Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, Дискретный спектр многочастичного псевдорелятивистского гамильтониана, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 2, 83–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 07:12:25

Yajima K. On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator. Preprint, 1996. **6.** *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. Наука, М., 1976. **7.** *Буслаев В. С.* Функциональный анализ и его прил., **3**, вып. 3, 17–31 (1969). **8.** *Montgomery H. L.* Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. CBMS, Regional Conference Series in Math., No. 84, Am. Math. Soc., 1994.

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
Санкт-Петербургский государственный
университет

Поступило в редакцию
28 февраля 1997 г.

УДК 517.9

Дискретный спектр многочастичного псевдорелятивистского гамильтониана*

© 1998. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин

1. В настоящей заметке устанавливаются свойства дискретного спектра псевдорелятивистских гамильтонианов систем типа атомов и атомных ионов в предположении бесконечности массы ядра. Для атомов и положительных ионов получена асимптотика числа собственных значений вблизи границы существенного спектра. Показано, что асимптотика дискретного спектра в псевдорелятивистском случае аналогична полученной для нерелятивистских гамильтонианов [1], несмотря на то, что релятивистские эффекты влияют на положение существенного спектра.

Наши общие результаты — теоремы 1–4 — даются без учета перестановочной симметрии, ибо этот учет аналогичен проведенному в [1, 6]. Однако, для случая атомов и положительных ионов — ввиду его важности — мы приводим асимптотику дискретного спектра и с учетом запрета Паули (теорема 5).

2. Пусть

$$H_n = \sum_{s=1}^n (\sqrt{p_s^2 + 1} - 1) + \sum_{s=1}^n V_0(|r_s|) + \sum_{s,t=1, s < t}^n V_1(|r_{st}|), \quad (1)$$

где

$$p_s = \frac{1}{i} \nabla_s = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial z_s} \right), \quad V_t(|r_1|) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad t = 0, 1,$$

$$V_1(|r_1|) \geq 0, \quad V_1(|r_1|) = |r_1|^{-\gamma} \quad \text{при } |r_1| \geq A > 0,$$

$$V_0(|r_1|) \leq 0, \quad V_0(|r_1|) = -Z|r_1|^{-\gamma} \quad \text{при } |r_1| \geq A,$$

$$V_0(|r_1|) > -a_0|r_1|^{-1} \quad \text{при } |r_1| < A,$$

* Исследования поддержаны грантом ИНТАС № 95-0414 и грантом Госкомвуза № 95-02.1-50.

$\gamma > 0$, $A > 0$, $Z > 0$ — некоторые константы, a_0 — константа, обеспечивающая полуограниченность оператора H_n снизу [2], $r_{st} = r_s - r_t$ и $r_s = (x_s, y_s, z_s)$ — радиус-вектор частицы с номером s . Мы предполагаем частицы тождественными и считаем, что их массы равны 1, а заряды -1 . Расширим оператор H_n , определенный в C_0^∞ , до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

Для произвольного самосопряженного оператора A и любого вещественного числа ν обозначим через $\sigma_{\text{ess}}(A)$, $\sigma_d(A)$ и $N(A; \nu)$ соответственно существенный и дискретный спектры оператора A и ранг спектрального проектора $P_{(-\infty, \nu]}(A)$ оператора A .

Известно, что [3]

$$\mu \equiv \mu_n := \inf \sigma_{\text{ess}}(H_n) = \inf H_{n-1}. \quad (2)$$

Мы изучаем здесь случай, когда при $n \geq 2$

$$\mu \in \sigma_d(H_{n-1}). \quad (3)$$

Для рассматриваемых операторов (1) требование (3) заведомо выполняется при $\gamma < 2$ и $Z > n-1$. Это утверждение следует из неравенства $\inf H_m < \mu_m$, $m = 2, 3, \dots, n-1$, которое доказывается по индукции с помощью построения пробных функций (например, по образцу [4]). Для упрощения формулировок теорем 1, 3 предполагаем далее, что (наименьшее) собственное значение μ оператора H_{n-1} невырожденно. Для нерелятивистского n -частичного гамильтониана без учета симметрии это предположение выполнено для широкого класса потенциалов (включая кулоновские [5]). В релятивистском случае доказательство указанного предположения авторам неизвестно.

3. ТЕОРЕМА 1. Пусть $Z > n-1$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_0 > 0$ и $C > 0$, что при всех $0 < \lambda < \lambda_0$

$$nN(h(\varepsilon); -\lambda) - C \leq N(H_n; \mu - \lambda) \leq nN(h(-\varepsilon); -\lambda) + C, \quad (4)$$

где «эффективный» одночастичный оператор $h(\varepsilon)$ задается равенством

$$h(\pm\varepsilon) = \frac{1}{2}(1 \pm \varepsilon)p_1^2 - (Z - n + 1)(1 + |r_1|)^{-\gamma}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Z \leq n-1$. Тогда дискретный спектр оператора H_n конечен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство теоремы 2 при $Z = n-1$ существенно использует невырожденность (наименьшего) собственного значения μ оператора H_{n-1} . Если μ вырожденно, то для доказательства конечности множества $\sigma_d(H_n)$ достаточно (аналогично [6]) потребовать, чтобы все отвечающие числу μ собственные функции оператора H_{n-1} имели одинаковую четность. При $Z < n-1$ теорема 2 верна и при вырожденности собственного значения μ независимо от четности отвечающих μ собственных функций оператора H_{n-1} .

4. Из теоремы 1 и известных спектральных свойств оператора h [7] вытекают спектральные асимптотики и условия конечности дискретного спектра оператора H_n при $Z > n-1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $Z > n - 1$ и $\gamma < 2$. Тогда

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} N(H_n; \mu - \lambda) / g_n(\lambda) = 1,$$

где

$$g_n(\lambda) = \frac{2n}{3\pi} (Q\sqrt{2})^{4,5-1,5\gamma} \lambda^{1,5\gamma-3} B\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad Q = Z - n + 1 > 0,$$

$B(t_1, t_2)$ — бета-функция.

Для кулоновских потенциалов $\gamma = 1$ и, значит,

$$g_n(\lambda) = (6\sqrt{2})^{-1} Q^3 \lambda^{-3/2}.$$

Теорема 3 показывает, что главный член асимптотики дискретного спектра в релятивистском случае совпадает с аналогичным членом в нерелятивистском случае (при $\gamma = 1$ см. неравенство 2.5 из [1]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $Z > n - 1$ и $\gamma > 2$. Тогда дискретный спектр оператора H_n конечен.

5. Приведем в заключение результат для релятивистских гамильтонианов атомов и (+)-ионов, учитывающий перестановочную симметрию. Пусть

$$V_1(|r_1|) = |r_1|^{-1}, \quad V_0(|r_1|) = -Z|r_1|, \quad Z < a_0.$$

Обозначим через α_{mi} и $|\alpha_{mi}|$ тип и размерность неприводимого представления группы перестановок m тождественных электронов, отвечающего разбиению числа m на i двоек и $m - 2i$ единиц, $0 \leq i \leq [m/2]$, $0 \leq m \leq n$, (только такие типы симметрии разрешены для электронной системы принципом Паули). Пусть $H_m^{\alpha_{mi}}$ — ограничение оператора H_m на подпространство функций симметрии α_{mi} . Тогда для любого k , $0 \leq k \leq [n/2]$,

$$\mu_n^{\alpha_{nk}} \equiv \inf \sigma_{\text{ess}}(H_n^{\alpha_{nk}}) = \min_i \inf H_{n-1}^{\alpha_{n-1,i}}, \quad i = k - 1, k, \quad i \leq |(n - 1)/2|. \quad (5)$$

Для простоты считаем, что минимум в (5) достигается только для одного значения i , скажем, для $i = s$. При $Z > n - 1$ число $\mu_n^{\alpha_{nk}}$ есть дискретное собственное значение оператора $H_{n-1}^{\alpha_{n-1,s}}$. Мы предполагаем, что оно невырожденно «по симметрии» (ср. п. 2), т. е. что размерность соответствующего собственного пространства равна $|\alpha_{n-1,s}|$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $Z > n - 1$, $0 \leq k \leq [n/2]$. Тогда

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} N(H_n^{\alpha_{nk}}; \mu_n^{\alpha_{nk}} - \lambda) / g_n(k, \lambda) = 1,$$

где $g_n(k, \lambda) = (6\sqrt{2})^{-1} |\alpha_{nk}| Q^3 \lambda^{3/2}$.

6. Общие схемы доказательств теорем 1, 5 и 2 соответственно аналогичны использованным в [1] и [6]. Наиболее существенные отличия связаны с тем, что оператор кинетической энергии в релятивистском случае не является локальным. Как следствие этого отвечающие «локализационной ошибке» члены, которые получаются при разбиении единицы конфигурационного пространства, имеют носители, лежащие не только в «областях исправления». Поэтому

важнейшей новой частью доказательств явилось получение подходящих — более точных, чем в [8], — оценок для локализационной ошибки оператора релятивистской кинетической энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. Труды ММО, **54**, 187–213 (1991).
2. Herbst I. Comm. Math. Phys., **53**, 285–294 (1977).
3. Lewis R. T., Siedentop H., Vugalter S. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **97**, No. 1, 1–28 (1997).
4. Жислин Г. М. Труды ММО, **9**, 81–120 (1960).
5. Жислин Г. М. УМН, **14**, вып. 1, 149–152 (1961).
6. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. ТМФ, **32**, № 4, 70–87 (1977).
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4. Анализ операторов. Мир. М., 1982.
8. Lieb E., Yau H. T. Comm. Math. Phys., **118**, 177–213 (1988).

Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступило в редакцию
6 августа 1997 г.

УДК 517.9

О топологических характеристиках липшицевых функционалов

© 1998. В. С. Климов

1. В статье приняты следующие обозначения: X — действительное сепарабельное рефлексивное B -пространство, X^* — сопряженное к нему пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — каноническая билинейная форма на $X \times X^*$, $\text{Cv}(X^*)$ — совокупность непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X^* , $\Gamma(X)$ — множество конечномерных подпространств пространства X , $\overline{\mathcal{M}}$ ($\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, $\partial\mathcal{M}$) — замыкание (внутренность, граница) множества $\mathcal{M} \subset X$ и $\Lambda(\mathcal{M})$ — множество функционалов $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих локальному условию Липшица. Символы $\rightharpoonup$ и $\rightarrow$ означают слабую и сильную сходимости соответственно. Если $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \subset X$, то $S(\mathcal{M})$ — это класс ограниченных многозначных операторов $A: \mathcal{M} \rightarrow X^*$, удовлетворяющих условиям 1) $A(x) \in \text{Cv}(X^*)$; 2) для произвольных последовательностей $x_n \in \mathcal{M}$, $x_n^* \in A(x_n)$, таких, что

$$x_n \rightharpoonup x, \quad x_n^* \rightarrow x^*, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle,$$

имеют место соотношения $x_n \rightarrow x$, $x^* \in A(x)$. Оператор A невырожден на $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$, если $0 \notin A(\mathcal{M}_1)$.

ЛЕММА 1. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве X , $A \in S(\overline{\Omega})$ и A невырожден на $\partial\Omega$. Тогда существуют $E \in \Gamma(X)$ и такое непрерывное векторное поле $v: \partial\Omega \rightarrow X$, что $v(x) \in E$ и $\langle x - v(x), x^* \rangle > 0$ ($x \in \partial\Omega$, $x^* \in A(x)$).