Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, О топологических характеристиках липшицевых функционалов, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 2, 86–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:55:38

важнейшей новой частью доказательств явилось получение подходящих — более точных, чем в [8], — оценок для локализационной ошибки оператора релятивистской кинетической энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. Труды ММО, **54**, 187–213 (1991).
2. Herbst I. Comm. Math. Phys., **53**, 285–294 (1977).
3. Lewis R. T., Siedentop H., Vugalter S. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **97**, No. 1, 1–28 (1997).
4. Жислин Г. М. Труды ММО, **9**, 81–120 (1960).
5. Жислин Г. М. УМН, **14**, вып. 1, 149–152 (1961).
6. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. ТМФ, **32**, № 4, 70–87 (1977).
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4. Анализ операторов. Мир. М., 1982.
8. Lieb E., Yau H. T. Comm. Math. Phys., **118**, 177–213 (1988).

Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступило в редакцию
6 августа 1997 г.

УДК 517.9

О топологических характеристиках липшицевых функционалов

© 1998. В. С. Климов

1. В статье приняты следующие обозначения: X — действительное сепарабельное рефлексивное B -пространство, X^* — сопряженное к нему пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — каноническая билинейная форма на $X \times X^*$, $\text{Cv}(X^*)$ — совокупность непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X^* , $\Gamma(X)$ — множество конечномерных подпространств пространства X , $\overline{\mathcal{M}}$ ($\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, $\partial\mathcal{M}$) — замыкание (внутренность, граница) множества $\mathcal{M} \subset X$ и $\Lambda(\mathcal{M})$ — множество функционалов $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих локальному условию Липшица. Символы $\rightharpoonup$ и $\rightarrow$ означают слабую и сильную сходимости соответственно. Если $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \subset X$, то $S(\mathcal{M})$ — это класс ограниченных многозначных операторов $A: \mathcal{M} \rightarrow X^*$, удовлетворяющих условиям 1) $A(x) \in \text{Cv}(X^*)$; 2) для произвольных последовательностей $x_n \in \mathcal{M}$, $x_n^* \in A(x_n)$, таких, что

$$x_n \rightharpoonup x, \quad x_n^* \rightarrow x^*, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle,$$

имеют место соотношения $x_n \rightarrow x$, $x^* \in A(x)$. Оператор A невырожден на $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$, если $0 \notin A(\mathcal{M}_1)$.

ЛЕММА 1. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве X , $A \in S(\overline{\Omega})$ и A невырожден на $\partial\Omega$. Тогда существуют $E \in \Gamma(X)$ и такое непрерывное векторное поле $v: \partial\Omega \rightarrow X$, что $v(x) \in E$ и $\langle x - v(x), x^* \rangle > 0$ ($x \in \partial\Omega$, $x^* \in A(x)$).

Вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля $\Phi(x) = x - v(x)$ на $\partial\Omega$ [1, с. 135] не зависит от выбора E и v , удовлетворяющих указанным в лемме условиям. Определяемое таким образом целое число $\gamma(\Phi, \Omega)$ назовем вращением поля A на $\partial\Omega$ и обозначим символом $\gamma(A, \Omega)$. Подобные характеристики вводились и использовались в [2–6].

Область $\Omega \subset X$ назовем сильно липшицевой, если Ω — ограниченное множество и для каждой точки x из $\partial\Omega$ существует такая ее окрестность $\mathcal{G}$ и такая функция h класса $\Lambda(\mathcal{G})$, что $\mathcal{G} \cap \Omega = \{y \in \mathcal{G}, h(y) < 0\}$, $h(x) = 0$ и $0 \notin \partial h(x)$ (здесь и далее $\partial h(x)$ — обобщенный градиент функционала h в точке x [7, с. 34]). Если Ω — сильно липшицева область, то для любой точки x из $\partial\Omega$ существуют гиперкасательные [7, с. 59] к $\bar{\Omega}$.

Ниже $H_q(\mathfrak{M})$ ($q = 0, 1, \dots$) — группа целочисленных гомологий с компактными носителями метрического пространства $\mathfrak{M}$ [8, с. 244], а $\chi(\mathfrak{M})$ — характеристика Эйлера–Пуанкаре пространства $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть область Ω сильно липшицева, $A \in S(\bar{\Omega})$, A невырожден на $\partial\Omega$, причем если $x \in \partial\Omega$, $w \in X$ и $\langle w, x^* \rangle < 0$ для любого $x^* \in A(x)$, то w есть гиперкасательная к $\bar{\Omega}$ в точке x . Пусть E из $\Gamma(X)$ и v из $C(\partial\Omega, X)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда 1) группы $H_q(\bar{\Omega})$ и $H_q(\bar{\Omega} \cap E)$ изоморфны: $H_q(\bar{\Omega}) \simeq H_q(\bar{\Omega} \cap E)$ ($q = 0, 1, \dots$), 2) $\gamma(A, \Omega) = \chi(\bar{\Omega})$.

В условиях теоремы 1 можно гарантировать стабилизацию групп гомологий при аппроксимации множества $\bar{\Omega}$ его конечномерными сечениями: $H_q(\bar{\Omega}) \simeq H_q(\bar{\Omega} \cap E_1)$ ($q = 0, 1, \dots$, $E_1 \in \Gamma(X)$, $E \subset E_1$). Равенство $\gamma(A, \Omega) = \chi(\bar{\Omega})$ есть бесконечномерная версия теоремы Пуанкаре–Хопфа [9, с. 223].

2. Обозначим через $\Lambda_1(X)$ часть $\Lambda(X)$, состоящую из функционалов f , для которых градиентное отображение $x \rightarrow \partial f(x)$ есть оператор класса $S(X)$. Число $c \in \mathbb{R}$ назовем критическим значением функционала f , если $\{x \in X : f(x) = c, 0 \in \partial f(x)\} \neq \emptyset$; числа, не являющиеся критическими, будем называть регулярными значениями этого функционала. Если $f \in \Lambda_1(X)$ и множество $N_a = \{x \in X, f(x) \leq a\}$ непусто и ограничено, то множество $\mathfrak{N} = \arg \min f$ точек абсолютного минимума функционала f есть непустой компакт [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \Lambda_1(X)$, a — регулярное значение функционала f , $a \in f(X)$, N_a — ограниченное множество, $\Omega = \overset{\circ}{N}_a$ и A — сужение отображения ∂f на $\bar{\Omega} = N_a$. Тогда справедливы утверждения 1), 2) теоремы 1; если оператор $A: N_a \rightarrow X^*$ невырожден на $N_a \setminus \mathfrak{N}$, то $H_q(N_a) \simeq H_q(\mathfrak{N})$ ($q = 0, 1, \dots$) и $\gamma(A, \Omega) = \chi(\mathfrak{N})$.

Формула $\gamma(A, \Omega) = \chi(\mathfrak{N})$ доказывалась в [5, 6] при более жестких предположениях относительно множества $\mathfrak{N}$. В теореме 2 априорные предположения о структуре множества $\mathfrak{N}$ отсутствуют.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in \Lambda_1(X)$, при любом $a < \infty$ множество $N_a = f^{-1}((-\infty, a])$ ограничено и критические значения функционала f не пре-

возрастают числа $a_0 < \infty$. Тогда $H_q(N_a) \simeq H_q(X)$ ($a > a_0$, $q = 0, 1, \dots$) и $\gamma(\partial f, \overset{\circ}{N}_a) = 1$.

Тот факт, что группы $H_q(N_a)$ и $H_q(X)$ ($q = 0, 1, \dots$) изоморфны, означает гомологическую тривиальность пространства N_a ($a > a_0$). В частности, если $b_q(N_a)$ — ранг группы $H_q(N_a)$, то $b_0(N_a) = 1$, $b_p(N_a) = 0$ ($p \geq 1$).

Приведем пример иллюстративного характера. Пусть X , X^* — локально равномерно выпуклые пространства, $\mathcal{K}$ — компактное подмножество в X , $g(x) = \min \{\|x - y\|^2, y \in \mathcal{K}\}$ ($x \in X$). Из результатов [6] вытекает включение $g \in \Lambda_1(X)$. Сформулируем два следствия теорем 1–3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathcal{K}$ — гомологически нетривиальный компакт, то существует положительное критическое значение функционала g .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если характеристика Эйлера–Пуанкаре компакта $\mathcal{K}$ не определена, то найдется последовательность c_n критических значений функционала g , такая, что $c_n > 0$, $c_n \rightarrow 0$.

Для исследования критических точек негладких функционалов можно применить и другие методы нелинейного функционального анализа. Отметим здесь работы [10–12], посвященные обобщениям теории Люстерника–Шнирельмана и ее приложениям к нелинейным краевым задачам, а также статьи [13–15], в которых устанавливаются негладкие аналоги теорем о неявных функциях, приводящие к новым признакам разрешимости нелинейных интегральных уравнений. В публикациях упомянутых циклов отсутствуют варианты теоремы Пуанкаре–Хопфа. Результаты о стабилизации групп гомологий лебеговых множеств являются новыми и для гладких функционалов, возникающих в классическом вариационном исчислении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. Наука, М., 1975.
2. Пожогаяев С. И. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 4, 48–55 (1967).
3. Скрипник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. Наука, М., 1990.
4. Browder F. E. Bull. Am. Math. Soc., **76**, No. 5, 999–1005 (1970).
5. Бобылев Н. А. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 2, 8–13 (1986).
6. Климов В. С., Сенчакова Н. В. Матем. сб., **182**, № 10, 1393–1407 (1991).
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. Наука, М., 1988.
8. Масси У. Теория гомологий и когомологий. Мир, М., 1981.
9. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Мир, М., 1972.
10. Degiovanni M., Fannio O. Nonlinear Anal., **26**, No. 8, 1437–1446 (1996).
11. Degiovanni M., Marzocchi M. Ann. Mat. Pura Appl., **167**, 73–100 (1994).
12. Marino A., Micheletti A. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **42**, No. 2, 401–423 (1995).
13. Vignoli A., Zabrejko P. P. Z. Anal. Anwendungen, **14**, 89–93 (1995).
14. Забрейко П. П. Докл. АН Беларуси, **40**, № 2, 34–38 (1996).
15. Забрейко П. П., Мороз В. Б. Дифференц. уравнения, **31**, № 4, 690–695 (1995).