Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об одном классе лагранжевых многообразий, отвечающем вариационным задачам, задачам теории управления и термодинамики, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 2, 89–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:20:13

УДК 513.5

Об одном классе лагранжевых многообразий, отвечающем вариационным задачам, задачам теории управления и термодинамики*

© 1998. В. П. Маслов

Автором была предпринята попытка математически аксиоматизировать феноменологическую термодинамику [1]. Внимательное изучение задач термодинамики показало, что используемые в физике уравнения состояний приводят к более узкому классу лагранжевых многообразий, чем рассматривал ранее автор. Этот узкий класс важен также и для задач теории управления.

1. Класс канонических преобразований. В задачах теории управления и вариационных задачах минимизируется обычно функционал, определяемый неотрицательным лагранжианом $L(\dot{x}, x)$. Он порождает каноническое преобразование, отвечающее соответствующему гамильтониану $H(p, x)$, $p \in \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$. Соответствие $L(\dot{x}, x) \leftrightarrow H(p, x)$ предполагается взаимно однозначным, т. е. система $\dot{x} = H_p(p, x)$ однозначно разрешима относительно p при всех x . Каждый гамильтониан указанного вида порождает полугруппу канонических преобразований.

Рассмотрим каноническое преобразование K указанного вида, которое отображает лагранжеву плоскость $x = x_0$ в $\mathbb{R}^{2N}$, параллельную p и обозначаемую через A_{x_0} , в лагранжево многообразие $\Lambda_{x_0} \in \mathbb{R}^{2N}$, диффеоморфно проектирующееся на x -плоскость при любом $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Класс таких преобразований обозначим через $\mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{S}$ — полугруппа, порожденная всеми такими каноническими преобразованиями.

2. Класс лагранжевых многообразий. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс лагранжевых многообразий вида $\Lambda = K A_{x_0}$ для всех x_0 и всех $K \in \mathcal{S}$. Понятия существенной и несущественной точек лагранжева многообразия определены в [1]. Это определение фактически продублировано ниже (в доказательстве следующей теоремы 1).

ТЕОРЕМА 1. *Каноническое преобразование $K \in \mathcal{S}$ переводит несущественные точки лагранжева многообразия $\Lambda \in \mathcal{L}$ в несущественные точки лагранжева многообразия $K\Lambda$.*

Наметим доказательство. Пусть сначала $K = K_1 \cdot K_2$, где $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $\Lambda = K_2 A_{x_0}$, а $\Lambda_1 = K_1 \Lambda$. Пусть точке x_1 на координатной плоскости в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ отвечают точки $\alpha_1(x_1), \dots, \alpha_k(x_1)$ на Λ_1 , которые проектируются в точку x_1 .

Пусть $S(\alpha) = \int p dx$ — действие на Λ_1 , а $\alpha_{i_0}(x_1)$ — существенная точка, т. е. по определению $S(\alpha_{i_0}(x_1)) = \min_i S(\alpha_i(x_1))$. Обозначим через $S_1(x, x_0)$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС и РФФИ, совместный грант 95-91.

$S_2(x, x_0)$ производящие функции (действия), отвечающие K_1 и K_2 соответственно.

Поскольку $\Lambda_1 = K_1 K_2 A_{x_0}$,

$$S(\alpha_i(x_1)) = S_1(x_1, \xi_i) + S_2(\xi_i, x_0),$$

где ξ_i такова, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi_i}(x_1, \xi_i) = -\frac{\partial S_2}{\partial \xi_i}(\xi_i, x_0).$$

Следовательно,

$$S(\alpha_{i_0}(x_1)) = \min_i (S_1(x_1, \xi_i) + S_2(\xi_i, x_0)).$$

Пусть $K_3 \in \mathcal{K}$ и $S_3(x, x_0)$ — производящая функция преобразования $\mathcal{K}$. Рассмотрим $\Lambda_2 = K_3 \Lambda_1$. Пусть $\alpha'(x_1)$ — существенная точка на Λ_2 , проектирующаяся в точку $x_1 \in \mathbb{R}^N$ и $S'(\alpha) = \int p dx$ на Λ_2 ; тогда

$$S'(\alpha'(x_1)) = \min_i S'(\alpha'_i(x_1)),$$

где $\alpha'_i(x_1)$ — все точки на Λ_2 , которые проектируются в x_1 .

Аналогично предыдущему

$$S'(\alpha'_i(x_1)) = \{S_3(x_1, \xi_i) + S_2(\xi_i, \eta_i) + S_1(\eta_i, x_0)\},$$

где ξ_i, η_i удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial S_3}{\partial \xi}(x_1, \xi) = -\frac{\partial S_2}{\partial \xi}(\xi, \eta), \quad \frac{\partial S_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) = -\frac{\partial S_1}{\partial \eta}(\eta, x_0),$$

а значит,

$$\begin{aligned} S'(\alpha'(x_1)) &= \min_i S'(\alpha'_i(x_1)) = \min_i (S_1(x_1, \xi_i) + S_2(\xi_i, \eta_i) + S(\eta_i, x_0)) \\ &= \min_i \{S(x_1, \xi_i) + \min_j (S_2(\xi_i, \eta_j) + S_1(\eta_j, x_0))\} \\ &= \min_i (S_3(x, \xi_i) + S(\alpha_{j_0}(\xi_j))). \end{aligned}$$

Следовательно, в определении точки $\alpha'(x_1)$ участвуют только существенные точки $\alpha_{j_0}(\xi_i)$ многообразия Λ_1 .

Продолжая рассуждения рекуррентным образом, получим утверждение теоремы.

2. Термодинамика. Перейдем к термодинамике. Пусть заданы N экстенсивных (объем, энтропия и т.д.) и N сопряженных им интенсивных (давление, температура и т.д.) термодинамических величин. Рассмотрим фазовое пространство $\mathbb{R}^{2N}$, где интенсивные величины — координаты, а экстенсивные — импульсы. Пусть, как обычно, задано N соотношений между ними (уравнения состояний).

ТЕОРЕМА 2. Если уравнения состояний определяют лагранжево многообразие из класса $\mathcal{L}$, то первый и второй законы термодинамики будут выполнены.

ГИПОТЕЗА. Туннельный канонический оператор [2] на $\Lambda \in \mathcal{L}$, где роль малого параметра играет $h = kT/N$ (k — постоянная Больцмана, T — температура, N — число частиц), определяет асимптотику большой статистической суммы, если $V/N \rightarrow \text{const}$, где V — объем статистической системы.

Для широкого класса задач (например, в приближении так называемого среднего поля) эта гипотеза доказана автором и его учениками.

Точки фазового перехода в этой концепции интерпретируются как каустики и фокальные точки, лежащие в области существенных точек. Поэтому более детальная асимптотика туннельного канонического оператора в духе теории катастроф В. И. Арнольда освещает асимптотическое поведение системы вблизи критических точек фазовых переходов первого и второго рода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобное же геометрическое «квантование» может быть осуществлено и для уравнений Беллмана, в частности, когда они описывают задачу о больших отклонениях (см., например, [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В. П. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 4, 28–41 (1994). 2. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. Наука, М., 1988. 3. Del Moral P. Maslov Optimization Theory: Topological Aspects. In: Idempotency. Publ. Inst. Newton (J. Gunawardena, ed.), Cambridge University Press, 1998, pp. 354–391.

Московский государственный университет,
им. М. В. Ломоносова, физический факультет
e-mail: maslov@ipmnet.ru

Поступило в редакцию
2 марта 1998 г.

УДК 512.77

Новая аффинная M -секстика

© 1998. С. Ю. ОРЕВКОВ

Аффинной M -кривой мы будем называть аффинную вещественную алгебраическую кривую C , имеющую максимально возможное число $(m^2 - m + 2)/2$ компонент связности, где m — степень кривой C . Это эквивалентно тому, что проективное замыкание $\bar{C}$ кривой C является проективной M -кривой, т. е. имеет максимально возможное число $1 + (m - 1)(m - 2)/2$ компонент связности и пересекает бесконечно удаленную прямую L в m различных вещественных точках, лежащих на одной компоненте связности кривой C . Это определение отличается от приведенного в [1, 3], однако нам оно представляется более естественным.

В работе [1] построено 33 изотопических типа M -кривых степени 6. Другие построения (причем более подробно изложенные) этих 33 кривых приведены в [2]. В [1, 3] объявлено также, что все остальные изотопические типы, кроме 9, нереализуемы, однако, доказательства по крайней мере трех из этих