Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Червов, Следы операторов рождения–уничтожения и формулы Фредгольма, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 1, 90–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:41:00

Этот путь был предложен в [4], а затем численно реализован и обоснован в ряде конкретных ситуаций в духе теоремы 4 (см., например, [5, 6]).

Получим оценку меры обусловленности оператора B_V , позволяющую вывести оценку относительной погрешности вычисления точного решения (см. [1, п. 22.2]). Для этого введем в предположении V следующую численную характеристику близости подпространств M и N : $p(M) = \|(Q_N)^{-1}Q(Q-P)\|$.

Заметим, что $p(N) = 0$. Кроме того, $p(M)$ может принимать сколь угодно большие значения. Так будет, например, если X гильбертово, а в M и в N имеются ненулевые элементы, как угодно близкие к ортогональным.

ТЕОРЕМА 5. *В условиях леммы 5 имеет место следующая оценка меры обусловленности $\mu(B_V)$ оператора B_V : $\mu(B_V) \leq \mu(B_U)(1 + p^2(M))^{1/2}$ и, таким образом, оценка относительной погрешности на каждом шаге последовательных приближений будет наименьшей при $M = N$.*

Доказательство проводится так же, как и в теореме 4 (см. [1, п. 22.4]); оно использует теорему Пифагора в X и определение $p(M)$.

Здесь мы продолжили исследование различных аспектов метода продолжения по параметру (см. [7–8]). Случай однопараметрического семейства решений был анонсирован нами в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. Наука, М., 1980, 1993.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Наука, М., 1969.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Наука, М., 1965.
4. Ворovich И. И., Зипалова В. Ф. Прикл. матем. и мех., **29**, вып. 5, 894–901 (1965).
5. Григорюк Э. И., Шалашилин В. М. Проблемы нелинейного деформирования. Наука, М., 1988.
6. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Докл. РАН, **334**, № 5, 566–568 (1994).
7. Треногин В. А. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 2, 93–95 (1996).
8. Треногин В. А. Докл. РАН, **350**, № 4, 455–457 (1996).
9. Треногин В. А. В кн.: Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы механики и сплошных и сыпучих сред». Москва, 1997, с. 127.

Московский государственный институт
стали и сплавов (технологический университет)

Поступило в редакцию
17 апреля 1997 г.

УДК 517.41

Следы операторов рождения–уничтожения и формулы Фредгольма*

© 1998. А. В. Червов

Доказана формула для следов некоторого класса операторов (к нему, в частности, относятся вертексные операторы), следы которых могут быть использованы для вычисления корреляционных функций и формфакторов в

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-15-96939, и INTAS, грант 93-0183.

квантовой теории поля. Приведено выражение для детерминанта и минора Фредгольма через такие следы и короткое доказательство формул Фредгольма для решения интегрального уравнения. Кроме того, найдена формула, выражающая решение уравнения через «перманенты Фредгольма». Эта работа является сокращенным вариантом препринта [7].

1. Обозначения. Пусть V — линейное пространство, $T_+(V)$ — его симметрическая, а $T_-(V)$ — внешняя алгебры и $T_\pm^n(V)$ — подпространства в $T_\pm(V)$ тензоров ранга n . Любой оператор ρ на пространстве V индуцирует операторы $\bar{\rho}_\pm$ на пространствах $T_\pm(V)$ по формуле $\bar{\rho}_\pm(\prod_i^\pm v_i) = \prod_i^\pm \rho(v_i)$, где $v_i \in V$, а $\prod_i^\pm v_i$ — произведение векторов $v_i \in V = T_\pm^1(V)$ в алгебрах $T_\pm(V)$ соответственно. Продолжим спаривание между V и сопряженным пространством V^* на пространства $T_\pm(V)$ и $T_\pm(V^*)$ по правилу Вика:

$$\left\langle \prod_{i=1, \dots, m}^\pm f_i \left| \prod_{j=1, \dots, m}^\pm u_j \right. \right\rangle = D^\pm |\langle f_i | u_j \rangle|_{i,j \leq m}.$$

Здесь $u_i \in V$, $f_i \in V^*$, $D^+|a_{i,j}| = \text{per } |a_{i,j}|$ — перманент (сумма произведений элементов, стоящих в разных строках и столбцах) квадратной матрицы $|a_{i,j}|$ и $D^-|a_{i,j}| = \text{Det } |a_{i,j}|$ — детерминант.

Для произвольного $v \in T_\pm(V)$ обозначим через $C^\pm(v): T_\pm(V) \rightarrow T_\pm(V)$ оператор умножения слева на v и назовем его оператором рождения. Для $w \in T_\pm(V^*)$ обозначим через $A^\pm(w): T_\pm(V) \rightarrow T_\pm(V)$ и назовем оператором уничтожения оператор, сопряженный к оператору $C^\pm(w): T_\pm(V^*) \rightarrow T_\pm(V^*)$. Отметим, что если $v \in T_\pm^1(V)$, $w \in T_\pm^1(V^*)$, то $A^\pm(w)C^\pm(v) = \pm C^\pm(v)A^\pm(w) = \langle w | v \rangle$.

2. Формула следа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор ρ на нормированном пространстве V называется ядерным оператором или оператором со следом, если существует представление $\rho(x) = \sum_{i>0} f_i(x)y_i$, где $x \in V$, $y_i \in V$, причем $|y_i| < C$, $f_i \in V^*$, причем $|f_i| < C$, $\sum_{i>0} |f_i(y_i)| < \infty$ и y_i , f_i не зависят от x . Следом $\text{Tr } \rho$ оператора ρ называется $\sum_{i>0} f_i(y_i)$.

Далее будем предполагать, что пространство V обладает свойством метрической аппроксимации Гротендика [1]. Это обеспечивает корректность определения следа на V . Известно, что свойством аппроксимации обладают l^p , $L^p[a, b]$, $C^p[a, b]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ρ — оператор со следом на V . Тогда операторы $\bar{\rho}_-$, $\bar{\rho}_- A^-(w_-) C^-(v_-)$ являются операторами со следом на $T_-(V)$. Кроме того, операторы $\bar{\rho}_+$, $\bar{\rho}_+ A^+(w_+) C^+(v_+)$ являются операторами со следом на $T_+(V)$ при дополнительном требовании $|\rho| < 1$. Здесь $v_\pm \in T_\pm(V)$, $w_\pm \in T_\pm(V^*)$.

Далее будем предполагать, что ρ — оператор со следом на V , а при рассмотрении следов на $T_+(V)$ дополнительно требовать, чтобы $|\rho| < 1$. (При рассмотрении следов на $T_+^n(V)$ условие $|\rho| < 1$ не требуется.)

ТЕОРЕМА 1. Для $\mathbf{v}_\pm \in T_\pm(V)$, $\mathbf{w}_\pm \in T_\pm V^*$, $\mathbf{u} \in T_+^1(V)$, $\mathbf{f} \in T_+^1(V^*)$ верны формулы

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{T_\pm(V)}(\bar{\rho}_\pm A^\pm(\mathbf{w}_\pm) C^\pm(\mathbf{v}_\pm)) &= \mathrm{Tr}_{T_\pm(V)}(\bar{\rho}_\pm) \left\langle \mathbf{w}_\pm \left| \frac{1}{1 \mp \bar{\rho}_\pm} \mathbf{v}_\pm \right. \right\rangle, \\ \mathrm{Tr}_{T_\pm(V)}(\bar{\rho}_\pm C^\pm(\mathbf{v}_\pm) A^\pm(\mathbf{w}_\pm)) &= \mathrm{Tr}_{T_\pm(V)}(\bar{\rho}_\pm) \left\langle \mathbf{w}_\pm \left| \frac{\bar{\rho}_\pm}{1 \mp \bar{\rho}_\pm} \mathbf{v}_\pm \right. \right\rangle, \\ \mathrm{Tr}_{T_+(V)}(\bar{\rho}_+ A^+(e^{\mathbf{f}}) C^+(e^{\mathbf{u}})) &= \mathrm{Tr}_{T_+(V)}(\bar{\rho}_+) \exp \left\langle \mathbf{f} \left| \frac{1}{1 - \bar{\rho}_+} \mathbf{u} \right. \right\rangle.\end{aligned}$$

Частные случаи этих формул могут быть найдены в [3, 4].

Доказательство основано на аппроксимации оператора ρ диагонализующими операторами с конечномерным образом, след которых вычисляется как сумма диагональных элементов в базисе собственных векторов. Эта сумма разлагается в произведение сомножителей, каждый из которых легко вычисляется.

Отметим также следующие формулы, получаемые прямым, но достаточно длинным вычислением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathbf{v}_i \in T_\pm^1(V)$, $\mathbf{w}_i \in T_\pm^1(V^*)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{T_\pm^n(V)} \bar{\rho}_\pm &= \sum_{n_j \geq 0 : \sum_j j n_j = n} \frac{(\pm 1)^n}{n_1! n_2! \dots 1^{n_1} 2^{n_2} \dots} \prod_l (\pm \mathrm{Tr}_V(\rho^l))^{n_l}, \\ \mathrm{Tr}_{T_\pm^n(V)} \left(\bar{\rho}_\pm \prod_{i=1}^k A^\pm(\mathbf{w}_i) \prod_{j=1}^k C^\pm(\mathbf{v}_j) \right) &= \sum_{r, q_j \geq 0 : \sum_j q_j + r = n} \mathrm{Tr}_{T_\pm^r(V)}(\bar{\rho}_\pm) \left\langle \prod_{j=1, \dots, k}^\pm \mathbf{w}_j \left| \prod_{j=1, \dots, k}^\pm (\pm \rho)^{q_j}(\mathbf{v}_j) \right. \right\rangle.\end{aligned}$$

3. Формулы для детерминанта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть ρ — оператор на конечномерном пространстве V . Тогда $\det_V(1 \mp \rho)^{\mp 1} = \mathrm{Tr}_{T_\pm(V)} \bar{\rho}_\pm$.

Пусть e_i , $i = 1, \dots, K$, — базис в V , $\tilde{e}_i$ — дуальный базис; тогда очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{T_\pm^n(V)} \bar{\rho}_\pm &= \frac{1}{n!} \sum_{l_1, \dots, l_n \geq 0} \left\langle \prod_{i=1, \dots, n}^\pm \tilde{e}_{l_i} \left| \bar{\rho}_\pm \prod_{i=1, \dots, n}^\pm e_{l_i} \right. \right\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{l_1, \dots, l_n \geq 0} D^\pm |\langle \tilde{e}_{l_j} | \rho e_{l_j} \rangle|_{1 \leq j \leq n}.\end{aligned}$$

Подставив это в предложение 3, получим

СЛЕДСТВИЕ 1 (конечномерная формула Фредгольма для детерминанта).

$$\det_V(1 \mp \rho)^{\mp 1} = \mathrm{Tr}_{T_\pm(V)} \bar{\rho}_\pm = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l_1, \dots, l_n} D^\pm |\langle \tilde{e}_{l_j} | \rho e_{l_j} \rangle|_{i, j \leq n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим детерминант оператора $1 + \rho$ равенством $\text{Det}_V(1 + \rho) = \text{Tr}_{T-V} \bar{\rho}_-$ (или $\text{Det}_V(1 - \rho)^{-1} = \text{Tr}_{T+V} \bar{\rho}_+$ для $|\rho| < 1$).

Это определение совпадает с обычным определением для конечномерного V в силу предложения 3 и подходит для бесконечномерного V , поскольку $\text{Tr}_{T_{\pm}(V)} \bar{\rho}_{\pm}$ существует в случае $\dim V = \infty$. Далее мы покажем, что это просто переформулировка фредгольмовского определения детерминанта. Можно также показать, что этот детерминант равен произведению собственных значений оператора $1 + \rho$.

4. Формулы Фредгольма. Пусть $V = C[a, b]$ и ρ — интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x, y)$. Напомним определения детерминанта Фредгольма и минора Фредгольма:

$$\begin{aligned} D^{\text{fred}}(1 + \rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int d\xi_1 \dots d\xi_n \det |K(\xi_i, \xi_j)|_{i,j \geq n}, \\ D_{s,t}^{\text{fred}}(1 + \rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int d\xi_1 \dots d\xi_n \\ &\quad \times \det \begin{vmatrix} K(s, t) & K(s, \xi_1) & \dots & K(s, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\xi_n, t) & K(\xi_n, \xi_1) & \dots & K(\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор $A(\delta(x - s)) \bar{\rho}_+ C(\delta(x - t))$ является оператором со следом на $T_{\pm}(V)$, и верны формулы

$$\begin{aligned} D^{\text{fred}}(1 + \rho) &= \text{Tr}_{T_-(V)} \bar{\rho}_- = \text{Det}(1 + \rho), \\ D_{s,t}^{\text{fred}}(1 + \rho) &= \text{Tr}_{T_-(V)} A(\delta(x - s)) \bar{\rho}_- C(\delta(x - t)). \end{aligned}$$

На наивном уровне утверждение очевидно, так как если рассмотреть «непрерывный базис» в $C[a, b]$, состоящий из $\delta(x - \xi)$, заиндексированный с помощью $\xi \in [a, b]$, то формула для D^{fred} совпадает с формулой следствия 2 для $\text{Det}(1 + \rho)$. Преобразовав $\text{Tr}_{T_-(V)} A(\delta(x - s)) \bar{\rho}_- C(\delta(x - t))$ согласно предложению 3, а затем воспользовавшись следствием 2, получим в точности определение $D_{s,t}^{\text{fred}}$. Строгое доказательство также достаточно просто.

Используя теорему 1, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \delta(x - s) \left| \frac{\rho}{1 + \rho} \delta(x - t) \right. \right\rangle &= \frac{\text{Tr}_{T_-(V)} A(\delta(x - s)) \bar{\rho}_- C(\delta(x - t))}{\text{Tr}_{T_-(V)} \bar{\rho}_-} \\ &= \frac{D_{s,t}^{\text{fred}}(1 + \rho)}{D^{\text{fred}}(1 + \rho)}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить формулу Фредгольма для решения интегрального уравнения на функцию $\phi(x)$

$$\phi(x) + \int K(x, y) \phi(y) dy = f(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (формула Фредгольма).

$$\phi(s) = f(s) - \int dt \frac{D_{s,t}^{\text{fred}}(1+\rho)}{D^{\text{fred}}(1+\rho)} f(t).$$

Для операторов ρ , таких, что $|\rho| < 1$, определим «перманенты Фредгольма» $P^{\text{fred}}(1-\rho)$ и $P_{s,t}^{\text{fred}}(1-\rho)$ по формулам, аналогичным (1), но с заменой $\det$ на per . Рассуждая, как выше, придем к такому результату:

$$\text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. } \phi(s) = f(s) + \int dt \frac{P_{s,t}^{\text{fred}}(1-\rho)}{P^{\text{fred}}(1-\rho)} f(t),$$

$$P^{\text{fred}}(1-\rho) = \text{Tr}_{T_+(V)} \bar{\rho}_+ = \text{Det}(1-\rho)^{-1},$$

$$P_{s,t}^{\text{fred}}(1-\rho) = \text{Tr}_{T_+(V)} A(\delta(x-s)) \bar{\rho}_+ C(\delta(x-t)).$$

5. Следы вертексных операторов. Вертексными называются [2] операторы вида $\exp(\sum_j \lambda_j x_j) \exp(\sum_j \mu_j \partial/\partial x_j)$, определенные на пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Определим оператор t^D на $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ формулой

$$t^D(x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}) = t^{i_1+2i_2+\dots+ki_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}.$$

Очевидно, что $\text{Tr}(t^D) = \prod_i (1-t^i)^{-1}$. Из теоремы 1 легко следует формула

$$\text{Tr}(t^D) \exp\left(\sum_j \lambda_j x_j\right) \exp\left(\sum_j \mu_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \text{Tr}(t^D) \exp\left(\sum_j \frac{t^j}{1-t^j} \lambda_j \mu_j\right).$$

Она эквивалентна формуле (8.6) в [3], используемой для вычисления корреляционных функций для XXZ-модели Гейзенберга.

Введем производящие функции

$$a_-(z) = \sum_{i>0} \frac{x_i z^i}{i}, \quad a_+(z) = \sum_{i>0} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{z^i}.$$

Определим оператор $e^{\gamma d}$ на $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ условиями $e^{\gamma d} a_-(z) = a_-(z+\gamma)$ и $e^{\gamma d} (\prod_l x_{li}) = \prod_l (e^{\gamma d} x_{li})$. Из теоремы 1 можно вывести формулу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Tr } e^{\gamma d}} \text{Tr} \left\{ e^{\gamma d} \exp\left(\sum_i k_i a_-(\alpha_i)\right) \exp\left(\sum_i l_i a_+(\beta_i)\right) \right\} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i,j} (\beta_j - \alpha_j - m\gamma)^{-k_j l_j}. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует формула (4.4) в [5], которая используется для нахождения формфакторов $SU(2)$ -инвариантной модели Тирринга.

Отметим также работы [6], где корреляционные функции интегрируемых моделей выражались в виде детерминантов Фредгольма.

Автор выражает признательность научному руководителю С. М. Хорошину за постановку задачи и помощь в ее решении, а также благодарен С. З. Пакуляку за пояснения и Б. Л. Фейгину, указавшему на работу [4].

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** *Пич А.* Операторные идеалы. Мир, М., 1982.
- 2.** *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993.
- 3.** *Jimbo M., Miwa T.* Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, col. 85, Am. Math. Soc., 1994.
- 4.** *Сато М., Дзимбо М., Миwa Т.* Голономные квантовые поля. Мир, М., 1983.
- 5.** *Хорошкин С., Лебедев Д., Пакуляк С.* Препринт ИТЭФ-ТН-15/95, q-alg/9602030.
- 6.** *Корепин В. Е. и др.* Препринты, hep-th/9612252, hep-th/9406133.
- 7.** *Червов А.* Препринт ИТЭФ-ТН-8/97, q-alg/9703017.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Институт теоретической и экспериментальной физики
e-mail: alex@lchervova.home.bio.msu.ru

Поступило в редакцию
26 марта 1997 г.