Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Икромов, Демпфированные осцилляторные интегралы и проблема ограниченности максимальных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 70–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 11:56:28

При условии, что $f(x), xf(x) \in L(\mathbb{R}_+)$, равенство $(\tilde{f})^{[1]}(x) = \widetilde{(tf(t))}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$ доказал Пал [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Butzer P. L., Wagner H. J. Appl. Analysis, **3**, No. 1, 29–46 (1973).
2. Butzer P. L., Wagner H. J. In: Proc. Symp. Naval Res. Laboratory, Washington, D.C., April 18–20, 1973, pp. 75–81.
3. Wagner J. H. In: Proc. Symp. Theory and applications of Walsh functions, Hatfield Polytechnic, UK, 1975, pp. 101–129.
4. Butzer P. L., Wagner H. J. Analysis Math., **1**, 171–196 (1975).
5. Onneweer C. W. Analysis Math., **3**, 119–130 (1977).
6. Pal J., Simon P. Acta Math. Acad. Sci. Hung., **29**, 155–164 (1977).
7. Onneweer C. W. Appl. Analysis, **9**, 267–278 (1979).
8. Pal J. Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math., **18**, 49–54 (1975).
9. Голубов Б. И. Матем. сб., **193**, №4, 37–60 (2002).
10. Fine N. J. Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 66–77 (1950).
11. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
12. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. Наука, М., 1987.
13. Onneweer C. W. Trans. Amer. Math. Soc., **258**, 923–931 (1980).
14. Голубов Б. И. Изв. РАН, Сер. матем., **67**, №1, 33–58 (2003).
15. Голубов Б. И. Изв. РАН, Сер. матем., **65**, №3, 3–14 (2001).
16. Pal J., Schipp F. Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Computatoria, **8**, 91–108 (1987).
17. Schipp F. Mathematica Balkanica, **4**, 541–546 (1974).
18. Wagner J. H. Ein Differential- und Integralkalkül in der Walsh–Fourier Analysis mit Anwendungen. Westdeutscher Verlag, Köln–Opladen, 1974.
19. Pal J., Schipp F. In: Theory and applications of Gibbs derivatives. Proc. First Intern. Workshop on Gibbs Derivatives. Math. Inst., Beograd, 1989, pp. 103–113.

Московский инженерно-физический институт
e-mail: golubov@mail.mipt.ru

Поступило в редакцию
28 августа 2003 г.

УДК 517.5

Демпфированные осцилляторные интегралы и проблема ограниченности максимальных операторов

© 2005. И. А. ИКОМОВ

1. История и мотивы проблемы. Одним из классических результатов действительного анализа является так называемая максимальная теорема И. М. Стейна о сферических средних в $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 2$) [10]. Позднее аналог теоремы Стейна для плоского случая был доказан Дж. Бурженом в работе [4]. Эти результаты стали отправной точкой для изучения различных классов максимальных операторов, связанных с подмногообразиями евклидова пространства. В данной работе рассматриваются максимальные операторы M , определенные соотношением

$$Mg(x) = \sup_{t>0} \left| \int_S g(x - ty) \psi(y) d\sigma(y) \right|, \quad (1)$$

где $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность, ψ — фиксированная неотрицательная функция с компактным носителем, $d\sigma$ — индуцированная лебегова мера на S и $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Через $L^p \equiv L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ обозначается множество измеримых функций f , определенных в $\mathbb{R}^{n+1}$, для которых $|f(x)|^p$ интегрируема по $\mathbb{R}^{n+1}$.

Говорят, что оператор M ограничен в L^p (или L^p -ограничен), если существует положительное число C , такое, что для любого $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ выполняется неравенство $\|Mg\|_{L^p} \leq C\|g\|_{L^p}$. Так как ψ имеет компактный носитель, то рассматриваемые операторы ограничены в L^∞ . Поэтому если максимальный оператор ограничен в L^p для некоторого конечного $p = p_0$, то, согласно интерполяционной теореме, он ограничен в L^p для любого $p > p_0$ [12]. В дальнейшем через $p(S)$ обозначается минимальное число, такое, что для любого $p > p(S)$ максимальный оператор (1) ограничен в L^p (разумеется, возможен случай $p(S) = \infty$).

Максимальные операторы вида (1) исследовались в работах многих авторов. Гринлиф [6] доказал, что если S — строго выпуклая и звездная относительно начала координат гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 2$) (это означает, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекается с поверхностью в единственной точке и $K(x) \neq 0$, где $K(x)$ — гауссова кривизна поверхности) и $\psi \neq 0$, то $p(S) = (n+1)/n$. Более того, он показал, что если в каждой точке поверхности S имеется хотя бы k ($k \geq 2$) ненулевых главных кривизн, то $p(S) \leq (k+1)/k$. В более сложном случае $k = 1$ аналогичный результат получен Согги [11].

В работе Согги и Стейна [12] доказано, что если гауссова кривизна поверхности не имеет нулей бесконечного порядка, то $p(S) < \infty$. Однако, как показывают примеры, оценка, указанная для величины $p(S)$ в этой работе, далека от ее точного значения. В работах [5, 6, 8, 9] получено точное значение $p(S)$ для некоторых выпуклых гиперповерхностей.

В общем случае проблема ограниченности максимальных операторов до сих пор остается открытой.

Известно, что L^p -оценки максимальных операторов связаны с поведением осцилляторных интегралов следующего вида:

$$\int_S e^{i(\xi, x)} \psi(x) d\sigma(x). \quad (2)$$

Точнее, чтобы получить L^p -оценки для максимального оператора, необходимо иметь равномерные (относительно направлений вектора ξ) оценки для соответствующего осцилляторного интеграла (2) при больших значениях $|\xi|$. Равномерные оценки осцилляторных интегралов исследовались в различных работах. Результаты Арнольда [1], Варченко [2] и Карпушкина [3] показывают, что в зависимости от особенностей фазовой функции (ξ, x) убывание осцилляторного интеграла (2) на бесконечности может быть довольно медленным. Вот почему Согги и Стейн [12] ввели следующие демпфированные осцилляторные интегралы:

$$\int_S e^{i(\xi, x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x), \quad (3)$$

где $K(x)$ — гауссова кривизна поверхности в точке $x \in S$.

Они доказали, что если $q \geq 2n$, то интеграл (3) убывает как $O(|\xi|^{-n/2})$ (при $|\xi| \rightarrow +\infty$). Отсюда с использованием свойства интегрируемости гауссовой кри-

визны с некоторой отрицательной степенью получена оценка для $p(S)$. С другой стороны, как показывают результаты Гринлифа и Согги [6, 11] существует гиперповерхность со свойством $p(S) < \infty$, но с нулевой гауссовой кривизной. Таким образом, условие конечности порядка всех нулей гауссовой кривизны далеко не необходимо.

Отсюда возникает естественный вопрос: *если у гиперповерхности S не все главные кривизны тождественно равны нулю, то что можно сказать об L^p -ограниченности соответствующего максимального оператора?*

Ясно, что в общем случае степень гауссовой кривизны в качестве множителя гашения не дает никаких результатов. Паламодов (см. [13]) предложил другой, более естественный класс множителей гашения.

В данной работе мы рассматриваем оценку осцилляторных интегралов с множителем гашения и получаем решение проблемы ограниченности для более широкого класса максимальных операторов.

2. Формулировка и обсуждение полученных результатов. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольная аналитическая гиперповерхность. Через $A(x)$ ($x \in S$) обозначается матрица второй фундаментальной формы поверхности S . Положим

$$\Lambda_1(x) \equiv \operatorname{tr}(A(x)^2), \quad \Lambda_2(x) \equiv \operatorname{tr}((A(x) \wedge A(x))^2),$$

где tr — след матрицы, а $\wedge$ — внешнее произведение матриц.

Заметим, что если S — аналитическая гиперповерхность, то определенные выше функции аналитичны на S . Демпфирующие множители определяются следующей формулой:

$$\Lambda(x) \equiv \Lambda_1(x)^{q_1/2} \Lambda_2(x)^{q_2/4},$$

где q_1, q_2 — фиксированные неотрицательные действительные числа, удовлетворяющие условиям $q_1 + q_2 = 1$ и $q_2 > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве Λ_1, Λ_2 можно взять любые ненулевые элементы идеалов I_1^2, I_2^2 , где $I_1 (I_2)$ — локальный идеал, порожденный элементами матрицы $A(x)$ (соответственно $A(x) \wedge A(x)$), и по ним определяются аналогичные демпфирующие множители. Однако эти множители не улучшают нашу оценку для $p(S)$.

Справедлива следующая теорема об ограниченности максимальных операторов:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — аналитическая гиперповерхность, $\psi \in C_0^\infty(S)$ — фиксированная неотрицательная функция и M — максимальный оператор, определенный равенством (1). Если $\Lambda_1^{-\beta} \in L_{\text{loc}}^1(S)$ (где $\beta > 0$ — фиксированное число), а Λ_2 — ненулевая аналитическая функция, то максимальный оператор M ограничен в L^p для любого $p > p(\beta) \equiv 2 + 3/(2\beta)$. Иными словами, при этих условиях справедлива оценка $p(S) \leq p(\beta)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. (а) Теорема 1 обобщает результат Согги и Стейна [12]. Более того, если гауссова кривизна поверхности S не имеет нулей бесконечного порядка, то мы получим более точную оценку для $p(S)$. В частности, из теоремы 1 вытекает, что если у поверхности S имеется хотя бы две главные кривизны, которые не равны нулю тождественно, то $p(S) \leq p(\beta) < \infty$. Таким образом, теорема 1 улучшает также результат Гринлифа [6], который рассмотрел случай, когда в

каждой точке поверхности имеются хотя бы k ($k \geq 2$) ненулевых главных кривизн. Отметим, что в нашем случае в некотором собственном аналитическом множестве все главные кривизны могут обратиться в нуль.

(b) Заметим, что если $\Lambda_2 \equiv 0$, то, согласно теореме Хартмана и Ниренберга [7], гиперповерхность имеет специальный вид и соответствующее преобразование Фурье с любым ненулевым множителем не может убывать быстрее $O(|\xi|^{-1/2})$ (при $|\xi| \rightarrow +\infty$). Следовательно, в этом случае метод демпфированных осцилляторных интегралов не применим к проблеме ограниченности соответствующих максимальных операторов, хотя, если $\Lambda_1(x) \neq 0$ для любого $x \in S$, то, согласно теореме Согги [11], максимальный оператор L^p -ограничен при любом $p > 2$. При этом если Λ_2 — ненулевая аналитическая функция, то в теореме 1 в качестве β мы можем взять любое положительное число и получим новое доказательство теоремы Согги в этом частном случае.

(c) В общем случае трудно найти точное значение показателя $p(S)$. В работе [9] найдена связь между $p(S)$ и показателем осцилляции [1] фазовой функции в случае выпуклых гиперповерхностей. Например, если $S \subset \mathbb{R}^4$ задается как график функции $f(x) = x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k} + 1$ ($k \geq 3$) и $\psi(0) \neq 0$, то из результатов Ковлинга и Маучери [5] следует, что $p(S) = 2k/3$. В этом случае $p(\beta) = 2k$. Таким образом, мы получаем значение $p(S)$ с точностью до порядка касания.

3. Сведение к демпфированным осцилляторным интегралам. Исходя из общего подхода, теорема 1 доказывается вложением M в аналитическое семейство операторов. Точнее, для $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > -\beta$, определяется следующая мера (заряд) $d\sigma_z(x) = \Lambda(x)^z \psi(x) d\sigma(x)$ на S , а также соответствующий максимальный оператор:

$$M_z g(x) = \sup_{t>0} \left| \int_S g(x - ty) d\sigma_z(y) \right|.$$

Так как ψ — неотрицательная функция, то для любых $z \in \mathbb{C}$ и $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ выполняется неравенство $M_z g(x) \leq M_{\operatorname{Re}(z)} |g(x)|$. Следовательно, если $\operatorname{Re}(z) \equiv q > -\beta$ и q_2 — достаточно малое положительное число, то из условий теоремы 1 и неравенства Гёльдера вытекает, что Λ^q — локально интегрируемая функция. Здесь мы используем тот факт, что Λ_2 — ненулевая аналитическая функция и любая такая функция локально интегрируема с некоторой отрицательной степенью. Поэтому при $\operatorname{Re}(z) > -\beta$ мы имеем ограниченность оператора M_z в пространстве L^∞ .

Если $q > 3/2$, то ограниченность оператора M_q (M_z) в пространстве L^2 вытекает из следующего утверждения и теоремы вложения Соболева [12].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольная аналитическая гиперповерхность и $\psi \in C_0^\infty(S)$ — любая функция. Если q_1, q_2, q , $q_1 + q_2 = 1$, $q_2 > 0$ и $q > 3/2$, — фиксированные действительные числа, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что для преобразования Фурье меры $d\sigma_q(x)$ выполняются следующие неравенства:

$$|\widehat{d\sigma_q}(\xi)| \leq \operatorname{const} \frac{\|\psi\|_{L_3^1(S)}}{|\xi|^{1/2+\varepsilon}}, \quad |\nabla \widehat{d\sigma_q}(\xi)| \leq \operatorname{const} \frac{\|\psi\|_{L_3^1(S)}}{|\xi|^{1/2+\varepsilon}},$$

где $\nabla \equiv (\partial/\partial \xi_1, \dots, \partial/\partial \xi_n)$, а $\|\cdot\|_{L_3^1(S)}$ — естественная норма пространства Соболева $L_3^1(S)$.

Как показывают примеры, условие $q_2 > 0$ существенно. То есть, вообще говоря, при $q_2 = 0$ оценка с показателем $1/2 + \varepsilon$ не верна.

Наконец, доказательство теоремы 1 следует из $(L^\infty \mapsto L^\infty)$ - и $(L^2 \mapsto L^2)$ -оценок с применением интерполяционной теоремы Стейна [12].

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность профессору В. П. Паламодову за ценные советы и полезные обсуждения полученных результатов.

Работа была завершена во время визита автора в Международный центр теоретической физики им. Абдус Салама (Триест, Италия), подробное доказательство основных результатов содержится в работе [13]. Автор благодарит профессора А. О. Куку за полезные обсуждения результатов, а также рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. УМН, **28**, вып. 5, 17–44 (1973).
2. Варченко А. Н. Функциональный анализ и его прил., **10**, вып. 3, 13–38 (1976).
3. Карпушкин В. Н. Труды семинара им. И. Г. Петровского, **10**, 150–169 (1984).
4. Bourgain J. J. Anal. Math., **47**, 69–85 (1986).
5. Cowling M., Mauceri G. Trans. Amer. Math. Soc., **296**, 341–365 (1986).
6. Greenleaf A. Indiana Math. J., **30**, 519–537 (1982).
7. Hartman P., Nirenberg L. Amer. J. Math., **81**, 901–920 (1959).
8. Iosevich A. Duke Math. J., **76**, 631–644 (1995).
9. Iosevich A., Sawyer E. Adv. Math., **132**, 46–119 (1997).
10. Stein E. M. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **73**, 2174–2175 (1976).
11. Sogge C. D. In: Fourier Analysis and Partial Differential Equations, Stud. Adv. Math., 1995, pp. 317–323.
12. Sogge C. D., Stein E. M. Invent. Math., **82**, 543–556 (1985).
13. Ikromov I. A. Preprint, ICTP (Trieste, Italy), IC/2003/43.

Самаркандское отделение АН РУз
e-mail: ikromov1@rambler.ru

Поступило в редакцию
4 июля 2003 г.

УДК 517.9+519.21

Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели

© 2005. И. С. Кац

1. Введение. Однородный по времени процесс X_t , $t \geq 0$, с фазовым пространством $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \dots\}$ называется процессом размножения и гибели (сокращенно ПРГ), если при одном акте изменения состояния возможен переход из состояния i только в соседние $i - 1$ или $i + 1$, вероятность более чем одного акта изменения состояния за время $(t; t + h)$ равна $o(h)$ при $h \downarrow 0$, а переходная функция вероятностей $P_{i,j}(t) := P(X_{s+t} = j / X_s = i)$ удовлетворяет для любого $i \in \mathbb{N}_0$ условиям

$$P_{i,i+1}(t) = \alpha_i t + o(t), \quad P_{i,i-1}(t) = \beta_i t + o(t) \quad \text{при } t \downarrow 0, \quad (1)$$

$$P_{i,j}(t) \geq 0, \quad i, j \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) \leq 1, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$