Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, К. М. Ханин, Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с изломом, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 11–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:38:08

УДК 517.9

Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с изломом

© 1998. А. А. Джалилов, К. М. Ханин

§1. Введение

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности $S^1 = [0, 1)$ с одним изломом, т. е. со скачком первой производной в одной точке. Рассмотрим множество непрерывных строго монотонных функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, со следующими свойствами:

(a) $0 \leq f(0) < 1$;

(b) $f(x+1) = f(x) + 1$;

(c) существует точка $x_c \in S^1$, такая, что в этой точке определены одно-сторонние производные $f'(x_c - 0)$, $f'(x_c + 0) > 0$ и

$$\sqrt{\frac{f'(x_c - 0)}{f'(x_c + 0)}} = c \neq 1;$$

(d) $f(x) \in C^{2+\nu}([x_c, x_c + 1])$, $f'(x) > 0$, $x \in (x_c, x_c + 1)$.

Всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности с одним изломом однозначно определяется функцией $f(x)$ и задается формулой

$$Tx = \{f(x)\}, \quad x \in S^1,$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Обозначим через $\rho = \rho(T)$ число вращения, отвечающее гомеоморфизму T .

Если ρ иррационально, то для достаточно гладких диффеоморфизмов траектория любой точки всюду плотна на окружности, а сам диффеоморфизм с помощью гомеоморфной замены координат приводится к повороту на угол ρ , т. е. существует гомеоморфизм окружности φ , такой, что

$$\varphi(Tx) = T_\rho \varphi(x), \quad x \in S^1,$$

где $T_\rho x = \{x + \rho\}$ — поворот окружности на угол ρ . Этот классический результат, доказанный Данжуа [1], без труда переносится на случай гомеоморфизмов с особенностью типа излома. Ниже приводится точная формулировка соответствующей теоремы.

Естественно возникает важный вопрос о гладкости сопрягающего гомеоморфизма φ . Первые результаты в этой области были получены В. И. Арнольдом [2] и Ю. Мозером [3] в рамках теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ). Впервые глобальный результат о гладкости φ был доказан М. Эрманом [4, 5]. В дальнейшем он был обобщен в работах Йокоза [6], Синая и Ханина [7, 8], Орнштейна и Катцнельсона [9], Старка [10].

В работе Синая и Ханина [8] доказан следующий результат. Пусть $f \in C^{2+\nu}(S^1)$, $\nu > 0$, $f'(x) > 0$, $x \in S^1$, и число вращения ρ является диофантовым с показателем δ , т.е. существует константа $c(\rho)$, такая, что

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\rho)}{q^{2+\delta}} \quad \text{для любого } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

и $\delta < \nu$. Тогда сопряжение φ принадлежит $C^{1+\nu-\delta}$. Отметим, что условие $f \in C^{2+\nu}$ неулучшаемо, поскольку для множества чисел вращения полной лебеговой меры существуют примеры диффеоморфизмов класса C^2 , для которых приведение существенно сингулярно.

Тесно связана с вопросом о гладкости сопряжения φ и проблема существования абсолютно непрерывной инвариантной меры для T . Хорошо известно (см. [12]), что всякий гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения является строго эргодическим, т.е. обладает единственной, с точностью до нормировки, инвариантной мерой. При этом инвариантная мера μ для T является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда сопряжение φ задается абсолютно непрерывной функцией. Это соображение было впервые использовано В. И. Арнольдом [2]. Таким образом, для $C^{2+\nu}$ -гладких диффеоморфизмов в случае типичных чисел вращения инвариантная мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Оказывается, что при наличии одной особенности типа излома ситуация меняется на диаметрально противоположную. А именно, инвариантная мера всегда сингулярна относительно меры Лебега.

Целью нашей работы является доказательство следующего результата:

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x)$, определяющая гомеоморфизм T , удовлетворяет условиям (а)–(д) и число вращения $\rho = \rho(T)$ иррационально. Тогда инвариантная мера μ сингулярна относительно меры Лебега λ , т.е. существует измеримое подмножество A окружности, $A \subset S^1$, такое, что $\mu(A) = 1$, $\lambda(A) = 0$.

Авторы признательны Я. Г. Синаю за полезные обсуждения.

§2. Необходимые определения и факты

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T , определяемый функцией $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$:

$$Tx = \{f(x)\}, \quad x \in S^1.$$

Пусть число вращения ρ , отвечающее T , иррационально. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим траекторию этой точки под действием T , т.е. множество точек $\{x_i = T^i x_0, i \in \mathbb{Z}^1\}$. Всюду в дальнейшем T^i обозначает i -ю итерацию отображения T . Согласно классической теореме Пуанкаре (см. [11, 12]), порядок точек вдоль траектории будет в точности таким же, как и для линейного поворота окружности T_ρ , т.е. для последовательности $\{\bar{x}_i = \{x_0 + \rho i\}, i \in \mathbb{Z}^1\}$. Это важное свойство позволяет определить

систему естественных разбиений окружности, связанных с разложением ρ в непрерывную дробь.

Пусть $\rho = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$ и $p_n/q_n = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, $n \geq 1$. Числа p_n/q_n называются подходящими дробями для ρ . Числитель p_n и знаменатель q_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} p_n &= k_n p_{n-1} + p_{n-2}, & n \geq 2, & & p_0 &= 0, p_1 = 1, \\ q_n &= k_n q_{n-1} + q_{n-2}, & n \geq 2, & & q_0 &= 1, q_1 = k_1. \end{aligned}$$

Для произвольной точки $x_0 \in S^1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ замкнутый интервал, концами которого служат точки x_0 и $x_{q_n} = T^{q_n} x_0$. Заметим, что при нечетном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при четном n — справа. Через $\Delta_i^{(n)}(x_0)$ обозначим итерации интервала $\Delta_0^{(n)}(x_0)$:

$$\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i \Delta_0^{(n)}(x_0).$$

ЛЕММА 1. *Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in S^1$. Отрезок траектории этой точки $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ разбивает окружность на непересекающиеся (за исключением концевых точек) отрезки $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$, $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j < q_{n-1}$.*

Лемма 1 хорошо известна и носит по существу арифметический характер, поскольку структура разбиения определяется порядком точек траектории $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$, который совпадает с порядком точек для линейного поворота T_ρ . Возникающее разбиение обозначим через $\xi_n(x_0)$ и назовем динамическим разбиением n -го порядка. Ниже мы кратко опишем структуру динамических разбиений. При переходе от $\xi_n(x_0)$ к $\xi_{n-1}(x_0)$ происходит следующее. Все отрезки n -го ранга сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$, разбивается на $k_{n+1} + 1$ отрезков (см. рис. 1):

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0).$$

Динамические разбиения $\xi_m(x_0)$ измельчаются с ростом m , $\xi_{m+1}(x_0) > \xi_m(x_0)$ в том смысле, что каждый элемент предыдущего разбиения состоит из объединения целого числа элементов следующего разбиения.

Рис. 1

ЛЕММА ДАНЖУА. *Пусть существуют конечные односторонние производные $f'(x_c - 0)$, $f'(x_c + 0) > 0$, $f \in C^1([x_c, x_c + 1])$ и $\text{var}_{[x_c, x_c + 1]} \ln f' = \bar{\theta} < \infty$. Положим*

$$\theta = \bar{\theta} + |\ln f'(x_c - 0) - \ln f'(x_c + 0)| = \bar{\theta} + 2|\ln c|.$$

Тогда для любого x_0 , такого, что $x_i \neq x_c$, $i = 0, 1, 2, \dots$, справедливо неравенство

$$e^{-\theta} \leq \prod_{s=0}^{q_k-1} f'(x_i) \leq e^{\theta}.$$

Лемма Данжуа доказывается так же, как аналогичное утверждение в работе [13].

Из леммы Данжуа следует, что отрезки, составляющие динамическое разбиение $\xi_n(x_0)$, имеют экспоненциально малую длину. Положим

$$\lambda = (1 + e^{-\theta})^{1/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Delta^{(n)}$ — произвольный элемент динамического разбиения $\xi_n(x_0)$. Тогда

$$|\Delta^{(n)}| \leq \text{const } \lambda^n,$$

где $|\cdot|$ означает длину отрезка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два гомеоморфизма окружности T_1 и T_2 называются топологически эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$, что $\varphi(T_1 x) = T_2 \varphi(x)$ для любого $x \in S^1$. При этом гомеоморфизм φ называется сопрягающим или сопряжением. Из следствия 1 легко вытекает теорема Данжуа.

ТЕОРЕМА ДАНЖУА. Пусть гомеоморфизм T с иррациональным числом вращения ρ удовлетворяет условиям леммы Данжуа. Тогда T топологически эквивалентен линейному повороту T_ρ .

Из следствия 1 вытекает, что траектория любой точки плотно заполняет окружность. Отсюда следует, что сопряжение существует и определяется единственным образом с точностью до поворота. С другой стороны, хорошо известно (см. [2, 12]), что если μ — нормированная инвариантная мера, то в качестве φ можно взять отображение

$$\varphi(x) = \mu([x_0, x]), \quad x \in S^1,$$

где x_0 — произвольная точка окружности.

В дальнейшем важную роль играет понятие двойного отношения (cross-ratio).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Двойным отношением четверки (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, называется число

$$\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}.$$

Нам необходима следующая лемма.

ЛЕММА 2 (см. [14]). Пусть $f \in C^{2+\nu}([a, b])$, $\nu > 0$. Тогда существует такая постоянная C , что

$$\left| \frac{\text{Cr}(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| \leq C((z_4 - z_1)^{1+\nu})$$

для любой четверки чисел (z_1, z_2, z_3, z_4) , $a \leq z_1 < z_2 < z_3 < z_4 \leq b$.

§3. Формулировка основных лемм и доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы приведем основные леммы и, используя их, докажем теорему 1.

Пусть $z_i \in S^1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Введем обозначения

$$\alpha = z_2 - z_1, \quad \beta = z_3 - z_2, \quad \gamma = z_4 - z_3.$$

ЛЕММА 3. Пусть в точке $x = x_0$ сопряжение $\varphi(x)$ имеет положительную производную $\varphi'(x_0) = p_0 > 0$, $x_0 \in S^1$, и для некоторой константы $R > 1$ выполнены следующие условия:

$$(a) \quad \alpha/R \leq \beta \leq R\alpha, \quad \alpha/R \leq \gamma \leq R\alpha;$$

$$(b) \quad \max_{1 \leq i \leq 4} |z_i - x_0| \leq R\alpha.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если все z_i , $1 \leq i \leq 4$, лежат в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то справедливо неравенство

$$\left| \frac{\text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| \leq C_1 \varepsilon,$$

где константа C_1 зависит лишь от R и p_0 , и не зависит от ε .

Пусть $x_c \in [z_1, z_2]$. Введем также следующие обозначения:

$$\tau = x_c - z_1, \quad \alpha' = Tz_2 - Tz_1, \quad \beta' = Tz_3 - Tz_2, \quad \gamma' = Tz_4 - Tz_3,$$

$$\text{Cr}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{\gamma}{\beta + \gamma}, \quad \text{Cr}(\alpha', \beta', \gamma') = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} \frac{\gamma'}{\beta' + \gamma'},$$

$$F(z) = \frac{(1 + \xi)((c^2 - 1)z + 1)}{(c^2 - 1)z + 1 + \xi}, \quad \text{где } z = \frac{\tau}{\alpha}, \quad \xi = \frac{\beta}{\alpha}.$$

ЛЕММА 4. Пусть функция f , определяющая гомеоморфизм T , принадлежит классу $C^2(S^1 \setminus \{x_c\})$, $f'(x) \geq \text{const} > 0$ и существует константа $R > 1$, такая, что выполняются неравенства

$$\alpha/R < \beta < R\alpha, \quad \alpha/R < \gamma < R\alpha. \quad (1)$$

Тогда существует константа $C_2 = C_2(f, R)$, такая, что

$$\left| \frac{\text{Cr}(\alpha', \beta', \gamma')}{\text{Cr}(\alpha, \beta, \gamma)} - F(z) \right| \leq C_2(\alpha + \beta + \gamma). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ накрывает особую точку x_c , если $x_c \in (z_1, z_4)$. Тройка отрезков накрывает особую точку «правильным» образом с константой M , $0 < M \leq 1$, если

$$1) \quad x_c \in (z_1, z_2];$$

$$2) \quad (x_c - z_1)/(z_2 - z_1) \geq M.$$

ЛЕММА 5. Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для любого $x_0 \in S^1$ и для любого $\delta > 0$ существует $N(\delta, x_0) > 0$, такое, что для всех $n > N(\delta, x_0)$ найдется тройка отрезков $[z_s, z_{s+1}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $s = 1, 2, 3$, со следующими свойствами:

1) $|T^j[z_1, z_4]| \leq \text{const } \lambda^n$, $0 \leq j < q_n$, где $\lambda = (1 + e^{-\theta})^{-1/2}$, а $|\cdot|$ обозначает длину отрезка;

2) $\sum_{j=0}^{q_n-1} |T^j[z_1, z_4]| \leq 2$;

3) отрезки $[z_s, z_{s+1}]$ и $T^{q_n}[z_s, z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям а) и б) леммы 3 с константой $R = e^{3\theta} + e^\theta + 1$;

4) тройка отрезков $T^j[z_1, z_2]$, $T^j[z_2, z_3]$, $T^j[z_3, z_4]$, $0 \leq j \leq q_n$, накрывает особую точку $x = x_c$ ровно один раз; при этом покрытие является «правильным» с константой $M = 1$.

ЛЕММА 6. *Предположим, что определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T удовлетворяет условиям теоремы 1 и отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяют утверждениям 1)–4) леммы 5. Тогда для достаточно больших n имеют место следующие неравенства:*

$$(a) \quad \frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} > \text{const} > 1 \quad \text{при } c > 1,$$

$$(b) \quad \frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} < \text{const} < 1 \quad \text{при } c < 1,$$

где константы зависят лишь от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку инвариантная мера μ не имеет атомов и $\varphi(x)$ задается монотонной функцией,

$$\varphi(x) = \int_0^x d\mu(x),$$

где $\mu(x)$ — инвариантная мера, нам достаточно показать, что для почти всех x по мере Лебега $\varphi'(x) = 0$. Производная $\varphi'(x)$ существует в силу монотонности функции φ для почти всех x по мере Лебега. Мы покажем, что $\varphi'(x) = 0$ всюду, где производная определена.

Предположим, что $\varphi'(x_0) = \theta > 0$, $x_0 \in S^1$. Для определенности предположим, что величина излома c больше 1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем тройку отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$, $[z_s, z_{s+1}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяющих условиям леммы 5. Тогда эти отрезки и отрезки $[T^{q_n} z_s, T^{q_n} z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям леммы 3. Из леммы 3 следует, что

$$\left| \frac{\text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| < C_1 \varepsilon, \quad (3)$$

$$\left| \frac{\text{Cr}(\varphi(T^{q_n} z_1), \varphi(T^{q_n} z_2), \varphi(T^{q_n} z_3), \varphi(T^{q_n} z_4))}{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)} - 1 \right| < C_1 \varepsilon. \quad (4)$$

Поскольку φ осуществляет сопряжение с линейным поворотом, нетрудно видеть, что

$$\text{Cr}(\varphi(T^{q_n} z_1), \varphi(T^{q_n} z_2), \varphi(T^{q_n} z_3), \varphi(T^{q_n} z_4)) = \text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)). \quad (5)$$

Из формул (3)–(5) непосредственно вытекает, что

$$\left| \frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| < C_3 \varepsilon, \quad (6)$$

где константа $C_3 > 0$ не зависит от ε и n . С другой стороны, из леммы 6 следует, что для достаточно больших n

$$\frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} > \text{const} > 1.$$

При достаточно малых ε последнее неравенство и неравенство (6) одновременно не могут выполняться. Это противоречие доказывает теорему 1.

§4. Доказательства лемм 3–6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть существует $\varphi'(x_0) = p_0 > 0$. По определению производной для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеют место неравенства

$$p_0 - \varepsilon < \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} < p_0 + \varepsilon. \quad (7)$$

Возьмем точки $z_i \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяющие условиям (а), (b) леммы 3. Для определенности предположим, что $z_i < x_0$, $i = 1, 2, 3, 4$. В остальных случаях лемма 3 доказывается аналогично. При $x = z_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, из (7) вытекает, что

$$(p_0 - \varepsilon)(x_0 - z_i) < \varphi(x_0) - \varphi(z_i) < (p_0 + \varepsilon)(x_0 - z_i). \quad (8)$$

Отсюда легко можно вывести следующие неравенства:

$$p_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_2) + (x_0 - z_1)}{z_2 - z_1} \leq \frac{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}{z_2 - z_1} \leq p_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_2) + (x_0 - z_1)}{z_2 - z_1}, \quad (9)$$

$$p_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_3) + (x_0 - z_1)}{z_3 - z_1} \leq \frac{\varphi(z_3) - \varphi(z_1)}{z_3 - z_1} \leq p_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_3) + (x_0 - z_1)}{z_3 - z_1}, \quad (10)$$

$$p_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_2)}{z_4 - z_2} \leq \frac{\varphi(z_4) - \varphi(z_2)}{z_4 - z_2} \leq p_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_2)}{z_4 - z_2}, \quad (11)$$

$$p_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_3)}{z_4 - z_3} \leq \frac{\varphi(z_4) - \varphi(z_3)}{z_4 - z_3} \leq p_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_3)}{z_4 - z_3}. \quad (12)$$

Из условий (а) и (b) леммы 3 вытекает, что

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \max \left\{ \frac{x_0 - z_i}{z_2 - z_1}, \frac{x_0 - z_i}{z_3 - z_1}, \frac{x_0 - z_i}{z_4 - z_2}, \frac{x_0 - z_i}{z_4 - z_3} \right\} \leq K_1, \quad (13)$$

где константа $K_1 > 0$ зависит лишь от R и не зависит от ε . Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \frac{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}{z_2 - z_1} \frac{\varphi(z_4) - \varphi(z_3)}{z_4 - z_3} \frac{z_3 - z_1}{\varphi(z_3) - \varphi(z_1)} \frac{z_4 - z_2}{\varphi(z_4) - \varphi(z_2)}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (9)–(13), нетрудно получить утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. По условию $x_c \in [z_1, z_2]$. Следовательно, отрезок $[z_2, z_4]$ не содержит особую точку x_c . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'}{\beta' + \gamma'} &= \frac{Tz_4 - Tz_3}{Tz_4 - Tz_2} = \frac{f'(x_c + 0)\gamma + O(\gamma^2)}{f'(x_c + 0)(\beta + \gamma) + O((\beta + \gamma)^2)} \\ &= \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{1 + O(\gamma)}{1 + O(\beta + \gamma)} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} (1 + O(\beta + \gamma)), \\ \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} &= \frac{f'(x_c - 0)\tau + f'(x_c + 0)(\alpha - \tau) + O(\alpha^2)}{f'(x_c - 0)\tau + f'(x_c + 0)(\alpha + \beta - \tau) + O((\alpha + \beta)^2)} \\ &= \frac{(c^2 - 1)z + 1 + O(\alpha)}{(c^2 - 1)z + 1 + \xi + O(\alpha + \beta)} = \frac{(c^2 - 1)z + 1}{(c^2 - 1)z + 1 + \xi} (1 + O(\alpha + \beta)). \end{aligned} \quad (14)$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$\frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{(1 + \xi)((c^2 - 1)z + 1)}{(c^2 - 1)z + 1 + \xi} (1 + O(\alpha + \beta)).$$

Отсюда и из равенства (14) легко получить неравенство (2). Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пусть $\varphi'(x_0) = p_0 > 0$ и разложение числа вращения в непрерывную дробь имеет вид $\rho = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$. Рассмотрим динамическое разбиение $\xi_n(x_0)$. Элементами разбиения $\xi_n(x_0)$ являются отрезки $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$, $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n-1}$.

Возможны два случая:

$$x_c \in \Delta_{i_0}^{(n-1)}(x_0), \quad 0 \leq i_0 < q_n, \quad \text{или} \quad x_c \in \Delta_{i_0}^{(n)}(x_0), \quad 0 \leq i_0 < q_{n-1}.$$

Обозначим через $\bar{x}_c$ прообраз точки x_c , лежащий внутри отрезка $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ или $\Delta_0^{(n-1)}(x_0)$. Введем следующие обозначения:

$$z_1 = T^{-q_{n-1}}(\bar{x}_c), \quad z_2 = \bar{x}_c, \quad z_3 = \frac{\bar{x}_c + T^{q_{n-1}}(\bar{x}_c)}{2}, \quad z_4 = T^{q_{n-1}}(\bar{x}_c). \quad (15)$$

Рассмотрим систему отрезков $[z_s, z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, и их образы $T^j[z_s, z_{s+1}]$, $0 \leq j < q_n$. Заметим, что $T^{i_0}z_2 = x_c$, $0 \leq i_0 < q_n$. Поэтому образ отрезка $[z_2, z_4]$ никогда не содержит точку x_c внутри себя. Действительно, отрезок $[z_2, z_4]$ является образующим для разбиения $\xi_n(\bar{x}_c)$, $[z_2, z_4] = \Delta_0^{(n-1)}(\bar{x}_c)$. Кроме того, $T^{i_0}[z_2, z_4]$, $0 \leq i_0 < q_n$, содержит точку x_c на границе элемента разбиения. Отрезок $[z_1, z_2]$ также является образующим для разбиения $\xi_n(T^{-q_{n-1}}\bar{x}_c)$, $[z_1, z_2] = \Delta_0^{(n-1)}(T^{-q_{n-1}}\bar{x}_c)$. Поскольку $T^{i_0}z_2 = x_c$, образы $T^j[z_1, z_2]$, $0 \leq j < q_n$, отрезка $[z_1, z_2]$ также не содержат точку x_c внутри элементов разбиения. Таким образом, система отрезков $T^j([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$, $0 \leq j < q_n$, покрывает особую точку ровно один раз при $j = i_0$. Очевидно, что покрытие является правильным с константой $M = 1$. Таким образом, условие 4) леммы 5 выполнено. Условия 1) и 2) выполняются очевидным образом. Действительно, $T^j([z_1, z_4])$ является объединением двух отрез-

ков $(n-1)$ -го ранга. Таким образом, используя следствие 1 к лемме Данжуа, получаем

$$|T^j([z_1, z_4])| \leq \text{const } \lambda^n, \quad 0 \leq j \leq q_n. \quad (16)$$

Кроме того,

$$\sum_{j=0}^{q_n-1} |T^j([z_1, z_4])| = \sum_{j=0}^{q_n-1} |T^j([z_1, z_2])| + \sum_{j=0}^{q_n-1} |T^j([z_2, z_4])| \leq 2. \quad (17)$$

Нам осталось проверить выполнение условий (а) и (б) леммы 3. Из леммы Данжуа очевидным образом следует, что

$$\begin{aligned} e^{-\theta} |[z_1, z_2]| &\leq |[z_2, z_4]| = |T^{q_n-1}[z_1, z_2]| \leq e^{\theta} |[z_1, z_2]|, \\ e^{-\theta} |T^{q_n}[z_1, z_2]| &\leq |T^{q_n}[z_2, z_4]| = |T^{q_n-1}T^{q_n}[z_1, z_2]| \leq e^{\theta} |T^{q_n}[z_1, z_2]|. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, $|[z_1, z_2]| = |[z_3, z_4]|$ и

$$e^{-2\theta} \leq |T^{q_n}[z_2, z_3]|/|T^{q_n}[z_3, z_4]| \leq e^{2\theta}. \quad (19)$$

Таким образом, условие (а) леммы 3 с константой $R = e^{\theta}(1 + e^{2\theta})$ выполнено для $[z_s, z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, и $T^{q_n}([z_s, z_{s+1}])$, $s = 1, 2, 3$. Проверим теперь условие (б) леммы 3. Нетрудно убедиться, что отрезок $[z_1, z_4]$ содержит внутри себя точку x_0 . Таким образом,

$$\max_{1 \leq s \leq 4} |z_s - x_0| \leq |[z_1, z_4]| \leq (1 + e^{\theta})|[z_1, z_2]|. \quad (20)$$

В случае отрезков $T^{q_n}([z_s, z_{s+1}])$, $s = 1, 2, 3$, рассмотрим два случая. Если $\bar{x}_c \in \Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, то $T^{q_n}[z_1, z_4]$ содержит точку x_0 , поскольку точка $T^{q_n}z_4$ лежит правее z_2 (см. рис. 2). Тогда

$$\max_{1 \leq s \leq 4} |T^{q_n}z_s - x_0| \leq (1 + e^{\theta})|T^{q_n}[z_1, z_2]|. \quad (21)$$

Рис. 2

Рис. 3

Во втором случае, когда $\bar{x}_c \in \Delta_{i_0}^{(n)}(x_0)$, отрезок $T^{q_n}[z_1, z_4]$ может не содержать точку x_0 . Однако и в этом случае точка $T^{q_n}z_4$ расположена правее (см. рис. 3). Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq s \leq 4} |T^{q_n}z_s - x_0| &\leq |T^{q_n}[z_1, z_4]| + |[z_2, z_4]| \leq (1 + e^{\theta})|T^{q_n}[z_1, z_2]| + e^{\theta} |[z_1, z_2]| \\ &\leq (1 + e^{\theta})|T^{q_n}[z_1, z_2]| + e^{2\theta} |T^{q_n}[z_1, z_2]| \\ &= (e^{2\theta} + e^{\theta} + 1)|T^{q_n}[z_1, z_2]|. \end{aligned} \quad (22)$$

Окончательно получаем, что условия (а), (б) леммы 3 выполнены для отрезков $[z_s, z_{s+1}]$, $T^{q_n}([z_s, z_{s+1}])$, $s = 1, 2, 3$, с константой $R = e^{3\theta} + e^\theta + 1$. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Предположим для определенности, что $c > 1$. В случае $c < 1$ лемма 6 доказывается аналогично. Пусть отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям леммы 5 и тройка отрезков $(T^{i_0}[z_1, z_2], T^{i_0}[z_2, z_3], T^{i_0}[z_3, z_4])$, $0 \leq i_0 < q_n$, накрывает особую точку. Очевидно, что

$$\begin{aligned} I &= \frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq i_0}}^{q_n-1} \frac{\text{Cr}(T^{i+1} z_1, T^{i+1} z_2, T^{i+1} z_3, T^{i+1} z_4)}{\text{Cr}(T^i z_1, T^i z_2, T^i z_3, T^i z_4)} \\ &\quad \times \frac{\text{Cr}(T^{i_0+1} z_1, T^{i_0+1} z_2, T^{i_0+1} z_3, T^{i_0+1} z_4)}{\text{Cr}(T^{i_0} z_1, T^{i_0} z_2, T^{i_0} z_3, T^{i_0} z_4)}. \end{aligned} \quad (23)$$

По предположению среди отрезков $T^i[z_1, z_4]$, $i = 0, 1, \dots, q_n$, только отрезок $T^{i_0}[z_1, z_4]$ содержит особую точку. Используя лемму 2 и условие 1) леммы 5, получаем

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq i_0}}^{q_n-1} \frac{\text{Cr}(T^{i+1} z_1, T^{i+1} z_2, T^{i+1} z_3, T^{i+1} z_4)}{\text{Cr}(T^i z_1, T^i z_2, T^i z_3, T^i z_4)} &= \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq i_0}}^{q_n-1} (1 + O(|[T^i z_1, T^i z_4]|^{1+\nu})) \\ &= \exp \left\{ \sum_{\substack{i=0, \\ i \neq i_0}}^{q_n-1} \ln(1 + O(|[T^i z_1, T^i z_4]|^{1+\nu})) \right\} = 1 + O(\lambda^{n\nu}). \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь оценим второй сомножитель в (23). Используя леммы 4 и 5, получаем неравенство

$$\left| \frac{\text{Cr}(T^{i_0+1} z_1, T^{i_0+1} z_2, T^{i_0+1} z_3, T^{i_0+1} z_4)}{\text{Cr}(T^{i_0} z_1, T^{i_0} z_2, T^{i_0} z_3, T^{i_0} z_4)} - F(x) \right| \leq C_2 \lambda^n, \quad (25)$$

где

$$F(x) = \frac{(1 + \xi)((c^2 - 1)x + 1)}{(c^2 - 1)x + 1 + \xi}, \quad \xi = \frac{|T^{i_0} z_3 - T^{i_0} z_2|}{|T^{i_0} z_2 - T^{i_0} z_1|}, \quad x = \frac{|x_c - T^{i_0} z_1|}{|T^{i_0} z_2 - T^{i_0} z_1|}.$$

Легко видеть, что функция $F(x)$, $0 \leq x \leq 1$, является строго возрастающей (при $c > 1$), причем $F(0) = 1$. По предположению тройка отрезков $([T^{i_0} z_1, T^{i_0} z_2], [T^{i_0} z_2, T^{i_0} z_3], [T^{i_0} z_3, T^{i_0} z_4])$ «правильным» образом накрывает особую точку с константой $M = 1$. Отсюда следует, что

$$\frac{\text{Cr}(T^{i_0+1} z_1, T^{i_0+1} z_2, T^{i_0+1} z_3, T^{i_0+1} z_4)}{\text{Cr}(T^{i_0} z_1, T^{i_0} z_2, T^{i_0} z_3, T^{i_0} z_4)} \geq F(1) - C_2 \lambda^n. \quad (26)$$

Поскольку $F(1) = c^2(1 + \xi)/(c^2 + \xi)$ и $\xi \geq 1/R = (e^{3\theta} + e^\theta + 1)^{-1}$, получаем $F(1) \geq c^2(R + 1)/(Rc^2 + 1) = 1 + (c^2 - 1)/(Rc^2 + 1) > 1$. Отсюда и из (23)–(26) легко вытекает утверждение леммы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Denjoy A.* Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures Appl.*, **11**, 333–375 (1932).
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя. *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **25**, вып. 1, 21–86 (1961).
3. *Moser J.* A rapidly convergent iteration method, Part II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (3), **20**, 499–535 (1966).
4. *Herman M.* Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. IHES*, **49**, 5–233 (1979).
5. *Herman M.* Résultats récents sur la conjugaison différentiable. *Proc. Intern. Cong. Math.*, Helsinki, Vol. 2, 1978, pp. 811–820.
6. *Yoccoz J. C.* Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont la nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **17**, 333–359 (1984).
7. *Khanin K. M., Sinai Ya. G.* A new proof of M. Herman's theorem. *Comm. Math. Phys.*, **112**, 89–101 (1987).
8. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами. *УМН*, **44**, вып. 1 (265), 57–81 (1989).
9. *Katznelson Y., Ornstein D.* The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **9**, No. 4, 643–680 (1989).
10. *Stark J.* Smooth conjugacy and renormalization for diffeomorphisms of the circle. *Nonlinearity*, **1**, 541–575 (1988).
11. *Poincaré H.* Memoire sur les courbes définie par une equation différentiable I–IV. *J. Math. Pures Appl.*, 1881–1886. [Имеется русский перевод: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М.-Л., 1947.]
12. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. Наука, М., 1980.
13. *Khanin K. M., Vul E. B.* Circle homeomorphisms with weak discontinuties. *Adv. Sov. Math.*, Vol. 3, 57–98 (1991).
14. *Khanin K. M.* Universal estimates for critical circle mappings. *Chaos*, **1**, 181 (1991).

Самаркандский госуниверситет,
механико-математический факультет

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
и Хериот-Ватт Университет (Эдинбург)

Поступило в редакцию
19 февраля 1998 г.