Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, О группах когомологий комплексов однородных форм на пространствах петель гладких многообразий, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 22–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:33:51

УДК 515.16+514.7

О группах когомологий комплексов однородных форм на пространствах петель гладких многообразий*

© 1998. О. И. Мохов

Комплексы $(\Omega_{[m]}, d)$ однородных форм произвольного фиксированного порядка m на пространствах петель гладких многообразий были введены в заметке автора [1], где анонсированы также некоторые результаты об их группах когомологий. Данная статья посвящена доказательству этих результатов и дальнейшему развитию теории однородных форм на пространствах петель гладких многообразий. Предлагаемый в статье подход к изучению топологии пространств петель тесно связан с интенсивными исследованиями последних лет различных однородных структур, возникающих в математической физике и теории поля. Начало этим исследованиям было положено в 1983 г. в статье Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [2], где были введены и изучены невырожденные локальные однородные скобки Пуассона первого порядка

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta(x-y), \quad \det g^{ij}(u) \neq 0, \quad (0.1)$$

играющие важную роль в гамильтоновой теории систем гидродинамического типа, в частности, уравнений усреднения Уизема, описывающих эволюцию медленно промодулированных многофазных решений систем нелинейных уравнений [3–5]. В [2] Дубровин и Новиков сформулировали принцип сохранения гамильтоновости при усреднении системы, а именно, при усреднении гамильтоновых нелинейных систем, обладающих локальными гамильтоновыми структурами, они предложили процедуру усреднения соответствующих локальных скобок Пуассона. Эта процедура Дубровина–Новикова всегда приводит к однородным скобкам первого порядка, т.е. вида (0.1) (как доказал А. Я. Мальцев [6, 7], скобка, получаемая процедурой Дубровина–Новикова, действительно является скобкой Пуассона). В [2] доказано, что формула (0.1) задает скобку Пуассона, т.е. скобка (0.1) кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда, во-первых, $g^{ij}(u)$ — произвольная плоская псевдориманова метрика (метрика нулевой римановой кривизны) и, во-вторых, $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивиты). Таким образом, любая скобка Пуассона вида (0.1) является постоянной в плоских координатах метрики $g^{ij}(u)$. Этот гамильтонов подход привел к

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01623, INTAS, грант № 96-0770, и РФФИ–ННИО, грант № 96-01-00050G.

построению С. П. Царевым теории интегрируемых диагонализующих систем гидродинамического типа [5]. В качестве естественного обобщения локальных однородных скобок Дубровина–Новикова в работах автора и Е. В. Феррапонтова [8] (см. также [9–11]) были найдены и изучены нелокальные однородные скобки Пуассона, определенные на пространствах петель многообразий постоянной римановой кривизны (эти пуассоновы структуры также играют важную роль в теории систем гидродинамического типа и уравнений усреднения Уизема и допускают дальнейшие естественные однородные обобщения, изученные в [10]). Общие локальные однородные скобки Пуассона произвольных порядков были введены Дубровиным и Новиковым в [12], где была поставлена задача их классификации, которая на данный момент далека от своего полного решения. Полностью классифицированы только однородные скобки Пуассона нулевого (Дарбу), первого (Дубровиным и Новиковым [2]) и второго (Потеминым [13, 14], Дойлем [15]) порядков. Для однородных скобок Пуассона третьего порядка получены только частичные классификационные результаты (см. [14, 15]). Однородные пуассоновы структуры третьего порядка играют важную роль в теории уравнений Монжа–Ампера (см. [16]) и в теории уравнений ассоциативности в двумерной топологической теории поля [17]. Многомерные однородные скобки Пуассона изучены Дубровиным, Новиковым и автором [12, 18, 21, 22]. Однородные симплектические структуры (замкнутые однородные 2-формы) произвольных порядков на пространствах петель гладких многообразий были введены и изучены автором в [19–24] в связи с исследованием гамильтонова формализма нелинейных сигма-моделей теории поля, определяющих, в частности, классическое действие бозонных струн, и их обобщений. Как показано автором в [19] (см. также [21–23]), гамильтонов формализм двумерных нелинейных сигма-моделей с кручением задается однородными симплектическими структурами первого порядка на пространствах петель псевдоримановых многообразий. В [19–22] полностью решена задача описания однородных симплектических (предсимплектических) форм первого и второго порядков на пространствах петель гладких многообразий (симплектические формы нулевого порядка классифицируются классической теоремой Дарбу конечномерной симплектической геометрии). Оказалось, что такие симплектические структуры порождают интересные дифференциально-геометрические объекты на многообразии и описываются инвариантным образом в терминах аффинных связностей со специальными свойствами на этом многообразии, ковариантных производных и тензоров кривизны и кручения связностей. В частности, симплектические структуры первого порядка классифицируются аффинными связностями на псевдоримановом многообразии, согласованными с метрикой и обладающими тензором кручения, определяющим замкнутую 3-форму на этом псевдоримановом многообразии [19, 21, 22], а симплектические структуры второго порядка порождаются симплектическими связностями на почти симплектических многообразиях [20–22]. В данной статье введены произвольные однородные формы на пространствах петель гладких многообразий, построены комплексы однородных форм и в ряде случаев найдены их группы когомологий.

§1. Однородные формы на пространствах петель гладких многообразий

Пусть M — гладкое N -мерное многообразие с локальными координатами $u^1, \dots, u^N$. Под *пространством петель* ΩM многообразия M мы всегда будем понимать пространство всех гладких параметризованных отображений γ окружности S^1 в M , $\gamma: S^1 \rightarrow M$, $\gamma(x) = \{u^i(x)\}$, $x \in S^1$. Касательное пространство $T_\gamma \Omega M$ пространства петель ΩM в точке γ состоит из всех гладких векторных полей $\xi = \{\xi^i, 1 \leq i \leq N\}$, определенных вдоль петли γ , причем $\xi(\gamma(x)) \in T_{\gamma(x)} M$ для любой точки $x \in S^1$, где $T_{\gamma(x)} M$ — касательное пространство многообразия M в точке $\gamma(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Однородными k -формами порядка m на пространстве петель ΩM многообразия M мы будем называть кососимметрические формы вида*

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int_{S^1} \left(\sum_1 M_{i_1 \dots i_k}^{[n_1 \dots n_k]}(u) (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \dots (\xi_k^{i_k})_{(n_k)} + \sum_2 M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u) u_{(p_1)}^{j_1} \dots u_{(p_s)}^{j_s} (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \dots (\xi_k^{i_k})_{(n_k)} \right) dx, \quad (1.1)$$

где первое суммирование проводится по всем $n_1, \dots, n_k$, таким, что $n_1 + \dots + n_k = m$, $n_r \geq 0$, а второе — по всем $s > 0$ и по всем $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_s$, таким, что $n_1 + \dots + n_k + p_1 + \dots + p_s = m$, $n_r \geq 0$, $p_l > 0$, и, кроме того, по всем $1 \leq i_r \leq N$, $1 \leq r \leq k$, $1 \leq j_l \leq N$, $1 \leq l \leq s$. Здесь $M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u)$ и $M_{i_1 \dots i_k}^{[n_1 \dots n_k]}(u)$ — гладкие функции на многообразии M , а $\xi_r(x) \in T_\gamma \Omega M$ — векторные поля вдоль петли $\gamma(x) = \{u^i(x)\}$.

Мы используем здесь стандартные обозначения для полных производных порядка n по x : $f_{(n)} = d^n f / dx^n$. Всегда можно считать, что $0 < p_1 \leq \dots \leq p_s$ и, кроме того, $n_1 = 0$ (при $k > 0$), так как в нашем случае $\int_{S^1} (dG/dx) dx = 0$ для всех рассматриваемых функций $G(x, u(x), u_x(x), \dots)$, заданных на петлях γ .

Очевидно, что множество $\Omega_{[m]}^k$ всех однородных k -форм порядка m на пространстве петель ΩM является линейным пространством над $\mathbb{R}$, причем определение пространства $\Omega_{[m]}^k$ не зависит от локальных координат $\{u^i\}$, так как локальные замены координат $u^i = u^i(v^1, \dots, v^N)$ на многообразии M не выводят однородные k -формы порядка m из этого класса. Число m является инвариантом однородной формы относительно локальных замен координат на многообразии.

Мы будем использовать также следующие обозначения: $\Omega_{[m]}$ — *линейное пространство всех однородных форм порядка m на пространстве петель ΩM многообразия M* , Ω^k — *линейное пространство всех однородных k -форм на ΩM* , Ω — *линейное пространство всех однородных форм на ΩM* :

$$\Omega = \sum_{m \geq 0} \Omega_{[m]} = \sum_{k \geq 0} \Omega^k = \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq 0} \Omega_{[m]}^k.$$

§2. Комплексы однородных форм на пространствах петель гладких многообразий

Дифференциал d на однородных k -формах определим следующей формулой:

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) \\ = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \int_{S^1} (\xi_q^i)_{(r)} (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \cdots (\xi_{q-1}^{i_{q-1}})_{(n_{q-1})} (\xi_{q+1}^{i_q})_{(n_q)} \cdots (\xi_{k+1}^{i_k})_{(n_k)} \\ \times \frac{\partial(M_{i_1 \dots i_k}^{[n_1 \dots n_k]}(u) + M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u) u_{(p_1)}^{j_1} \cdots u_{(p_s)}^{j_s})}{\partial u_{(r)}^i} dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Дифференциал d является линейным отображением на линейном пространстве Ω однородных форм и переводит однородную k -форму порядка t в однородную $(k+1)$ -форму порядка t :

$$d: \Omega_{[m]}^k \rightarrow \Omega_{[m]}^{k+1},$$

причем $d^2 = 0$.

Таким образом, определен комплекс (Ω, d) однородных форм на пространстве петель ΩM :

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \quad (2.2)$$

Более того, для любого t определен комплекс $(\Omega_{[m]}, d)$ однородных форм порядка t на пространстве петель ΩM :

$$0 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^0 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^2 \xrightarrow{d} \dots \quad (2.3)$$

Введем обозначение $Z_{[m]}^k(\Omega M)$ для замкнутых ($d\omega = 0$) и соответственно $B_{[m]}^k(\Omega M)$ для точных ($\omega = d\alpha$) однородных k -форм ω порядка t на ΩM и определим группы когомологий нашего комплекса (2.3):

$$H_{[m]}^k(\Omega M, \mathbb{R}) = Z_{[m]}^k(\Omega M) / B_{[m]}^k(\Omega M). \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группы $H_{[m]}^k(\Omega M, \mathbb{R})$ будем называть *группами однородных когомологий порядка t пространства петель ΩM гладкого многообразия M* .

Введем также обозначение $Z^k(\Omega M)$ для всех замкнутых и соответственно $B^k(\Omega M)$ для всех точных однородных k -форм на ΩM и определим *группы однородных когомологий пространства петель ΩM гладкого многообразия M* формулой

$$H^k(\Omega M, \mathbb{R}) = Z^k(\Omega M) / B^k(\Omega M). \quad (2.5)$$

§3. Группы когомологий комплексов однородных форм на пространствах петель гладких многообразий

Однородные когомологии нулевого порядка пространства петель ΩM совпадают с когомологиями де Рама многообразия M :

$$H_{[0]}^i(\Omega M, \mathbb{R}) = H^i(M, \mathbb{R}).$$

Действительно, однородные k -формы нулевого порядка имеют вид

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int_{S^1} M_{i_1 \dots i_k}(u) \xi_1^{i_1} \dots \xi_k^{i_k} dx, \quad (3.1)$$

где $M_{i_1 \dots i_k}(u)$ — произвольные гладкие кососимметрические ковариантные тензорные поля на многообразии M , а дифференциал d (формула (2.1)) в этом случае действует на них как классический дифференциал де Рама:

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) &= \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \int_{S^1} \xi_q^i \xi_1^{i_1} \dots \xi_{q-1}^{i_{q-1}} \xi_{q+1}^{i_q} \dots \xi_{k+1}^{i_k} \frac{\partial M_{i_1 \dots i_k}(u)}{\partial u^i} dx \\ &= \int_{S^1} (dM)_{i_1 \dots i_{k+1}}(u) \xi_1^{i_1} \dots \xi_{k+1}^{i_{k+1}} dx, \\ (dM)_{i_1 \dots i_{k+1}}(u) &= \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \frac{\partial M_{i_1 \dots \widehat{i_q} \dots i_{k+1}}}{\partial u^{i_q}}. \end{aligned}$$

Таким образом, комплекс (2.2) является естественным обобщением классического комплекса де Рама на пространства петель гладких многообразий.

По-видимому, все группы когомологий комплекса однородных форм (2.2) должны выражаться через группы когомологий де Рама многообразия M . Мы рассмотрим здесь подробно вычисление первых групп когомологий при $m = 1$. В частности, в этом случае имеет место следующая теорема о связи групп однородных когомологий первого порядка с группами когомологий де Рама.

ТЕОРЕМА 1. При $i = 0, 1, 2$

$$H_{[1]}^i(\Omega M, \mathbb{R}) = H^{i+1}(M, \mathbb{R}). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим однородные k -формы первого порядка на ΩM

$$\begin{aligned} \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \int_{S^1} \left(\sum_{s=2}^k \xi_1^{i_1} M_{i_1 \dots i_k}^{[s]}(u) \xi_2^{i_2} \dots (\xi_s^{i_s})_x \dots \xi_k^{i_k} \right. \\ &\quad \left. + \xi_1^{i_1} M_{i_1 \dots i_k j}(u) u_x^j \xi_2^{i_2} \dots \xi_k^{i_k} \right) dx, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где $M_{i_1 \dots i_k}^{[s]}(u)$ и $M_{i_1 \dots i_k j}(u)$ — гладкие функции на многообразии M , удовлетворяющие соотношениям, обеспечивающим кососимметричность k -формы (3.3).

Соответственно однородные 0-формы первого порядка — это функции F на ΩM вида

$$F = \int_{S^1} f_i(u) u_x^i dx, \quad (3.4)$$

где $f_i(u)$ — произвольное гладкое ковекторное поле на многообразии M . При этом отметим, что в рассматриваемом нами случае на пространстве петель интеграл вдоль петли от полной производной по x всегда равен 0:

$$\int_{S^1} \left(\frac{d}{dx} f(u) \right) dx = \int_{S^1} \frac{\partial f}{\partial u^i} u_x^i dx = 0, \quad (3.5)$$

где $f(u)$ — произвольная функция на многообразии M .

Найдем условие замкнутости 0-формы первого порядка (3.4):

$$(dF)(\xi) \equiv \int_{S^1} \xi^i \left(\frac{\partial f_k}{\partial u^i} - \frac{\partial f_i}{\partial u^k} \right) u_x^k dx, \quad (3.6)$$

т. е. 0-форма (3.4) замкнута тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\partial f_k}{\partial u^i} - \frac{\partial f_i}{\partial u^k} = 0. \quad (3.7)$$

Точными в данном случае являются 0-формы, тождественно равные нулю, т. е., в силу (3.5), те 0-формы (3.4), для которых

$$f_i = \frac{\partial f(u)}{\partial u^i}. \quad (3.8)$$

Соотношение (3.7) означает, что 1-форма $f_i(u) du^i$ на многообразии M является замкнутой, а соотношение (3.8) — что она является на нем точной 1-формой.

Таким образом, доказано, что $H_{[1]}^0(\Omega M, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R})$.

Однородные 1-формы первого порядка на пространстве петель имеют вид

$$\omega(\xi) = \int_{S^1} \xi^i f_{ik}(u) u_x^k dx, \quad (3.9)$$

где $f_{ik}(u)$ — произвольное гладкое ковариантное двухвалентное тензорное поле на многообразии M .

Найдем условия замкнутости однородных 1-форм первого порядка (3.9):

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi, \eta) &= \int_{S^1} \xi^i \left(\eta^j \frac{\partial f_{jk}}{\partial u^i} u_x^k - (\eta^j f_{ji})_x \right) dx - \int_{S^1} \eta^j \left(\xi^i \frac{\partial f_{ik}}{\partial u^j} u_x^k - (\xi^i f_{ij})_x \right) dx \\ &= \int_{S^1} \xi^i \left[\eta^j \left(\frac{\partial f_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial f_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial u^j} \right) u_x^k - \eta_x^j (f_{ji} + f_{ij}) \right] dx, \end{aligned} \quad (3.10)$$

т. е. однородная 1-форма первого порядка (3.9) замкнута тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$f_{ji} + f_{ij} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial f_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial f_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial u^j} = 0. \quad (3.12)$$

Соотношения (3.11) и (3.12) в точности означают, что $f_{ij} du^i \wedge du^j$ — замкнутая 2-форма на многообразии M . Из формулы (3.6) получаем, что однородная 1-форма (3.9) является точной тогда и только тогда, когда

$$f_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial u^i} - \frac{\partial f_i}{\partial u^k}, \quad (3.13)$$

т. е. при условии, что $f_{ij} du^i \wedge du^j$ — точная 2-форма на многообразии M .

Таким образом, $H^1_{[1]}(\Omega M, \mathbb{R}) = H^2(M, \mathbb{R})$.

Однородные 2-формы первого порядка имеют вид

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \xi^i (g_{ij}(u) (\eta^j)_x + b_{ijk}(u) u^k_x \eta^j) dx, \quad (3.14)$$

где $g_{ij}(u)$ — гладкое ковариантное двухвалентное тензорное поле на многообразии M , а $b_{ijk}(u)$ — гладкое поле на многообразии M , компоненты которого меняются по следующему закону при локальных заменах координат $u^i = u^i(v^1, \dots, v^N)$ на многообразии:

$$\tilde{b}_{prs}(v) = b_{ijk}(u(v)) \frac{\partial u^i}{\partial v^p} \frac{\partial u^j}{\partial v^r} \frac{\partial u^k}{\partial v^s} + g_{ij}(u(v)) \frac{\partial u^i}{\partial v^p} \frac{\partial^2 u^j}{\partial v^r \partial v^s}. \quad (3.15)$$

В частности, если $g_{ij}(u)$ — невырожденная симметричная метрика на многообразии M (т. е. если (M, g_{ij}) — псевдориманово многообразие), то коэффициенты $b_{ijk}(u)$ определяют аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(u)$ на многообразии M :

$$b_{ijk}(u) = g_{is}(u) \Gamma^s_{jk}(u). \quad (3.16)$$

При этом для 2-формы (3.14) должны быть выполнены условия кососимметричности $\omega(\xi, \eta) = -\omega(\eta, \xi)$:

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) + \omega(\eta, \xi) &= \int_{S^1} [\xi^i g_{ij} (\eta^j)_x + \eta^j g_{ji} (\xi^i)_x + \xi^i (b_{ijk} + b_{jik}) u^k_x \eta^j] dx \\ &= \int_{S^1} \xi^i \left[(g_{ij} - g_{ji}) (\eta^j)_x + \left(b_{ijk} + b_{jik} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} \right) u^k_x \eta^j \right] dx = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = b_{ijk} + b_{jik}. \quad (3.18)$$

Отметим, что в наиболее важном для приложений случае, когда $g_{ij}(u)$ — псевдориманова метрика на многообразии, соотношение (3.18) означает в точности, что связность, определяемая формулой (3.16), согласована с метрикой $g_{ij}(u)$:

$$\nabla_k g_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - g_{is} \Gamma^s_{jk} - g_{sj} \Gamma^s_{ik} = 0.$$

Найдем условия замкнутости 2-формы (3.14):

$$\begin{aligned}
 (d\omega)(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{S^1} \left[\xi^i \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \eta^j (\zeta^k)_x + \frac{\partial b_{jks}}{\partial u^i} u_x^s \eta^j \zeta^k \right) + (\xi^i)_x b_{jki} \eta^j \zeta^k \right. \\
 &\quad - \eta^j \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \xi^i (\zeta^k)_x + \frac{\partial b_{iks}}{\partial u^j} u_x^s \xi^i \zeta^k \right) - (\eta^j)_x b_{ikj} \xi^i \zeta^k \\
 &\quad \left. + \zeta^k \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \xi^i (\eta^j)_x + \frac{\partial b_{ijs}}{\partial u^k} u_x^s \xi^i \eta^j \right) + (\zeta^k)_x b_{ijk} \xi^i \eta^j \right] dx \\
 &= \int_{S^1} \xi^i \left[\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - b_{jki} - b_{ikj} \right) (\eta^j)_x \zeta^k \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - b_{jki} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + b_{ijk} \right) \eta^j (\zeta^k)_x \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial b_{jks}}{\partial u^i} - \frac{\partial b_{jki}}{\partial u^s} + \frac{\partial b_{ijs}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{iks}}{\partial u^j} \right) u_x^s \eta^j \zeta^k \right] dx \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, условия замкнутости 2-формы (3.14) при выполнении условий кососимметричности (3.17), (3.18) эквивалентны соотношениям

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = b_{ikj} + b_{jki}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial b_{jks}}{\partial u^i} - \frac{\partial b_{jki}}{\partial u^s} + \frac{\partial b_{ijs}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{iks}}{\partial u^j} = 0. \quad (3.20)$$

Выясним дифференциально-геометрический смысл соотношений замкнутости (3.19) и (3.20) для кососимметрических 2-форм вида (3.14) (т.е. при выполнении условий (3.17) и (3.18)).

ТЕОРЕМА 2. *Однородная 2-форма первого порядка (3.14) замкнута тогда и только тогда, когда $g_{ij} = g_{ji}$ и*

$$b_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + T_{ijk}(u) \right), \quad (3.21)$$

где $T_{ijk}(u)$ — кососимметрический тензор, определяемый произвольной замкнутой 3-формой $\alpha = T_{ijk}(u) du^i \wedge du^j \wedge du^k$ на многообразии M . При этом 2-форма (3.14) является точной тогда и только тогда, когда α — произвольная точная 3-форма на многообразии M , т.е. $T_{ijk}(u)$ — тензорное поле, определяемое произвольной 2-формой $\beta = \beta_{ij}(u) du^i \wedge du^j$ на многообразии: $T_{ijk} = (d\beta)_{ijk}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем $T_{ijk}(u)$ формулой

$$T_{ijk} = b_{ijk} - b_{ikj}. \quad (3.22)$$

Из закона преобразования коэффициентов $b_{ijk}(u)$ на многообразии M (3.15) следует, что $T_{ijk}(u)$ — тензор на M . В том случае, когда $g_{ij}(u)$ — невырожденная метрика, $T_{ijk}(u)$ — тензор кручения (с нижними индексами) связности $\Gamma_{jk}^s(u)$, определяемой формулой (3.16):

$$T_{ijk} = g_{is} T_{jk}^s = g_{is} (\Gamma_{jk}^s - \Gamma_{kj}^s).$$

Сравнивая формулы (3.18) и (3.19), получаем

$$T_{ijk} = T_{jki}, \quad (3.23)$$

т. е., поскольку в силу своего определения (3.22) тензор $T_{ijk}(u)$ всегда кососимметричен по паре последних индексов, соотношение (3.19) эквивалентно условию, что он кососимметричен по любой паре индексов и, следовательно, определяет 3-форму $\alpha = T_{ijk}(u) du^i \wedge du^j \wedge du^k$ на многообразии M .

Докажем, что соотношение (3.20) эквивалентно условию, что 3-форма α на многообразии, определяемая кососимметрическим тензором $T_{ijk}(u)$, является замкнутой.

Введем новое обозначение:

$$S_{ijsk}(u) = \frac{\partial b_{ijs}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ijk}}{\partial u^s}. \quad (3.24)$$

В силу определения функция $S_{ijsk}(u)$ кососимметрична по последней паре индексов

$$S_{ijsk} = -S_{ijks}. \quad (3.25)$$

Кроме того, используя формулу (3.18), получаем, что она кососимметрична и по первой паре индексов:

$$S_{ijsk} = \frac{\partial b_{ijs}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ijk}}{\partial u^s} = -\frac{\partial b_{jis}}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^s \partial u^k} + \frac{\partial b_{jik}}{\partial u^s} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^s \partial u^k} = -S_{jisk}. \quad (3.26)$$

Выведем ряд необходимых соотношений:

$$\begin{aligned} S_{ijkm} + S_{ikmj} + S_{imjk} &= \frac{\partial b_{ijk}}{\partial u^m} - \frac{\partial b_{ijm}}{\partial u^k} + \frac{\partial b_{ikm}}{\partial u^j} - \frac{\partial b_{ikj}}{\partial u^m} + \frac{\partial b_{imj}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{imk}}{\partial u^j} \\ &= \frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^m} - \frac{\partial T_{ijm}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{ikm}}{\partial u^j}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отсюда получаем, используя указанные выше свойства (3.25) и (3.26) кососимметричности функции $S_{ijkm}(u)$ и кососимметричность тензора $T_{ijk}(u)$,

$$\begin{aligned} 2S_{ijkm} - 2S_{mkji} &= S_{ijkm} + S_{ikmj} + S_{imjk} + S_{ijkm} + S_{kjmi} + S_{jmki} \\ &\quad - S_{jmki} - S_{imjk} - S_{mkji} - S_{kjmi} - S_{ikmj} - S_{mkji} \\ &= S_{ijkm} + S_{ikmj} + S_{imjk} + S_{jimk} + S_{jkim} + S_{jmki} \\ &\quad - S_{mjik} - S_{mikj} - S_{mkji} - S_{kjmi} - S_{kijm} - S_{kmi j} \\ &= \frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^m} - \frac{\partial T_{ijm}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{ikm}}{\partial u^j} + \frac{\partial T_{jim}}{\partial u^k} - \frac{\partial T_{jik}}{\partial u^m} + \frac{\partial T_{jmk}}{\partial u^i} \\ &\quad - \frac{\partial T_{mji}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{mj k}}{\partial u^i} - \frac{\partial T_{mik}}{\partial u^j} - \frac{\partial T_{kjm}}{\partial u^i} + \frac{\partial T_{kji}}{\partial u^m} - \frac{\partial T_{kmi}}{\partial u^j} \\ &= \frac{\partial T_{jim}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{jki}}{\partial u^m} - \frac{\partial T_{mkj}}{\partial u^i} - \frac{\partial T_{kmi}}{\partial u^j}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Соотношение (3.20) можно переписать в виде

$$S_{jksi} - S_{iskj} + \frac{\partial T_{ijs}}{\partial u^k} - \frac{\partial T_{iks}}{\partial u^j} = 0. \quad (3.29)$$

Теперь с помощью формулы (3.28) преобразуем соотношение (3.20):

$$\begin{aligned}
 0 &= S_{ijkm} - S_{mkji} + \frac{\partial T_{mik}}{\partial u^j} - \frac{\partial T_{mjk}}{\partial u^i} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{jim}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{jki}}{\partial u^m} - \frac{\partial T_{mkj}}{\partial u^i} - \frac{\partial T_{kmi}}{\partial u^j} \right) + \frac{\partial T_{mik}}{\partial u^j} - \frac{\partial T_{mjk}}{\partial u^i} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{jim}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{jki}}{\partial u^m} + \frac{\partial T_{mkj}}{\partial u^i} + \frac{\partial T_{kmi}}{\partial u^j} \right), \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

т.е. соотношение (3.20) эквивалентно условию замкнутости 3-формы α , определяемой кососимметрическим тензором $T_{ijk}(u)$ на многообразии M :

$$(dT)_{ijkm} \equiv \frac{\partial T_{jkm}}{\partial u^i} - \frac{\partial T_{ikm}}{\partial u^j} + \frac{\partial T_{ijm}}{\partial u^k} - \frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^m} = 0, \tag{3.31}$$

или $d\alpha = 0$.

Переставляя индексы в (3.18), получаем

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = b_{jki} + b_{kji}, \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = b_{kij} + b_{ikj}. \tag{3.33}$$

Рассматривая теперь линейную комбинацию (3.33) + (3.32) - (3.18) этих формул, получаем

$$2b_{kij} + T_{kji} + T_{jki} + T_{ikj} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j},$$

т.е.

$$b_{kij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + T_{kij} \right). \tag{3.34}$$

Пусть теперь $g_{ij}(u)$ — произвольный симметрический тензор, $T_{ijk}(u)$ — кососимметрический тензор, определяемый произвольной замкнутой 3-формой $\alpha = T_{ijk}(u) du^i \wedge du^j \wedge du^k$ на многообразии M , а коэффициенты $b_{ijk}(u)$ определены формулой (3.34). Можно проверить, что соотношения (3.18), (3.19), (3.20), (3.22) выполняются.

Из формулы (3.10) следует, что однородная 2-форма (3.14) является точной тогда и только тогда, когда

$$g_{ij} = f_{ij} + f_{ji}, \tag{3.35}$$

$$b_{ijk} = \frac{\partial f_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial f_{jk}}{\partial u^i}, \tag{3.36}$$

где $f_{ij}(u)$ — произвольное гладкое тензорное поле на многообразии M .

Полагая $\beta_{ij} = f_{ji} - f_{ij}$, получаем, что для точной 2-формы (3.14)

$$b_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial u^i} \right), \tag{3.37}$$

где $g_{ij}(u)$ — произвольное гладкое симметричное тензорное поле, а $\beta_{ij}(u)$ — произвольное гладкое кососимметрическое тензорное поле на многообразии M .

Таким образом, $H_{[1]}^2(\Omega M, \mathbb{R}) = H^3(M, \mathbb{R})$. Теоремы 2 и 1 доказаны.

Отметим, что однородные k -формы первого порядка инвариантны относительно действия группы $\text{Diff}^+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности S^1 , сохраняющих ориентацию, что важно с точки зрения приложений в теории замкнутых бозонных струн в искривленном N -мерном пространстве–времени M с метрикой (гравитационным полем) g_{ij} , конфигурационным пространством которых является пространство петель ΩM псевдориманова многообразия (M, g_{ij}) (требование инвариантности или независимости от параметризации петли является необходимым в теории бозонных струн для физически осмысленных объектов на конфигурационном пространстве ΩM).

Однородные симплектические структуры, изучавшиеся автором в [19–24], отвечают в точности замкнутым однородным 2-формам на ΩM , т.е. являются элементами $Z_{[m]}^2(\Omega M)$.

Развитый в данной статье подход позволяет вычислить явно (выразить через коомологии де Рама многообразия) и высшие группы ($i > 2$) однородных коомологий $H_{[m]}^i(\Omega M, \mathbb{R})$ пространств петель, в том числе старших порядков $m \geq 2$, хотя это и требует большого объема вычислений.

Отметим, что сдвиг на $m = 1$ в группах коомологий в формуле (3.2), вообще говоря, не является общим фактом для любых i и m . По крайней мере, несложно показать, что

$$H_{[2]}^0(\Omega M, \mathbb{R}) = 0.$$

Действительно, однородные 0-формы второго порядка — это функции вида

$$F = \int_{S^1} b_{ij}(u) u_x^i u_x^j dx, \quad (3.38)$$

где $b_{ij}(u)$ — произвольное гладкое симметричное тензорное поле на M .

Найдем условия замкнутости 0-формы (3.38):

$$\begin{aligned} (dF)(\xi) &= \int_{S^1} \xi^i \left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial u^i} u_x^k u_x^j - (b_{ij} u_x^j)_x - (b_{ji} u_x^j)_x \right) dx \\ &= \int_{S^1} \xi^i \left[(-b_{ij} - b_{ji}) u_{xx}^j + \left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ji}}{\partial u^k} \right) u_x^k u_x^j \right] dx \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой замкнутой однородной 0-формы второго порядка (3.38) должно выполняться соотношение $b_{ij} = 0$, т.е. она обязательно является тождественно нулевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мохов О. И. О комплексах однородных форм на пространствах петель гладких многообразий и их группах коомологий. УМН, **51**, вып. 2, 141–142 (1996).

2. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. ДАН СССР, **270**, № 4, 781–785 (1983).
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория. УМН, **44**, вып. 6, 29–98 (1989).
4. Dubrovin B. A., Novikov S. P. Hydrodynamics of soliton lattices. Sov. Sci. Rev.. Sec. C, Math. Phys., Vol. 9, Part 4, 1993, pp. 1–136.
5. Царев С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа. Изв. АН СССР, сер. матем., **54**, вып. 5, 1048–1068 (1990).
6. Maltsev A. Ya. The conservation of the Hamiltonian structures in Whitham's method of averaging. Preprint, solv-int/9611008.
7. Мальцев А. Я. Усреднение локальных теоретико-полевых скобок Пуассона. УМН, **52**, вып. 2, 177–178 (1997).
8. Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. УМН, **45**, вып. 3, 191–192 (1990).
9. Mokhov O. I. Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics. Phys. Lett. A, **166**, No. 3, 4, 215–216 (1992).
10. Ферапонтов Е. В. Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 37–49 (1991).
11. Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. Гамильтоновы пары, порождаемые кососимметричными тензорами Киллинга на пространствах постоянной кривизны. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 2, 60–63 (1994).
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа. ДАН СССР, **279**, № 2, 294–297 (1984).
13. Потемин Г. В. О скобках Пуассона дифференциально-геометрического типа. ДАН СССР, **286**, № 1, 39–42 (1986).
14. Потемин Г. В. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии в теории солитонов. Дисс. к.ф.-м.н., МГУ, М., 1991.
15. Doyle P. W. Differential geometric Poisson bivectors in one space variable. J. Math. Phys., **34**, No. 4, 1314–1338 (1993).
16. Mokhov O. I., Nutku Y. Homogeneous Poisson brackets of Dubrovin–Novikov type and their nonlocal generalizations. Preprint, TÜBİTAK – Marmara Research Center, Research Institute for Basic Sciences, Gebze, Turkey, 1996.
17. Ferapontov E. V., Galvão C. A. P., Mokhov O. I., Nutku Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2-d topological field theory. Commun. Math. Phys., **186**, 649–669 (1997).
18. Мохов О. И. О скобках Пуассона типа Дубровина–Новикова (ДН-скобки). Функц. анализ и его прил., **22**, вып. 4, 92–93 (1988).
19. Мохов О. И. Симплектические формы на пространстве петель и риманова геометрия. Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 86–87 (1990).
20. Мохов О. И. Однородные симплектические структуры второго порядка на пространствах петель и симплектические связности. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 2, 65–67 (1991).

21. *Mokhov O. I.* Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations. In: Topics in topology and mathematical physics (S. P. Novikov ed.), Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, Vol. 170, Providence, RI, 1995, pp. 121–151; hep-th/9503076.
22. *Мохов О. И.* Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы. Дисс. д.ф.-м.н., МИАН, М., 1996.
23. *Mokhov O. I.* Two-dimensional nonlinear sigma-models and symplectic geometry on loop spaces of (pseudo)-Riemannian manifolds. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, Proc. 8th Internat. Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (NEEDS'92), July 6–17, 1992, Dubna, V. Makhankov, I. Puzynin, and O. Pashaev eds., World Scientific Publishing, Singapore, 1993, pp. 444–456; hep-th/9301048.
24. *Mokhov O. I.* Poisson and symplectic geometry on loop spaces of smooth manifolds. In: Geometry from the Pacific Rim, Proc. Pacific Rim Geometry Conference ... National University of Singapore, Republic of Singapore, December 12–17, 1994, A. J. Berrick, B. Loo, H.-Y. Wang eds., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1997, pp. 285–309.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru,
mokhov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
28 января 1997 г.