Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, С. В. Керов, Об одной бесконечно-
мерной группе над конечным полем, *Функц. ана-
лиз и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa418>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 02:33:30

УДК 512.743, 517.986, 519.217

Об одной бесконечномерной группе над конечным полем^{*}

© 1998. А. М. Вершик, С. В. Керов

Введение. Асимптотическая теория представлений изучает структуру представлений классических групп высоких степеней и их бесконечномерных аналогов. Одним из основных примеров служит серия линейных групп $GL_n(\mathbb{F}_q)$ над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$ и их индуктивный предел $GL_\infty(\mathbb{F}_q)$ — группа финитных обратимых матриц над полем k .

В этой заметке вводится новая локально компактная группа GLB и изучается ее структура, характеры и непрерывные унитарные представления. Эта группа содержит группу $GL_\infty(k)$ в качестве счетной плотной подгруппы. Ценность группы GLB определяется ее тесными связями с теорией параболического индуцирования — ядром теории представлений групп $GL_n(k)$.

Описание неприводимых представлений конечных групп $GL_n(k)$ впервые получено в работе Грина [6]. Основным инструментом его теории, развитым в дальнейшем в работах [5, 10], служит операция параболического индуцирования представлений. Именно эта операция определяет те вложения групповых алгебр $\mathbb{C}(GL_n(k))$, которые приводят к интересующей нас групповой алгебре A группы GLB . Алгебра A представима как индуктивный предел алгебр $\mathbb{C}(GL_n(k))$, хотя вложения этих групповых алгебр уже не порождаются вложениями групп, а задаются операторами усреднения по классам смежности относительно некоторой подгруппы.

Группа GLB была определена авторами настоящей работы совместно с А. В. Зелевинским (см. добавление редактора перевода в книге [3]) в 1981 г. в процессе обсуждения связей его работы [10] с теорией представлений и характеров локально конечных групп (подобных $GL_\infty(k)$ и бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$).

Применяемый метод исследования опирается на общую теорию индуктивных пределов конечномерных полупростых алгебр. Заметим, что при $q = 1$ мы приходим к теории представлений бесконечной симметрической группы, рассмотренной в ряде работ авторов (см. например ссылки в [1]). То замечательное обстоятельство, что бесконечномерная недискретная группа GLB локально компактна, позволяет в полной мере использовать классические методы теории представлений, в первую очередь метод индуцированных представлений. В следующих работах мы собираемся рассмотреть более подробно унитарные характеры группы GLB и дать реализации факторпредставлений групп GLB и $GL_\infty(k)$.

^{*} Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-01-00676.

1. Группа GLB . Определяемые ниже объекты зависят от числа q элементов поля, но для удобства обозначений мы не всегда делаем эту зависимость явной.

Рассмотрим k -линейное пространство $V = k_\infty$ всех финитных векторов с координатами из конечного поля $k = \mathbb{F}_q$. Зафиксируем базис ортов $\{e_i, i = 1, 2, \dots\}$ в пространстве V и обозначим через V_n подпространство, порожденное первыми n ортами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа GLB состоит из k -линейных преобразований пространства V , сохраняющих почти все подпространства V_n .

Переформулируем определение в терминах матриц операторов $g \in GLB$ по отношению к выделенному базису. Бесконечную матрицу $g = (g_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots$, назовем *почти треугольной*, если число ненулевых поддиагональных элементов $a_{ij} \neq 0$, $i > j$, конечно. Группа GLB состоит в точности из операторов с почти треугольными матрицами.

2. Борелевская подгруппа. Пусть $G(m, \infty) \subset GLB$ — подгруппа операторов в пространстве V , сохраняющих подпространства V_n при всех $m \leq n$. Если $m \leq n$, то через $G(m, n) \subset GL_n(k)$ обозначим параболическую подгруппу операторов в V_n , сохраняющих подпространства V_s при $m \leq s \leq n$. Группа $G(m, \infty) \cong \varprojlim G(m, n)$ является проконечной группой и в топологии проективного предела вполне несвязна и компактна. Базисом окрестностей единицы в $G(m, \infty)$ служит семейство подгрупп $N(n, \infty)$, $n \geq m$, где через $N(n, \infty)$ мы обозначаем группу операторов в V , сохраняющих подпространства $V_n, V_{n+1}, \dots$ и тривиальных (единичных) на V_n . На матричном языке $G(m, \infty)$ описывается как группа бесконечных матриц $g = (g_{ij})$ с нулевыми поддиагональными элементами ниже m -й строки, т.е. $g_{ij} = 0$ при $i > \max(j, m)$.

При $m < n$ группа $G(m, \infty)$ является подгруппой конечного индекса в $G(n, \infty)$. Группа $GLB = \varinjlim G(m, \infty)$ есть объединение (индуктивный предел) компактных групп $G(m, \infty)$. Топология на группе GLB , как и на подгруппах $G(m, \infty)$, определяется базисом окрестностей единицы, состоящим из подгрупп $N(n, \infty)$. В этой топологии GLB вполне несвязна, локально компактна и является бесконечномерной группой Ли над полем k . Очевидно, что $GL_\infty(k)$ есть плотная подгруппа в GLB . Замыкание любой конечно порожденной подгруппы в GLB компактно, а факторгруппа $PGLB \cong GLB/k^*$ по центру группы GLB топологически проста.

Группа $B(n) = G(1, n)$ верхнетреугольных матриц является борелевской подгруппой в $GL_n(k)$. Поэтому проконечную группу $B = G(1, \infty)$ естественно считать борелевской подгруппой в GLB . Она состоит из операторов в пространстве V , сохраняющих все подпространства V_n , $n = 1, 2, \dots$. Матрицы операторов из B — это все обратимые верхнетреугольные матрицы. Как топологическое пространство группа B есть бесконечное произведение подмножеств в конечном поле k , а потому компактна и вполне несвязна. Мера Хаара на B есть произведение мер с равномерными мерами на сомножителях. Непосредственно из определений вытекает

ТЕОРЕМА 1. *Группа GLB с описанной выше топологией является локально компактной унимодулярной аменабельной группой.*

Зафиксируем меру Хаара μ на GLB с нормировкой $\mu(B) = 1$.

3. Групповая алгебра Брюа–Шварца. Определяемая в этом пункте важная подалгебра A групповой алгебры $L^1(GLB, \mu)$ является аналогом пространства функций Брюа–Шварца в теории p -адических линейных групп, и мы сохраняем за ней то же название. В алгебре всех комплексных непрерывных функций с компактным носителем на группе GLB и обычными операциями свертки и инволюции определим $*$ -подалгебру A , состоящую из функций, принимающих конечное число значений. Заметим, что алгебра A плотна в $L^1(GLB, \mu)$. Мы покажем, что A *локально полупроста*, т.е. представима как объединение возрастающей цепочки конечномерных полупростых алгебр над полем $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра A есть локально полупростая $*$ -алгебра без единицы.*

Пусть $A_n \subset A$ — подалгебра функций с носителем в компактной подгруппе $G(n, \infty)$, зависящих только от ограничения оператора $g \in G(n, \infty)$ на подпространство V_n . Алгебра A_n конечномерна, полупроста и изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}(G_n)$ конечной группы $G_n = GL_n(k)$. Для заданного $g \in G_n$ обозначим через $\tilde{a}_g \in A_n$ характеристическую функцию множества операторов $h \in G(n, \infty)$ в пространстве V , сохраняющих подпространства $V_n, V_{n+1}, \dots$ и совпадающих с g при ограничении на V_n . Положим $a_g = |B/N(n, \infty)| \tilde{a}_g = (q-1)^n q^{\binom{n}{2}} \tilde{a}_g$. Тогда функции $a_g, g \in G_n$, образуют линейный базис в алгебре A_n , причем $a_{gh} = a_g a_h$ и $a_g^* = a_{g^{-1}}$. Элемент a_e (где e — единичный оператор в V_n) служит единицей в алгебре A_n .

Алгебра $A = \bigcup A_n$ есть объединение вложенных подалгебр A_n . Поскольку элемент a_e не является единицей в большей алгебре A_{n+1} , алгебра A не содержит единицы.

Хотя алгебра A представлена выше как объединение групповых алгебр, их вложения не порождаются вложениями самих групп. Более точно, вложение $i: A_n \rightarrow A_{n+1}$ задается операцией усреднения по подгруппе,

$$i(a_g) = \frac{1}{|N_n|} \sum_{h \in N_n} a_{gh}, \quad g \in G_n,$$

где $N_n = G_{n+1} \cap N(n, \infty)$ — подгруппа операторов в V_{n+1} , единичных на подпространстве V_n . В базисе $\{\tilde{a}_g\}$ вложения задаются формулой $i(\tilde{a}_g) = \sum_{h \in N_n} \tilde{a}_{gh}$.

Строение возрастающей цепочки $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ конечномерных полупростых алгебр, а следовательно, и предельной алгебры $A = \bigcup A_n$, полностью определяется ее *графом ветвления* (диаграммой Браттели), описывающим ветвление неприводимых представлений алгебр A_{n+1} при их ограничении на младшую подалгебру A_n , и *размерностями неприводимых представлений* (см., например, [1]). Вершинами графа ветвления служат классы эквивалентности неприводимых представлений всех алгебр A_n или, что то же самое, всех групп $GL_n(k)$. Поскольку вложения алгебр не сохраняют единицу, ограничение ненулевого представления алгебры A_{n+1} на подалгебру A_n может содержать нулевое представление этой алгебры.

4. Схема ветвления семейства алгебр A_n . Начнем с более общей конструкции, подготавливающей описание диаграммы Браттели индуктивного семейства алгебр A_n .

Пусть $C = \bigcup_{d=1}^{\infty} C_d$ — некоторое градуированное семейство конечных множеств и $e \in C_1$ — выделенная точка. Число $d = d(c)$ назовем *степенью* элемента $c \in C_d$. Обозначим через $\mathbb{Y} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n$ множество диаграмм Юнга, и пусть $|\lambda| = n$ — число клеток в диаграмме $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. Семейством диаграмм Юнга над C назовем любую функцию $\varphi: C \rightarrow \mathbb{Y}$ с конечным числом непустых значений $\varphi(c) \neq \emptyset$. Введем градуировку семейств, принимая за *степень семейства* число $|\varphi| \equiv \sum_{c \in C} |\varphi(c)| d(c)$. Пусть Φ_n — множество семейств степени $|\varphi| = n$, а $\Phi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n$ — совокупность всех семейств. Мы берем Φ за множество вершин определяемого ниже градуированного графа. Его дуги определяются так: два заданных семейства $\varphi \in \Phi_n$, $\psi \in \Phi_{n+1}$ соединены дугой (условимся писать $\varphi \nearrow \psi$), если $\varphi(c) = \psi(c)$ при всех $c \neq e$, а диаграмма Юнга $\psi(e)$ получается из $\varphi(e)$ добавлением одной клетки. Тем самым определен некоторый граф ветвления (диаграмма Браттели) Φ . Элементы множества C естественно отождествляются с семействами, в которых единственная непустая диаграмма одноклеточна. Такие семейства мы называем *каскадными*.

Заметим, что диаграмма Φ несвязна и распадается в объединение компонент, изоморфных графу Юнга. Компоненты связности параметризуются своими *начальными семействами* φ , для которых диаграмма $\varphi(e) = \emptyset$ пуста. Множество начальных семейств условимся обозначать через $\tilde{\Phi}$.

Искомый граф ветвления индуктивного семейства алгебр $\{A_n\}$ получается при специальном выборе множества $C = C(q)$, зависящем от q . Для наших целей достаточно следующего комбинаторного способа описания множества C . Зафиксируем натуральное число q . При $d \geq 2$ пусть $C_d(q)$ — множество слов Линдона длины d в алфавите $\{0, 1, \dots, q-1\}$ из q букв. Напомним, что слово называется *словом Линдона*, если оно лексикографически строго меньше всех своих циклических сдвигов. Известно, что $|C_d(q)| = \sum_{m|d} \mu(d/m) q^m / d$, где μ — классическая функция Мёбиуса. При $d = 1$ положим $C_1(q) = \{1, \dots, q-1\}$ (т.е. слово 0 исключено) и возьмем $e = 1$ в качестве выделенного элемента. Обозначим через $\Phi = \Phi(q)$ граф ветвления семейств диаграмм Юнга, построенный по градуированному множеству $C = \bigcup C_d(q)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть q — степень простого числа. Тогда граф ветвления Φ является диаграммой Браттели семейства подалгебр $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, аппроксимирующих групповую алгебру A группы GLB . Это означает, что характеры χ_φ неприводимых представлений π_φ алгебры A_n параметризуются семействами $\varphi \in \Phi_n$ степени n , а ограничение характера неприводимого представления χ_ψ алгебры A_{n+1} на подалгебру A_n разлагается в свободную от кратностей сумму

$$\frac{1}{|N_n|} \sum_{h \in N_n} \chi_\psi(a_{gh}) = \sum_{\varphi: \varphi \nearrow \psi} \chi_\varphi(a_g), \quad g \in G_n. \quad (1)$$

Напомним параметризацию неприводимых представлений линейных групп $G_n = GL_n(k)$ над конечным полем (см. [5, 6, 10]). Ключевую роль здесь играет следующая операция *параболического индуцирования*. Если π_1, π_2 — представления групп G_m, G_{n-m} , то через $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ обозначается представление группы G_n , индуцированное тривиальным продолжением представ-

вления $\pi_1 \times \pi_2$ подгруппы $G_m \times G_{n-m} \subset P$ на параболическую подгруппу $P \subset G_n$. Здесь P состоит из операторов в V_n , сохраняющих подпространство V_m . Аналогично определяется произведение нескольких представлений $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_s$.

Неприводимое представление группы G_d , называется *каскадальным*, если оно не является подпредставлением никакого нетривиального параболического произведения представлений групп меньших степеней. Каскадальные представления группы $GL_d(\mathbb{F}_q)$ можно параметризовать точками множества $C_d(q)$. Заметим, что в число каскадальных представлений входят все характеры группы $G_1 \cong \mathbb{F}_q^*$, в том числе единичный характер e , играющий в теории представлений группы GLB особую роль.

Неприводимое представление группы G_n называется *c-примарным*, если оно является подпредставлением некоторой степени $c \circ \dots \circ c$ каскадального представления c . Известно (см. [5, 6, 10]), что примарные представления параметризуются (при заданном $c \in C_d(q)$) множеством $\mathbb{Y}_m$ диаграмм Юнга с $m = n/d$ клетками. Обозначим через π_λ^c неприводимое примарное представление группы G_{md} , входящее в произведение $c \circ \dots \circ c$ и отвечающее диаграмме Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_m$. Каждое неприводимое представление группы G_n однозначно (с точностью до порядка сомножителей) представимо как параболическое произведение $\pi_\varphi = \prod_{c \in C} \pi_{\varphi(c)}^c$ дизъюнктивных (т.е. входящих в степени различных каскадальных представлений) примарных представлений $\pi_{\varphi(c)}^c$, причем $n = \sum_c |\varphi(c)|d(c)$.

Таким образом, неприводимые представления π_φ алгебры A_n параметризуются семействами диаграмм Юнга $\varphi \in \Phi$ степени n , а вершины графа ветвления алгебр A_n совпадают с вершинами графа Φ . При этом каскадальные представления отвечают каскадальным семействам, примарные представления — семействам, в которых лишь одна из диаграмм непуста, а представления, дизъюнктивные с единичным, соответствуют произвольным начальным семействам. Наша цель — проверить, что ветвление представлений алгебр A_n совпадает с ветвлением в графе Φ .

Пусть $N_n \subset G_{n+1}$ — группа операторов в V_{n+1} , сохраняющих V_n и совпадающих на V_n с тождественным оператором, а P_n — группа операторов в пространстве V_{n+1} , сохраняющих V_n . Группа P_n является полупрямым произведением подгруппы $G_n \subset G_{n+1}$ и нормального делителя N_n . Рассмотрим гомоморфизм $i: \mathbb{C}(G_n) \rightarrow \mathbb{C}(G_{n+1})$, определяемый формулой $i(g) = |N_n|^{-1} \sum_{h \in N_n} gh$, как композицию вложения $i: \mathbb{C}(G_n) \rightarrow \mathbb{C}(P_n)$, заданного той же формулой, и гомоморфизма $\mathbb{C}(P_n) \rightarrow \mathbb{C}(G_{n+1})$, задаваемого вложением групп $P_n \rightarrow G_{n+1}$.

Если π — неприводимое представление группы G_n , то через $\tilde{\pi}$ обозначим его продолжение на P_n , тривиальное на подгруппе N_n . Ясно, что $\tilde{\pi}(i(g)) = \pi(g)$ при любых $g \in G_n$. Если же неприводимое представление σ группы P_n нетривиально на N_n , то

$$\sigma(i(g)) = \frac{\sigma(g)}{|N_n|} \sum_{h \in N_n} \sigma(h) = 0$$

при всех $g \in G_n$. По теореме взаимности Фробениуса неприводимое представление $\tilde{\pi}$ группы P_n содержится в ограничении на P_n неприводимого

представления π_ψ группы G_{n+1} в точности с той же кратностью, с какой π_ψ входит в представление $\pi_\varphi \circ 1 = \bigoplus_{\psi: \varphi \nearrow \psi} \pi_\psi$, указанное разложение которого хорошо известно.

Обозначим через $\bar{A}$ алгебру A с присоединенной единицей. Как и A , эта алгебра локально полупроста. Двусторонние идеалы алгебр A и $\bar{A}$ совпадают. Напомним, что для алгебр без единицы диаграмма Браттели еще не определяет алгебру полностью — требуется указать размерности простых модулей. Диаграмма Браттели алгебры $\bar{A}$ с присоединенной единицей получается из графа Φ добавлением одной новой вершины δ_n на каждом этаже Φ_n , $n = 1, 2, \dots$. Новые вершины соседних этажей соединяются дугами без кратностей. Кроме того, из каждой вершины δ_n проводятся дуги подходящих кратностей во все прочие вершины следующего этажа. Заметим также, что дуги диаграммы алгебры A не имеют кратностей, а диаграмма семейства алгебр $\{A_n\}$ получается из диаграммы Браттели семейства $\{GL_n(k)\}$ вычеркиванием некоторых дуг.

5. Структура алгебры A . Имеется общая теория (см. [1, 9]), которая описывает структуру локально полупростой алгебры, ее характеры, представления и группу Гротендика в терминах диаграммы Браттели этой алгебры. Опираясь на теорему 3, мы применяем эту теорию для получения основных фактов о группе GLB .

Если $\varphi \in \tilde{\Phi}$ — начальное семейство и λ — диаграмма Юнга, то через $\psi = \varphi \circ \lambda$ обозначим семейство диаграмм Юнга, для которого $\psi(e) = \lambda$ и $\psi(c) = \varphi(c)$ при $c \neq e$. По определению $\pi_\varphi \circ \lambda = \pi_\varphi \circ \pi_\lambda^e$, где π_λ^e есть e -примарное представление, отвечающее диаграмме Юнга λ . Напомним, что через e мы обозначаем выделенную точку множества C_1 , параметризующую единичное представление группы $GL_1(k)$.

Обозначим через $A_n(\varphi)$ двусторонний идеал алгебры $A_n \cong \mathbb{C}(GL_n(k))$, определенный как пересечение ядер всех неприводимых представлений π_ψ , $\psi \in \Phi_n$, отличных от π_φ . Для $\varphi \in \tilde{\Phi}_d$ положим $I_n(\varphi) = \bigoplus_{\lambda} A_n(\varphi \circ \lambda)$ (сумма берется по всем $\lambda \in \mathbb{Y}_{n-d}$) и обозначим через $I(\varphi) = \bigcup_n I_n(\varphi)$ соответствующий двусторонний идеал в алгебре A .

Алгебра Гекке H_∞ пары (GLB, B) определяется как подалгебра тех функций $a \in A$, которые постоянны на двойных классах смежности по борелевской подгруппе B . Эта алгебра изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_\infty)$ бесконечной симметрической группы. Подробности о характерах алгебры Гекке см. в [2].

Определение алгебры Гекке H_∞ , данное выше, параллельно классическому определению конечномерной алгебры Гекке H_n как алгебры двойных классов по борелевской подгруппе в группе $GL_n(k)$ и эквивалентно современному определению с помощью бесконечного числа образующих и известных соотношений.

ТЕОРЕМА 4. *Алгебра A есть сумма счетного числа непересекающихся двусторонних идеалов $I(\varphi)$, $\varphi \in \tilde{\Phi}$. Каждый из этих идеалов стабильно изоморфен алгебре финитных функций на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$. Идеал $I(\emptyset)$ содержит алгебру Гекке $\mathcal{H}$ и стабильно изоморфен этой алгебре.*

6. Следы алгебры A . Условимся обозначать через χ_φ след представления алгебры $A_n \cong \mathbb{C}(GL_n(k))$, отвечающего семейству $\varphi \in \Phi_n$, нормированный условием $\chi_\varphi(a_1) = 1$, где a_1 — единичный элемент алгебры A_1 . Правило ветвления этих следов определяется формулой (1).

Определим симплекс Тома Δ как пространство пар вещественных неотрицательных невозрастающих последовательностей $\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0)$, $\beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0)$, для которых $\gamma \equiv 1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i \geq 0$. Напомним [1], что точки симплекса Тома параметризуют неразложимые гармонические функции графа Юнга.

Для диаграммы Юнга λ обозначим через $s_\lambda(\alpha; \beta)$ функцию Шура, определенную на симплексе Тома Δ , как указано в [1]. Если $g \in G_n$ и $\varphi \in \tilde{\Phi}_d$ при $d \leq n$, то положим

$$\chi_{\alpha, \beta, \varphi}(a_g) = \sum_{\lambda \vdash (n-d)} \chi_\varphi \circ \lambda(g) s_\lambda(\alpha; \beta), \quad (2)$$

где $\chi_\varphi \circ \lambda$ — характер неприводимого представления $\pi_\varphi \circ \lambda = \pi_\varphi \circ \pi_\lambda^e$ группы G_n . В силу правила ветвления и гармоничности функции $\lambda \mapsto s_\lambda(\alpha; \beta)$ на графе Юнга функция $\chi_{\alpha, \beta, \varphi}$ корректно определена на алгебре A . Можно также записать

$$\chi_{\alpha, \beta, \varphi}(a_g) = \sum_{\mu \vdash (n-d)} (\chi_\varphi \circ \chi_{(\mu_1)}^e \circ \dots \circ \chi_{(\mu_l)}^e)(g) m_\mu(\alpha; \beta), \quad (3)$$

где $\chi_{(\mu_1)}^e \circ \dots \circ \chi_{(\mu_l)}^e$ — произведение единичных характеров $\chi_{(\mu_j)}^e$ групп G_{μ_j} , отвечающих отдельным строкам диаграммы Юнга $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$, а $m_\mu(\alpha; \beta)$ — мономиальные суперсимметрические функции от параметров Тома.

ТЕОРЕМА 5. *Функция $\chi_{\alpha, \beta, \varphi}$ является неразложимым конечным следом на алгебре A , нормированным условием $\chi(a_1) = 1$. Это общий вид всех таких следов.*

Все следы алгебры A , кроме тривиального, неограниченны на аппроксимативной единице этой алгебры и поэтому определяют по известной конструкции ГНС представления алгебр A и $\bar{A}$ бесконечного типа. Следы, отличающиеся от нуля только на идеале, содержащем алгебру Гекке, и соответствующие им представления мы называем унитарными следами (соответственно факторпредставлениями). Последние можно описать как представления, в которых есть ненулевой вектор, инвариантный относительно борелевской подгруппы.

7. K_0 -функтор алгебры A и мультипликативность следов. В теории локально полупростых алгебр K_0 -функтор (группа Гротендика) играет роль основного инварианта (см. [1]). Пусть $R_n = K_0(G_n)$ — группа Гротендика для $G_n = GL_n(k)$ и $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$. Параболическое индуцирование задает умножение, превращающее R в ассоциативную алгебру. Кроме того, в R имеется структура алгебры Хопфа, причем R изоморфна как алгебра Хопфа тензорному произведению алгебр Λ_c (см. §9 в [10]). Здесь $c \in C$ пробегает множество параметров каспидальных представлений C , а Λ_c — алгебра Хопфа симметрических полиномов от переменных $x_1^c, x_2^c, \dots$. Всем

этим переменным приписывается степень $d(c)$. Наша цель — связать R с K_0 -функтором алгебры A .

Обозначим через $\Lambda_\varnothing$ подалгебру, линейно порожденную представлениями главной серии групп G_n . Пусть $\Lambda_\varphi = \Lambda_\varnothing \pi_\varphi$ есть $\Lambda_\varnothing$ -подмодуль в R , порожденный элементом $\pi_\varphi \in R$. Алгебра R распадается в прямую сумму $\Lambda_\varnothing$ -подмодулей Λ_φ . Умножение базисного элемента π_φ на единичное представление $e \in R_1$ задает граф ветвления Φ , который, таким образом, мультипликативен в смысле работы [1].

Следы алгебры A естественно отождествляются с аддитивными функциями $f: R \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $f(\pi_\varphi) \geq 0$ при всех $\varphi \in \Phi$ и $f(\pi \circ e) = f(\pi)$ при всех $\pi \in R$. Очевидно, что каждая такая функция есть сумма своих ограничений на подмодули Λ_φ . Поэтому каждая неразложимая функция отлична от нуля лишь на одном из элементов π_φ , $\varphi \in \bar{\Phi}_d$. С точностью до нормировки все функции $f_{\alpha,\beta,\varphi}$ с этим условием задаются формулой

$$f_{\alpha,\beta,\varphi}(\pi_\varphi \circ \lambda) = s_\lambda(\alpha; \beta),$$

где $\pi_\varphi \in R_d$. Они отвечают следу $\chi_{\alpha,\beta,\varphi}$ алгебры A , заданному формулой (2).

ТЕОРЕМА 6. Пусть χ — характер главной серии факторпредставлений алгебры A . Пусть $g \in G_m$, $h \in G_{n-m}$ — два оператора, для которых все собственные числа (из алгебраического замыкания $\bar{k}$ поля $k = \mathbb{F}_q$) попарно различны. Обозначим через $g \oplus h$ соответствующий блочно-диагональный оператор из G_n . Тогда справедлива формула $\chi(a_{g \oplus h}) = \chi(a_g)\chi(a_h)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М., Керов С. В. Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор. Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. ВИНТИ, т. 26, 1985, с. 3–56.
2. Вершик А. М., Керов С. В. Характеры и реализации представлений бесконечномерной алгебры Гекке и инварианты узлов. ДАН СССР, **301**, № 4, 777–780 (1988).
3. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. Мир, М., 1982.
4. Макдональд И. Симметрические функции и полиномы Холла. Мир, М., 1985.
5. Фаддеев Д. К. Комплексные представления полной линейной группы над конечным полем. Записки научн. семинаров ЛОМИ, **46**, 64–88 (1974).
6. Green J. A. The characters of the finite general linear groups. Trans. Amer. Math. Soc., **80**, 402–447 (1955).
7. Skudlarek H. L. Die unzerlegbaren Charaktere einiger diskreter Gruppen. Math. Ann., **223**, 213–231 (1976).
8. Thoma E. Die Einschränkung der Charaktere von $GL(n, q)$ auf $GL(n-1, q)$. Math. Z., **119**, 321–338 (1971).
9. Kerov S., Vershik A. The Grothendieck group of the infinite symmetric group and symmetric functions with the elements of the K_0 -functor theory of AF -algebras. Adv. Stud. Contemp. Math., Gordon and Breach, Vol. 7, 1990, pp. 36–114.
10. Zelevinsky A. V. Representations of finite classical groups. Lecture Notes in Math., Vol. 869, 1981, pp. 1–184.