \\ \text{в } \Lambda^3 V & \quad e_0 \wedge \beta_\varepsilon = \varepsilon e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + o(\varepsilon), \\ & \quad \dots\dots\dots \\ \text{в } \Lambda^{2i-1} V & \quad e_0 \wedge \beta_\varepsilon^{i-1} = \varepsilon^{(i-1)^2} e_0 \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2i-2} + o(\varepsilon^{(i-1)^2}), \\ \text{в } \Lambda^{2i} V & \quad \beta_\varepsilon^i = \varepsilon^{i^2-i} e_0 \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{2i-1} + o(\varepsilon^{i^2-i}), \\ & \quad \dots\dots\dots \\ \text{в } \Lambda^{2n+1} V & \quad e_0 \wedge \beta_\varepsilon^n = \varepsilon^{n^2} e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_{2n}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ наша подалгебра стремится (в смысле топологии грассманиана) к верхнетреугольной подалгебре $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{sl}(2n+1)$.

3. Рассмотрим теперь семейство подпространств $W_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} U(\hat{\mathfrak{g}}_\varepsilon) \cdot v_0 \subset \mathbb{V}_0$. При $\varepsilon \neq 0$ подпространство W_ε есть вакуумное представление алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}_\varepsilon \cong \hat{\mathfrak{sp}}(2n)$, а при $\varepsilon = 0$ подпространство W_0 получается действием универсальной обертывающей $U(\hat{\mathfrak{n}})$ на вакуумный вектор v_0 . Докажем, что характеры подпространств W_ε и W_0 равны, и тем самым теорема будет доказана.

Обозначим через E_{ij} стандартный матричный элемент алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2n+1)$. Пусть J_ε — левый идеал алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}}_\varepsilon)$, аннулирующий вектор v_0 . Это фильтрованное пространство, причем присоединенные факторы фильтрации градуированы и их градуировочные компоненты конечномерны. Из линейной алгебры ясно, что в специальной точке $\varepsilon = 0$ идеал J_ε может только подскочить (а характер пространства $W_\varepsilon \simeq U(\hat{\mathfrak{g}}_\varepsilon)/J_\varepsilon$, наоборот, уменьшиться). Нам осталось доказать, что идеал не подскочит, т. е. все элементы идеала J_0 деформируются в некоторые элементы идеала J_ε . В работе [1, §1] мы анонсировали, что образующие левого идеала J_0 — это, во-первых, «положительная часть» $\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}[[t]]$ алгебры $\hat{\mathfrak{n}}$ и, во-вторых, двусторонние образующие, а именно, фурье-компоненты выражений $E_{i+1,i}(z)^{k+1}$, где $E_{i+1,i}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (E_{i+1,i} \otimes t^j) z^{-j-1}$ — ток матричного элемента $E_{i+1,i} \in \mathfrak{n}$.

Рассмотрим теперь идеал J_ε . Он, прежде всего, очевидно, содержит положительную часть $\mathfrak{g}_\varepsilon \otimes \mathbb{C}[[t]]$. Рассмотрим, далее, элементы

$$E_{i+1,i}^\varepsilon = E_{i+1,i} - \varepsilon E_{i+1,i+2} \in \mathfrak{g}_\varepsilon.$$

Эти элементы нильпотентны, а следовательно, для них выполняется соотношение $E_{i+1,i}^\varepsilon(z)^{k+1} \in J_\varepsilon$ (например, по теореме Джекобсона–Морозова и потому, что эти соотношения выполняются для $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$). Таким образом, мы видим, что образующие (а значит, и все элементы) идеала J_0 деформируются в элементы из J_ε , что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как указал нам Д. А. Панов, существует более очевидный пример деформации простой подалгебры Ли в нильпотентную: подалгебра Ли $\mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sl}(n)$ вырождается в верхнетреугольную подалгебру Ли после сопряжения матрицей $\text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако в этом случае утверждение, аналогичное теореме 1, неверно: даже показатели роста у характеров различны.

Я хотел бы поблагодарить своего учителя Б. Л. Фейгина за постановку задачи, помощь при решении и теплую поддержку при работе над заметкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стояновский А. В., Фейгин Б. Л. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 1, 68–90 (1994).
2. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993.