Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 64–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:57:26

$\beta_\infty \leq \alpha_0$. Тогда равенство (3) верно в том и только том случае, когда выполнено (4).

В частности, рассмотрим случай степенных весовых функций $w_0(x) = x^l$ и $w_1(x) = x^m$. Тогда условия (*) выполняются, если (а) $l > p_0 - 1$ и $m \leq 0$ или (б) $l > p_0 - 1$, $l > m$ и $0 \leq m < p_1 - 1$. Так как $k(t) \asymp t^{\theta_0}$, где $\theta_0 = \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1(l+1)-p_0(m+1)}$, то $\alpha = \beta = \alpha_0 = \beta_\infty = \theta_0$, и мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Предположим, что для p_0, p_1 ($1 \leq p_0 < p_1 < \infty$), l и m выполнено хотя бы одно из условий (а) и (б). Тогда равенство*

$$(L_{p_0}(x^l) \cap N, L_{p_1}(x^m) \cap N)_{\theta,q} = (L_{p_0}(x^l), L_{p_1}(x^m))_{\theta,q} \cap N$$

выполнено в том и только том случае, когда $\theta \neq \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1(l+1)-p_0(m+1)}$.

В случае $p_0 = p_1 = q$ последнее утверждение иным способом было доказано в [1, Corollary 1].

Автор благодарен проф. Л. Малигранда за полезные обсуждения некоторых вопросов, связанных с доказательством теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krugljak N., Maligranda L., Persson L.-E. Ark. Mat., **37**, 323–344 (1999).
2. Ivanov S., Kalton N. Алгебра и анализ, **13**, No. 2, 93–115 (2001).
3. Лионс Ж. Л., Маджenes Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, М., 1971.
4. Triebel H. Math. Nachr., **69**, 57–60 (1975).
5. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, М., 1980.
6. Maligranda L. Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, **10**, 113–118 (1985).
7. Wallsten R. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1902, 1988, pp. 410–419.
8. Pisier G. Pacific J. Math., **155**, 341–368 (1992).
9. Janson S. Ark. Math., **31**, 307–338 (1993).
10. Кисляков С. В., Куанхуа Шу. Алгебра и анализ, **8**, вып. 4, 75–109 (1996).
11. Löfström J. Interpolation of subspaces, Technical report No. 10, Univ. of Göteborg, 1997.
12. Astashkin S. V. J. Math. Math. Sci., **25**, No. 7, 451–465 (2001).
13. Kaijser S., Sunehag P. Interpolation subspaces and the unit problem, In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics (Lund 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 345–353.
14. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
28 августа 2003 г.

УДК 517.44

Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+^*$

© 2005. Б. И. ГОЛУБОВ

1. В работе [1] Бутцер и Вагнер ввели сильную двоичную производную и интеграл порядка $r = 1, 2, \dots$ и доказали, что они являются взаимно обратными операторами. Их определения относятся к функциям $f \in L[0, 1)$ или $f \in L(G)$, где G — двоичная группа, изоморфная модифицированному отрезку $[0, 1]^*$.

В другой работе [2] тех же авторов введена сильная двоичная производная для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, а Вагнер [3] определил сильный двоичный интеграл также для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Точечные двоичные производные $f^{[r]}(x)$ порядка $r = 1, 2, \dots$ для функций $f \in L[0, 1)$ и их связь с сильными интегралами $I_r f$ подробно изучались в работе Бутцера и Вагнера [4].

Для функций $f \in L(G_p)$, где G_p — компактная группа порядка $p = 2, 3, \dots$, изоморфная модифицированному отрезку $[0, 1]_p^*$, понятие сильной двоичной производной и интеграла дробного порядка $\alpha > 0$ введено Онневиром [5], который установил, что они являются взаимно обратными операторами. Этот же факт для $\alpha = 1$ и функций, заданных на более общих компактных группах, доказали Пал и Шимон [6]. В другой работе Онневира [7] введены модифицированные точечная и сильная двоичные производные для функций на локально компактной двоичной группе K_2 , изоморфной модифицированной положительной полуоси $\mathbb{R}_+^*$. Пал [8] получил достаточное условие для точечного дифференцирования в смысле Бутцера–Вагнера преобразования Фурье–Уолша.

В нашей работе [9] для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ изучались свойства операторов модифицированного двоичного сильного дифференцирования и интегрирования первого порядка.

В данной работе для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ определяются модифицированные точечные и сильные двоичные производные и интегралы положительного порядка и устанавливаются их свойства.

2. Напомним определение преобразования Фурье–Уолша, которое впервые появилось в работе Файна [10] (см. также [11, Ch. 9] и [12, гл. 6]). Для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (1)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Отметим, что x_n (x_{-n}) для $n \in \mathbb{N}$ является n -м двоичным разрядом дробной (целой) части числа $x \in \mathbb{R}_+$, а двоично-рациональным числам $x \in \mathbb{R}_+$ сопоставляются конечные двоичные разложения.

Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geq n(x)$, то для $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число $t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n)$. Ядро Уолша $\psi(x, y)$ определяется для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi(x, y) = (-1)^{t(x, y)}. \quad (2)$$

Преобразование Фурье–Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) f(y) dy. \quad (3)$$

Это определение можно обобщить на функции из пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1 \leq p \leq 2$, но это нам не потребуется.

Свойства преобразования Фурье–Уолша (3) аналогичны свойствам обычного преобразования Фурье (см., например, [11, ch. 9] или [12, гл. 6]).

На $\mathbb{R}_+$ введем операцию сложения $\oplus$, положив $x \oplus y = z$ для $x, y \in \mathbb{R}_+$, где число z в двоичной системе счисления имеет двоичные разряды $z_n \equiv x_n + y_n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а x_n, y_n вычисляются по правилу (1).

Напомним определение W -непрерывности функции. Функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x \oplus y) - f(x)| < \varepsilon$ при $0 < y < \delta$ (см. [12, гл. 1]).

Отметим, что преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ является W -непрерывной функцией на $\mathbb{R}_+$ (см. [12, теорема 6.1.5]), а ядро Уолша W -непрерывно по каждому своему аргументу при фиксированном другом аргументе.

Введем понятие двоичной точки Лебега функции. Точку $x \in \mathbb{R}_+$ назовем двоичной точкой Лебега локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f , если она определена в точке x и $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \int_0^{2^{-n}} |f(x \oplus t) - f(x)| dt = 0$. Очевидно, что точка W -непрерывности функции является ее двоичной точкой Лебега, а обратное утверждение неверно. Почти все точки локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f являются ее двоичными точками Лебега.

3. Определим функцию $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ равенствами $h(x) = 2^{-n}$, $2^n \leq x < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 1. Для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ во всякой точке $x > 0$ определена функция $W_n^\alpha(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{2^{-n}}^{2^m} \psi(x, y) (h(y))^\alpha dy$, причем $W_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$ и $W_n^\alpha(x) = 0$ для $x \geq 2^n$.

Для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ положим $\Lambda_n^\alpha(x) = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt$, $x \in \mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 2. При $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо включение $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Напомним определение двоичной свертки $f * g$ двух функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) g(x \oplus y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Как и в случае обычной свертки, $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{(f * g)} = \tilde{f} \tilde{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $\alpha > 0$ и для функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * W_n^\alpha - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$, то функцию $g \equiv J_\alpha(f)$ назовем *модифицированным сильным двоичным интегралом (МСДИ) порядка α функции f* . Заменяв в этом определении ядра W_n^α на Λ_n^α , получим определение *модифицированной сильной двоичной производной (МСДП) $g \equiv D^{(\alpha)}(f)$ порядка α функции f* .

Критерий существования МСДИ (МСДП) порядка $\alpha > 0$ дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$ и $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда функция g является МСДИ (соответственно МСДП) порядка α функции f тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^\alpha$ для $x > 0$ (соответственно $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^{-\alpha}$ для $x > 0$).

Для сильного двоичного интеграла и производной первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера подобный результат доказан в работе [3], а вторая часть этой теоремы фактически доказана в работе [13], однако там МСДП порядка $\alpha > 0$ определена несколько иначе.

Следующая теорема устанавливает связь между операторами J_α и $D^{(\alpha)}$.

ТЕОРЕМА 2. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ при некотором $\alpha > 0$ существует МСДИ $J_\alpha(f)$ (существует МСДП $D^{(\alpha)}(f)$ и $\tilde{f}(0) = 0$), то у $J_\alpha(f)$ (соответственно у $D^{(\alpha)}(f)$), существует МСДП (МСДИ) порядка α , причем $D^{(\alpha)}(J_\alpha(f)) = f$ (соответственно $J_\alpha(D^{(\alpha)}(f)) = f$).

Для сильного двоичного интеграла и производной натурального порядка в смысле Бутцера–Вагнера подобный результат известен для функций $f \in L(G)$, где $G = [0, 1]$ или $G = \mathbb{R}_+$ (см. [3] и [4]). Для функций $f \in L(G_p)$, где G_p — компактная группа порядка $p = 2, 3, \dots$, изоморфная модифицированному отрезку $[0, 1]_p^*$, результат, подобный теореме 2, доказан Онневиром [5].

Семейство операторов $\{J_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ ($\{D^{(\alpha)}\}_{\alpha \geq 0}$) образует полугруппу с единицей $I \equiv J_0 = D^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha, \beta \geq 0$ и функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСДИ $J_\alpha(f) \equiv \varphi$ (МСДП $D^{(\alpha)}(f) \equiv \varphi$) порядка α , а функция φ имеет МСДИ $J_\beta(\varphi)$ (МСДП $D^{(\beta)}(\varphi)$) порядка β . Тогда функция f имеет МСДИ $J_{\alpha+\beta}(f)$ (МСДП $D^{(\alpha+\beta)}(f)$) порядка $\alpha + \beta$, причем $J_{\alpha+\beta}(f) = J_\beta(J_\alpha(f))$ (соответственно $D^{(\alpha+\beta)}(f) = D^{(\beta)}(D^{(\alpha)}(f))$).

Для функций $f \in L(G_p)$ результат, подобный второй части теоремы 2, доказан в работе [5].

Известно, что система функций $\{\bar{a}_{m,n}\}_{m=0}^{+\infty}$, где $\bar{a}_{m,n}(x) = 2^{-n/2}\psi(x, m2^{-n})$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ ортонормирована на $\Delta_n = [0, 2^n)$ (см. [12, теорема 1.5.6]) и полна в $L^p(\Delta_n)$, $1 \leq p \leq \infty$ [14].

В следующей теореме указана система собственных функций операторов J_α и $D^{(\alpha)}$, а через $X_E(x)$ обозначена характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}_+$.

ТЕОРЕМА 4. Каждая из функций $a_{m,n}(x) = \psi(x, m2^{-n})X_{[0, 2^n)}(x)$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$) имеет МСДИ и МСДП порядка $\alpha > 0$, причем $J_\alpha(a_{m,n}) = 2^{-r\alpha}a_{m,n}$ и $D^{(\alpha)}(a_{m,n}) = 2^{r\alpha}a_{m,n}$, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для функций $a_{0,n}(x) = X_{[0, 2^n)}(x)$ ($n \in \mathbb{Z}$) не существует МСДИ порядка $\alpha \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\alpha > 0$ справедливы равенства $J_\alpha(a_{1,n}) = 2^{n\alpha}a_{1,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $D^{(\alpha)}(a_{m,0}) = 2^{r\alpha}a_{m,0}$, $2^r \leq m < 2^{r+1}$, где $r = 0, 1, \dots$.

Обозначим через L_{J_α} ($L_{D^{(\alpha)}}$) множество всех функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для каждой из которых существует МСДИ $J_\alpha(f)$ (МСДП $D^{(\alpha)}(f)$). Очевидно, что L_{J_α} и $L_{D^{(\alpha)}}$ являются линейными подпространствами в $L(\mathbb{R}_+)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Линейные операторы $J_\alpha: L_{J_\alpha} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ и $D^{(\alpha)}: L_{D^{(\alpha)}} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ не ограничены при любом $\alpha > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При любом $\alpha > 0$ оба множества L_{J_α} и $L_{D^{(\alpha)}}$ плотны в двоичном пространстве Харди $H(\mathbb{R}_+)$ (определение пространства $H(\mathbb{R}_+)$ дано в работе [15]).

Отметим, что существование сильного двоичного интеграла первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера от функций $a_{m,n}(x) = \psi(x, m2^{-n})X_{[0, 2^n)}(x)$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$) установлено в работе Пала и Шиппа [16]. В ней доказано, что линейная

оболочка этой системы функций плотна в метрике пространства $L(\mathbb{R}_+)$ в множестве всех функций, имеющих сильный двоичный интеграл первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера.

4. Введем модифицированные точечные двоичные производные и интегралы дробного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и при некотором $\alpha > 0$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел $d^{(\alpha)}(f)(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2^n} (h(y))^{-\alpha} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy$, то назовем его *модифицированной двоичной производной (МДП)* порядка α функции f в точке x . Если же существует конечный предел

$$j_\alpha(f)(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{2^{-n}}^{2^n} (h(y))^\alpha \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy,$$

то этот предел назовем *модифицированным двоичным интегралом (МДИ)* порядка α функции f в точке x .

Достаточные условия существования МДП и МДИ порядка $\alpha > 0$ дает

ТЕОРЕМА 5. Если $\alpha > 0$, а функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ ($h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$), то существует W -непрерывная МДП $d^{(\alpha)}(f)(x)$ (W -непрерывный МДИ $j_\alpha(f)(x)$) на $\mathbb{R}_+$, причем $d^{(\alpha)}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(y))^{-\alpha} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy$ ($j_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(y))^\alpha \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy$).

Следующую теорему можно считать двоичным аналогом классических теорем Лебега о дифференцировании интеграла Лебега по его верхнему пределу и о восстановлении функции по ее производной.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha > 0$, а функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСДИ $J_\alpha(f)$ (МСДП $D^{(\alpha)}(f)$) порядка α . Тогда во всякой двоичной точке Лебега $x \in \mathbb{R}_+$ функции f , а следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}_+$ справедливо равенство $d^{(\alpha)}(J_\alpha(f))(x) = f(x)$ ($j_\alpha(D^{(\alpha)}(f))(x) = f(x)$).

Отметим, что для функций $f \in L[0, 1]$ при условии $\int_0^1 f(x) dx = 0$ и натуральных r справедливо равенство $(I_r f)^{[r]}(x) = f(x)$ почти всюду, где $I_r f$ — сильный интеграл ($f^{[r]}$ — двоичная точечная производная) порядка r в смысле Бутцера–Вагнера. Это доказал Шипп [17], отвечая на вопрос Вагнера [18]. В работе [4] доказан критерий того, что почти всюду на $[0, 1]$ справедливо равенство $f(x) = \int_0^1 f(t) dt + (I_r f^{[r]})(x)$, где r натуральное. Для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, имеющих интеграл первого порядка $I_1 f$ в смысле Бутцера–Вагнера, равенство $(I_1 f)^{[1]}(x) = f(x)$ почти всюду доказали Пал и Шипп (см. [19] или [11, р. 445]).

Сильные и точечные двоичные производные (интегралы) согласованы друг с другом.

ТЕОРЕМА 7. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДП $D^{(\alpha)}(f)$ (МСДИ $J_\alpha(f)$) порядка $\alpha > 0$ и $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ ($h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$), то у функции f в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует МДП $d^{(\alpha)}(f)(x)$ (существует МДИ $j_\alpha(f)(x)$) порядка α , причем $D^{(\alpha)}(f)(x) = d^{(\alpha)}(f)(x)$ (соответственно $J_\alpha(f)(x) = j_\alpha(f)(x)$) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что для ядер Λ_n^α и W_n^α справедливы включения $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и $W_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$ (см. леммы 1 и 2). Поэтому свертка $(f * \Lambda_n^\alpha)(x)$ определена в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+) \cup$

$L^\infty(\mathbb{R}_+)$, а свертка $(f * W_n^\alpha)(x)$ — для функций $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Этот факт позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+)$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * \Lambda_n^\alpha)(x)$, то число $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x)$ назовем *двоичной производной (ДП)* порядка α функции f в точке x . Если же для функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел $\bar{j}_\alpha(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * W_n^\alpha)(x)$, то число $\bar{j}_\alpha(f)(x)$ назовем *двоичным интегралом (ДИ)* порядка α функции f в точке x .

ТЕОРЕМА 8. Ядро Уолша $\psi(\circ, y) \equiv \psi_y(\circ)$ (см. (2)) имеет ДП и ДИ порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_0)(x) = \bar{j}_\alpha(\psi_0)(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, а для $y > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ справедливы равенства $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_y)(x) = (h(y))^{-\alpha} \psi_y(x)$ и $\bar{j}_\alpha(\psi_y)(x) = (h(y))^\alpha \psi_y(x)$.

Для $\alpha = 1$ первая часть этой теоремы, касающаяся двоичной производной, фактически доказана в [7], однако определение двоичной производной первого порядка в [7] несколько отличается от нашего, причем функции заданы на локально компактной двоичной группе K_2 (см. выше разд. 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно доказать, что функция $\varphi = X_{[0,1]}$ имеет ДП порядка $\alpha > 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $\bar{d}^{(\alpha)}(\varphi)(x) = (2^{\alpha+1} - 1)^{-1}$ для $x \in [0, 1]$ и $\bar{d}^{(\alpha)}(\varphi)(x) = -(1 - 2^{-\alpha}) \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} X_{[0,2^k)}(x)$ для $x \geq 1$. Эта же функция имеет ДИ порядка $\alpha \in (0, 1)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ и ни в одной точке $x \in \mathbb{R}_+$ не имеет ДИ порядка $\alpha \geq 1$.

Сравнивая эти результаты с формулами $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_0)(x) \equiv 0$ и $\bar{j}_\alpha(\psi_0)(x) \equiv 0$, где $\psi_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$ (см. теорему 8), можно заключить, что наличие в данной точке двоичной производной или двоичного интеграла порядка $\alpha > 0$ не является локальным свойством функции.

Как показывают следующие две теоремы, определения 2 и 3 согласованы друг с другом.

ТЕОРЕМА 9. Если функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию $h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ (или условию $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$), то она имеет ДИ $\bar{j}_\alpha(f)(x)$ (соответственно ДП $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x)$) почти всюду (п.в.) на $\mathbb{R}_+$, причем $\bar{j}_\alpha(f)(x) = j_\alpha(f)(x)$ п.в. (соответственно $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x) = d^{(\alpha)}(f)(x)$ п.в.). При этом, согласно теореме 5, $j_\alpha(f)(x)$ и $d^{(\alpha)}(f)(x)$ существуют всюду на $\mathbb{R}_+$.

ТЕОРЕМА 10. Каждая из функций $a_{m,n}(x) = \psi(x, m2^{-n}) X_{[0,2^n)}(x)$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$) имеет ДИ и ДП, а также МДИ и МДП порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $\bar{j}_\alpha(a_{m,n})(x) = j_\alpha(a_{m,n})(x) = 2^{-r\alpha} a_{m,n}(x)$ и $\bar{d}^{(\alpha)}(a_{m,n})(x) = d^{(\alpha)}(a_{m,n})(x) = 2^{r\alpha} a_{m,n}(x)$, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Следующая теорема является двоичным аналогом классических теорем о дифференцировании и интегрировании преобразования Фурье.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\alpha > 0$ и $f, h^{-\alpha} f \in L(\mathbb{R}_+)$ ($f, h^\alpha f \in L(\mathbb{R}_+)$). Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ имеет двоичную производную (двоичный интеграл) порядка α , причем $\bar{d}^{(\alpha)}(\tilde{f})(x) = (\widetilde{h^{-\alpha} f})(x)$ (соответственно $\bar{j}_\alpha(\tilde{f})(x) = (\widetilde{h^\alpha f})(x)$).

При условии, что $f(x), xf(x) \in L(\mathbb{R}_+)$, равенство $(\tilde{f})^{[1]}(x) = \widetilde{(tf(t))}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$ доказал Пал [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Butzer P. L., Wagner H. J. Appl. Analysis, **3**, No. 1, 29–46 (1973).
2. Butzer P. L., Wagner H. J. In: Proc. Symp. Naval Res. Laboratory, Washington, D.C., April 18–20, 1973, pp. 75–81.
3. Wagner J. H. In: Proc. Symp. Theory and applications of Walsh functions, Hatfield Polytechnic, UK, 1975, pp. 101–129.
4. Butzer P. L., Wagner H. J. Analysis Math., **1**, 171–196 (1975).
5. Onneweer C. W. Analysis Math., **3**, 119–130 (1977).
6. Pal J., Simon P. Acta Math. Acad. Sci. Hung., **29**, 155–164 (1977).
7. Onneweer C. W. Appl. Analysis, **9**, 267–278 (1979).
8. Pal J. Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math., **18**, 49–54 (1975).
9. Голубов Б. И. Матем. сб., **193**, №4, 37–60 (2002).
10. Fine N. J. Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 66–77 (1950).
11. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
12. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. Наука, М., 1987.
13. Onneweer C. W. Trans. Amer. Math. Soc., **258**, 923–931 (1980).
14. Голубов Б. И. Изв. РАН, Сер. матем., **67**, №1, 33–58 (2003).
15. Голубов Б. И. Изв. РАН, Сер. матем., **65**, №3, 3–14 (2001).
16. Pal J., Schipp F. Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Computatoria, **8**, 91–108 (1987).
17. Schipp F. Mathematica Balkanica, **4**, 541–546 (1974).
18. Wagner J. H. Ein Differential- und Integralkalkül in der Walsh–Fourier Analysis mit Anwendungen. Westdeutscher Verlag, Köln–Opladen, 1974.
19. Pal J., Schipp F. In: Theory and applications of Gibbs derivatives. Proc. First Intern. Workshop on Gibbs Derivatives. Math. Inst., Beograd, 1989, pp. 103–113.

Московский инженерно-физический институт
e-mail: golubov@mail.mipt.ru

Поступило в редакцию
28 августа 2003 г.

УДК 517.5

Демпфированные осцилляторные интегралы и проблема ограниченности максимальных операторов

© 2005. И. А. ИКРОМОВ

1. История и мотивы проблемы. Одним из классических результатов действительного анализа является так называемая максимальная теорема И. М. Стейна о сферических средних в $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 2$) [10]. Позднее аналог теоремы Стейна для плоского случая был доказан Дж. Бурженом в работе [4]. Эти результаты стали отправной точкой для изучения различных классов максимальных операторов, связанных с подмногообразиями евклидова пространства. В данной работе рассматриваются максимальные операторы M , определенные соотношением

$$Mg(x) = \sup_{t>0} \left| \int_S g(x - ty) \psi(y) d\sigma(y) \right|, \quad (1)$$

где $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность, ψ — фиксированная неотрицательная функция с компактным носителем, $d\sigma$ — индуцированная лебегова мера на S и $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.