Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Новая аффинная M -секстика,
Функц. анализ и его прил., 1998, том 32, вы-
пуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa416>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:33:00

ГИПОТЕЗА. Туннельный канонический оператор [2] на $\Lambda \in \mathcal{L}$, где роль малого параметра играет $h = kT/N$ (k — постоянная Больцмана, T — температура, N — число частиц), определяет асимптотику большой статистической суммы, если $V/N \rightarrow \text{const}$, где V — объем статистической системы.

Для широкого класса задач (например, в приближении так называемого среднего поля) эта гипотеза доказана автором и его учениками.

Точки фазового перехода в этой концепции интерпретируются как каустики и фокальные точки, лежащие в области существенных точек. Поэтому более детальная асимптотика туннельного канонического оператора в духе теории катастроф В. И. Арнольда освещает асимптотическое поведение системы вблизи критических точек фазовых переходов первого и второго рода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобное же геометрическое «квантование» может быть осуществлено и для уравнений Беллмана, в частности, когда они описывают задачу о больших отклонениях (см., например, [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В. П. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 4, 28–41 (1994). 2. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. Наука, М., 1988. 3. Del Moral P. Maslov Optimization Theory: Topological Aspects. In: Idempotency. Publ. Inst. Newton (J. Gunawardena, ed.), Cambridge University Press, 1998, pp. 354–391.

Московский государственный университет,
им. М. В. Ломоносова, физический факультет
e-mail: maslov@ipmnet.ru

Поступило в редакцию
2 марта 1998 г.

УДК 512.77

Новая аффинная M -секстика

© 1998. С. Ю. ОРЕВКОВ

Аффинной M -кривой мы будем называть аффинную вещественную алгебраическую кривую C , имеющую максимально возможное число $(m^2 - m + 2)/2$ компонент связности, где m — степень кривой C . Это эквивалентно тому, что проективное замыкание $\bar{C}$ кривой C является проективной M -кривой, т. е. имеет максимально возможное число $1 + (m - 1)(m - 2)/2$ компонент связности и пересекает бесконечно удаленную прямую L в m различных вещественных точках, лежащих на одной компоненте связности кривой C . Это определение отличается от приведенного в [1, 3], однако нам оно представляется более естественным.

В работе [1] построено 33 изотопических типа M -кривых степени 6. Другие построения (причем более подробно изложенные) этих 33 кривых приведены в [2]. В [1, 3] объявлено также, что все остальные изотопические типы, кроме 9, нереализуемы, однако, доказательства по крайней мере трех из этих

запретов неверны, так как соответствующие изотопические типы реализуются гладкими поверхностями в $\mathbb{CP}^2$, обладающими всеми используемыми в доказательствах свойствами алгебраических кривых (см. [4]). Недавно автору [4] удалось запретить все оставшиеся изотопические типы кроме 33 построенных в [1, 2] и кроме $A_3(0, 5, 5)^*$, $A_4(1, 4, 5)^*$, $B_2(1, 8, 1)$, $B_2(1, 4, 5)$, $C_2(1, 3, 6)^*$ в обозначениях [1, 2] (звездочкой помечены упомянутые выше случаи, для которых доказательства запретов в [1, 3] заведомо ошибочны).

Рис. 1

Рис. 2

Настоящая заметка посвящена построению кривой, реализующей $B_2(1, 8, 1)$ (см. рис. 1). Она строится возмущением подходящей особой рациональной кривой на основании леммы Шустина [5] о независимости устранения особенностей.

Построение прямой и секстики, изображенных на рис. 1. Сначала построим неприводимую вещественную секстику C' , имеющую особенности A_1 , A_2 , A_{16} (напомним, что A_n — это особенность вида $y^2 \pm x^{n+1} = 0$). Из формулы рода следует, что такая кривая рациональна и не имеет других особенностей. Выберем на $\mathbb{RP}^2$ координаты $(x:y:z)$ так, чтобы особенности A_{16} и A_2 находились в точках $(0:0:1)$ и $(0:1:0)$, причем касательными в этих точках были $y = 0$ и $z = 0$. Параметризация $\mathbb{CP}^1 \rightarrow C$, $0 \mapsto (0:0:1)$, $\infty \mapsto (0:1:0)$ имеет вид

$$x(t) = a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4, \quad y(t) = b_4 t^4 + b_5 t^5 + b_6 t^6, \quad z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3. \quad (1)$$

Диагональными заменами координат в $\mathbb{CP}^1$ и $\mathbb{CP}^2$ можно сделать так, чтобы

$$a_2 = a_3 = b_4 = c_0 = 1. \quad (2)$$

Условие, что в точке $(0:0:1)$ имеется особенность A_{16} , эквивалентно суще-

ствованию чисел $\gamma_2, \dots, \gamma_7$, таких, что

$$\text{ord}_{t=0} \left(y(t) z(t)^6 - \sum_{k=2}^7 \gamma_k x(t)^k z(t)^{7-k} \right) = 16. \quad (3)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно 7 раз раздуть данную особенность. Условие (3) дает систему уравнений и неравенств на неизвестные $a_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, \gamma_2, \dots, \gamma_7$. Решая линейные (относительно соответствующих неизвестных) уравнения, находим последовательно $\gamma_2, c_1, \gamma_3, c_2, \gamma_4, c_3, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$ и получаем систему из трех нелинейных уравнений на a_4, b_5, b_6 . При помощи результатов исключаем a_4, b_6 и получаем, что b_5 (обозначим его через β) удовлетворяет уравнению

$$311\beta^3 - 293\beta^2 + 85\beta - 7 = 0. \quad (4)$$

Остальные коэффициенты в (1) выражаются через β по формулам

$$\begin{aligned} a_4 &= (-317\beta^2 + 221\beta - 24)/56, & b_6 &= (13\beta^2 - 5\beta)/8, & c_1 &= 2 - \beta, \\ c_2 &= (-398431\beta^2 + 312615\beta - 58304)/3624, \\ c_3 &= 256(-58843\beta^2 + 46797\beta - 9236)/140883. \end{aligned}$$

Уравнение (4) имеет единственный вещественный корень $\beta = 0.1395037384\dots$. Таким образом, существует единственная с точностью до проективной замены координат вещественная кривая C с требуемым набором особенностей. Пусть $F(X, Y) = 0$ — ее уравнение в аффинных координатах $X = x/z, Y = y/z$. Используя формулу $F(X, Y) = \text{Res}_t(x(t) - z(t)X, y(t) - z(t)Y)$, выразим через β коэффициенты многочлена F и затем вычислим многочлен $R(X) = \text{Disc}_Y(F)$. Его разложение над полем $\mathbb{Q}(\beta)$ имеет вид $X^{17}(X - X_1)^2 R_0(X)$, где

$$X_1 = (1438630331\beta^2 - 801094822\beta + 83747003)/72828 \approx -0.15259$$

и R_0 — неприводимый над $\mathbb{Q}(\beta)$ многочлен степени 5, имеющий 3 вещественных корня $X_{01} \approx -0.15409, X_{02} \approx -0.15085, X_{03} \approx -0.13551$. Тот факт, что $\text{ord}_{X=0} R(X) = 17$, доказывает другим способом, что в $(0:0:1)$ имеется особенность A_{16} . Вычисляя кратный корень $Y = Y_1$ многочлена $F(X_1, Y)$, находим ординату особой точки типа A_1 :

$$Y_1 = (160515886061\beta^2 - 86960685268\beta + 9007482215)/23409 \approx -0.50314.$$

Вычисляя в этой точке гессиан

$$\begin{aligned} &F''_{XX}F''_{YY} - (F''_{XY})^2 \\ &= (-91624392116506602935878110871552\beta^2 \\ &\quad + 50238947254921921240844068192256\beta \\ &\quad - 5225391810967551089756908355584)/7162977429658927721337 \\ &\approx 1.6694 \cdot 10^{-9} > 0, \end{aligned}$$

убеждаемся, что (X_1, Y_1) — уединенная двойная точка.

Для каждого вещественного корня многочлена R подставим в F его приближенное значение и найдем все вещественные корни получившегося многочлена от Y . Результаты этих вычислений приведены в следующей таблице:

$X = X_{01}$	$X = X_1$	$X = X_{02}$	$X = X_{03}$	$X = 0$
−1.85807	−1.48933	−0.791026*	0.691718*	−4832.11
−0.35177	−0.50314*	—	—	0.00000*
−0.30441*	−0.43017	—	—	27.7307

где звездочкой помечены кратные корни.

Находя число вещественных корней многочленов $F(X, \cdot)$ для промежуточных значений X и вычисляя знаки коэффициентов, отвечающих за поведение кривой при $t \rightarrow \infty$ ($a_4 = 0.011 \dots > 0$, $b_6 = -0.055 \dots < 0$, $c_3 = -7.001 \dots < 0$), убеждаемся, что кривая C расположена так, как показано на рис. 2 (стрелки указывают направление возрастания координаты Y). Выберем прямую L , близкую к оси $x = 0$ (см. рис. 2). Из результатов Шустина [5, лемма] следует, что кривую C можно возмутить так, чтобы из A_{16} получилось 8 овалов, а из A_1 и A_2 — по одному.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Несложно проверить, что $\beta = (97 - 12\alpha - 14\alpha^2)/311$, где $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha = 3$. Однако, формулы для γ_j , F и R весьма громоздки независимо от того, использовать α или β . По-видимому, система координат, зафиксированная посредством (2), выбрана не самым удачным образом.

2. Приближенные вычисления производились с точностью 10^{-1000} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Корчагин А. Б., Шустин Е. И. Изв. АН СССР, сер. матем., **52**, № 6, 1181–1199 (1988).
2. Korchagin A. B. Am. Math. Soc. Transl. (2), **173**, 141–155 (1996).
3. Шустин Е. И. В кн.: Методы качественной теории и теории бифуркаций, Изд-во ГГУ, Горький, 1988, с. 97–105.
4. Orekov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves, Topology (в печати).
5. Шустин Е. И. Матем. заметки, **42**, № 2, 180–186 (1987).

Институт системных исследований РАН

Поступило в редакцию
12 мая 1997 г.