Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Пушкарь, Индекс Маслова и симплектические теоремы Штурма, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 35–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 07:32:22

УДК 517.9

Индекс Маслова и симплектические теоремы Штурма*

© 1998. П. Е. ПУШКАРЬ

Введение

Теоремы Штурма о нулях решений дифференциального уравнения второго порядка описывают вращение прямой на фазовой плоскости этого уравнения [3, 13]. В симплектической версии этих теорем вместо прямых рассматриваются лагранжевы плоскости, а вместо моментов пересечения с выделенной прямой — моменты нетрансверсальности с данной плоскостью [2]. Шлейф данной лагранжевой плоскости — гиперповерхность (с особенностями) в лагранжевом грассманиане, состоящая из всех лагранжевых плоскостей, не трансверсальных данной.

Индексом Маслова называется индекс пересечения кривой на лагранжевом грассманиане со шлейфом. Симплектические теоремы Штурма [2] описывают свойства индекса Маслова. Симплектическая теория Штурма была построена в работах Морса [10, 11], Лидского [9] и Арнольда [2], а ее эрмитов вариант — в работах Ботта [4] и Эдвардса [5]. Свойства (не)осцилляционности гамильтоновых уравнений и коциклы, представляющие образующую первых гомологий симплектической группы, изучались Якубовичем [15–17]. Симплектическая теория Штурма применялась Гивенталем [7]. Им доказано свойство лагранжевой неосцилляционности уравнения Пикара–Фукса для гиперэллиптических интегралов. В работе определяется класс гиперповерхностей в лагранжевом грассманиане, на которые переносятся симплектические теоремы Штурма. Автор благодарен В. И. Арнольду и А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

§ 1. Необходимые определения

В этом параграфе строятся трансверсально ориентированные гиперповерхности в лагранжевом многообразии Грассмана, определяющие одномерный коцикл, совпадающий с индексом Маслова.

Рассмотрим симплектическое линейное пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Обозначим через Λ_n многообразие лагранжевых подпространств в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, называемое лагранжевым многообразием Грассмана. Зафиксируем координаты Дарбу $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i = dp \wedge dq$. Будем называть плоскость $p = 0$ q -плоскостью, а плоскость $q = 0$ p -плоскостью.

* Работа частично поддержана грантом INTAS-96-0713 и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-01-01104).

Рассмотрим множество $X \subset \Lambda_n$ всех лагранжевых плоскостей, трансверсальных плоскости $p = 0$. Множество X — открытое всюду плотное подмножество в многообразии Λ_n (его карта), диффеоморфное $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Лагранжева плоскость, содержащаяся в X , отождествляется с симметрической матрицей: матрице A соответствует плоскость $q = Ap$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2]. Шлейфом данной лагранжевой плоскости называется множество всех лагранжевых плоскостей, не трансверсальных данной. В карте X шлейф p -плоскости задается уравнением $\det A = 0$.

Будем отождествлять элементы касательного пространства в точке линейного пространства и инвариантные относительно сдвигов векторные поля в линейном пространстве с элементами линейного пространства. В нашем случае мы отождествляем инвариантные относительно сдвигов векторные поля в карте X с матрицами.

Рассмотрим гиперповерхность в X , заданную уравнением

$$(L_{A_1} \cdots L_{A_k} \det)(A) = 0,$$

где $A_1, \dots, A_k$ — положительно определенные матрицы ($0 \leq k < n$), L_v — производная вдоль векторного поля v и $\det$ — определитель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замыкание гиперповерхности $\{A : (L_{A_1} \cdots L_{A_k} \det)(A) = 0\} \subset X$ в лагранжевом многообразии Грассмана Λ_n назовем *обобщенным шлейфом* и обозначим его через $\Sigma_{\mathcal{A}}$. Иногда будем обозначать обобщенный шлейф через $\Sigma_{A_1, \dots, A_k}$; при этом мы предполагаем, что заранее зафиксированы некоторые координаты Дарбу.

Таким образом, обобщенный шлейф строится по следующим данным: координатам Дарбу в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ и k ($0 \leq k < n$) положительно определенным $n \times n$ -матрицам.

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот набор данных шире, чем нужно: достаточно вместо координат Дарбу зафиксировать $k + 2$ лагранжевых плоскостей, на которые наложены следующие условия:

- 1) первая плоскость трансверсальна остальным;
- 2) если выбраны какие-нибудь координаты Дарбу, такие, что первая плоскость является q -плоскостью, а вторая есть p -плоскость, то k оставшихся лагранжевых плоскостей должны изображаться в соответствующей карте X положительно определенными матрицами.

После этого повторим предыдущее определение обобщенного шлейфа с этими координатами Дарбу и получившимися матрицами. Получающаяся при этом гиперповерхность и выполнение условия 2) не зависят от произвола в выборе координат Дарбу.

Шлейф лагранжевой плоскости — частный случай обобщенного шлейфа ($k = 0$). Как будет показано ниже, при $n > 2$ все обобщенные шлейфы в Λ_n — гиперповерхности с особенностями. При $n = 2$ обобщенный шлейф, построенный по одной матрице (первый нетривиальный пример обобщенного шлейфа), есть гладкая гиперповерхность в Λ_2 , диффеоморфная двумерной сфере.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2]. *Положительными векторами* на лагранжевом многообразии Грассмана называются векторы скоростей движения лагранжевых плоскостей под действием положительно определенных гамильтонианов.

Шлейф любой плоскости трансверсально ориентирован положительными векторами в неособых точках. Индекс пересечения ориентированных петель со шлейфом определяет каноническую образующую группы $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (см. [1, 2]) — класс Маслова.

Обобщенный шлейф — гиперповерхность (с особенностями) в Λ_n . Свойства обобщенного шлейфа во многом похожи на свойства шлейфа лагранжевой плоскости. Верна следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1.1. *Обобщенный шлейф $\Sigma_{\mathcal{A}}$ — гиперповерхность в лагранжевом многообразии Грассмана Λ_n , такая, что:*

- 1) *положительные векторы трансверсальны к $\Sigma_{\mathcal{A}}$ в неособых точках;*
- 2) *трансверсальная ориентация обобщенного шлейфа положительными векторами задает элемент $\alpha_{\mathcal{A}} \in H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$ — индекс пересечения ориентированных петель с $\Sigma_{\mathcal{A}}$;*
- 3) *элемент $\alpha_{\mathcal{A}}$ совпадает с классом Маслова.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть *положительным путем* гладкий путь в лагранжевом многообразии Грассмана, вектор скорости которого в любой точке положителен.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Индекс пересечения положительного пути с обобщенным шлейфом неотрицателен.*

Доказательство теоремы 1.1 приводится в §3. Пересечение обобщенного шлейфа с картой X является нулевой поверхностью уровня гиперболического полинома. Необходимые нам утверждения о гиперболических полиномах собраны в следующем параграфе.

§2. Гиперболические полиномы

Напомним, что вещественный полином степени n называется *гиперболическим вдоль вектора a* , если его ограничение на любую прямую, параллельную a , имеет ровно n вещественных корней (с учетом кратностей). В этом случае будем называть вектор a *гиперболическим вектором* данного полинома или, допуская вольность речи, просто *гиперболическим*.

Векторы, вдоль которых данный однородный полином гиперболичесен, образуют открытые выпуклые конусы [6, 14]. Нам понадобятся следующие утверждения об однородных гиперболических полиномах.

Пусть K — открытый конус, образующий связную компоненту области гиперболических векторов однородного полинома f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см. [2]). *Конус K , параллельно перенесенный в точку поверхности $f = 0$, не пересекается с этой поверхностью в достаточно малой окрестности перенесенной вершины.*

Как и в §1, будем отождествлять инвариантные относительно сдвигов (постоянные) векторные поля на линейном пространстве с векторами этого пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (см. [14]). *Производная полинома f вдоль постоянного гиперболического векторного поля, равного вектору из конуса K , является однородным гиперболическим полиномом относительно векторов из конуса K .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Путь, вектор скорости которого в любой момент пересечения с поверхностью $f = 0$ принадлежит конусу K , пересекает эту поверхность конечное число раз.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $g(x)$ число неположительных корней (с учетом кратностей) полинома $f(x+ta)$ от переменной t , $a \in K$. Функция g локально постоянна на дополнении к гиперповерхности $f = 0$, так как f гиперболичесен. Ее значение не зависит от выбора $a \in K$. Ограниченная на путь, она возрастает при пересечении пути с $f = 0$ — это легко вывести из предложения 2.1. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Множество критических точек производной однородного полинома f вдоль постоянного гиперболического векторного поля содержится в множестве критических точек полинома f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $a \in K$ постоянное гиперболическое поле. Пусть x — критическая точка гиперболического полинома $L_a f$. Поскольку полином $L_a f$ однородный, $(L_a f)(x) = 0$. Кратность корня $t = 0$ полинома $(L_a f)(x+tb)$ от переменной t постоянна при $b \in K$, согласно предложениям 2.1 и 2.2, так как все корни полинома $(L_a f)(x+tb)$ от переменной t вещественны и непрерывно зависят от вектора $b \in K$. Таким образом, точка x является критической точкой гиперболического полинома $L_a f$, если и только если $t = 0$ — кратный корень полинома $l(t) = (L_a f)(x+ta)$. Полином $l(t)$ равен производной полинома $f(x+ta)$ от переменной t . Полиномы $f(x+ta)$ и $l(t)$ от переменной t гиперболические. (Напомним, что вещественный полином от одной переменной называется *гиперболическим*, если все его корни вещественны.) По лемме Ролля корень производной гиперболического полинома является кратным, если и только если он — кратный корень (кратности не меньше 3) самого полинома. Следовательно, $t = 0$ — кратный корень полинома $f(x+ta)$ от t и x — критическая точка полинома f . Доказательство закончено.

Следующее утверждение хорошо известно. Это следствие теоремы о приведении пары форм, одна из которых положительно определена, к главным осям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Определитель симметрической матрицы — гиперболический однородный полином на пространстве симметрических матриц относительно конуса положительно определенных матриц.*

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Пусть $A_1, \dots, A_k$ — положительно определенные матрицы. Полином $L_{A_1} \cdots L_{A_k} \det$ — гиперболический однородный полином на пространстве симметрических матриц относительно конуса положительно определенных матриц.*

§3. Свойства обобщенного шлейфа

Напомним, что через X мы обозначили карту многообразия Λ_n , состоящую из всех лагранжевых плоскостей, трансверсальных q -плоскости. При

помощи линейной структуры мы отождествляем касательные векторы в разных точках множества X , постоянные векторные поля на X и матрицы — элементы множества X .

ЛЕММА 3.1. *Положительные векторы в карте X лагранжева многообразия Грассмана изображаются положительно определенными матрицами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — положительно определенный гамильтониан. Рассмотрим лагранжеву плоскость $q = Ap$. Ее образ под действием фазового потока гамильтонова векторного поля $\dot{p} = -H_q$, $\dot{q} = H_p$ с гамильтонианом H за время ε есть плоскость $q = (A + \varepsilon B)p + o(\varepsilon)$. Докажем, что матрица B положительно определена. Действительно,

$$Ap + \varepsilon H_p(p, Ap) = (A + \varepsilon B)(p - \varepsilon H_q(p, Ap)) + o(\varepsilon),$$

откуда $H_p(p, Ap) = Bp - AH_q(p, Ap)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle Bp, p \rangle &= \langle H_p(p, Ap), p \rangle + \langle AH_q(p, Ap), p \rangle \\ &= \langle H_p(p, Ap), p \rangle + \langle H_q(p, Ap), Ap \rangle = 2H(p, Ap) \end{aligned}$$

по теореме Эйлера. Значит, матрица B положительно определена. Верно и обратное: любая положительно определенная матрица изображает положительный вектор. Лемма доказана.

Рассмотрим карту Y лагранжева грассманиана Λ_n , состоящую из лагранжевых плоскостей, трансверсальных плоскости $p = 0$ (q -плоскости). Как и в случае карты X , мы отождествляем в карте Y лагранжеву плоскость с симметрической матрицей B : матрице B соответствует плоскость $p = Bq$. Координаты плоскости $\lambda \in X \cap Y$ в картах X и Y связаны соотношением $A = B^{-1}$ (A — матрица, соответствующая плоскости λ в карте X , B — в карте Y).

ЛЕММА 3.2. а) *В карте Y уравнение $(L_{A_1} \cdots L_{A_k} \det)(A) = 0$ выглядит как $(L_{-BA_1B} \cdots L_{-BA_kB} \frac{1}{\det})(B) = 0$.*

б) $(L_{-BA_1B} \cdots L_{-BA_kB} \frac{1}{\det})(B) = P_{A_1, \dots, A_k}(B)/\det B$, где $P_{A_1, \dots, A_k}(B)$ — однородный полином степени k , равный сумме слагаемых вида

$$\pm \operatorname{tr}(A_{i_1} B \cdots A_{i_{m_1}}) \operatorname{tr}(A_{i_{m_1+1}} B \cdots A_{i_{m_2}} B) \cdots \operatorname{tr}(A_{i_{m_{l-1}+1}} B \cdots A_{i_{m_l}} B)$$

$((i_1, \dots, i_{m_l})$ — перестановка элементов $(1, \dots, k)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Для любой матрицы M ($\det M \neq 0$) выполняется равенство $(M + \varepsilon A_i)^{-1} = M^{-1} - \varepsilon M^{-1} A_i M^{-1} + o(\varepsilon)$.

б) Легко проверить, что $(L_{-BA_1B} \frac{1}{\det})(B) = \operatorname{tr} A_1 B / \det B$. Далее доказательство проводится по индукции. Например, $P_{A_1, A_2}(B) = \operatorname{tr} A_1 B \operatorname{tr} A_2 B - \operatorname{tr} A_1 B A_2 B$. Доказательство закончено.

Для удобства будем иногда обозначать оператор $L_{A_1} \cdots L_{A_k}$ через $L_{\mathcal{A}}$, а полином $P_{A_1, \dots, A_k}$ через $P_{\mathcal{A}}$.

ЛЕММА 3.3. *Множество особых точек гиперповерхности $L_{\mathcal{A}} \det = 0$ имеет коразмерность, не меньшую, чем 3, в карте X .*

Множество особых точек гиперповерхности $\{B : P_{\mathcal{A}}(B) = 0\}$ имеет коразмерность, не меньшую, чем 3, в карте Y , причем гиперповерхность

$\{B : P_{\mathcal{A}}(B) = 0\}$ пересекается с гиперповерхностью $\{B : \det B = 0\}$ трансверсально вне множества коразмерности, не меньшей, чем 3, в карте Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы следует из предложения 2.4, поскольку множество особых точек гиперповерхности $L_{\mathcal{A}} \det = 0$ содержится в множестве особых точек гиперповерхности $\det = 0$, коразмерность которого равна 3. Докажем второе утверждение. Пересечение множества особых точек гиперповерхности $\{B : P_{\mathcal{A}}(B) = 0\}$ и множества $\{B : \det B \neq 0\}$ имеет коразмерность, не меньшую, чем 3, в карте Y , поскольку это изображение множества особых точек гиперповерхности $L_{\mathcal{A}} \det = 0$ в карте Y .

Множество особых точек гиперповерхности $\{B : \det B = 0\}$ имеет коразмерность 3 в карте Y . Следовательно, достаточно показать, что гиперповерхность $\{B : P_{\mathcal{A}}(B) = 0\}$ и многообразие неособых точек гиперповерхности $\{B : \det(B) = 0\}$ пересекаются трансверсально вне множества коразмерности по меньшей мере 3 в Y .

Множество неособых точек гиперповерхности $\{B : \det(B) = 0\}$ — это множество матриц с одномерным ядром. Оно расслоено над соответствующим проективным пространством (матрице соответствует ядро). Докажем, что множество особых корней уравнения $P_{\mathcal{A}}(B) = 0$, ограниченного на любой слой этого расслоения, имеет коразмерность не меньше 2 в слое. Из этого вытекает второе утверждение леммы.

Рассмотрим слой этого расслоения над прямой $q_1 = \dots = q_{n-1} = 0$. Правый столбец и нижняя строка матриц из этого слоя нулевые, а определитель левого верхнего минора размера $(n-1) \times (n-1)$ отличен от нуля. Обозначим этот минор через $\tilde{B}$. Уравнение $P_{\mathcal{A}}(B) = P_{A_1, \dots, A_k}(B) = 0$ в этом слое выглядит так: $P_{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k}(\tilde{B}) = 0$ (по лемме 3.2), где $\tilde{A}_i$ — левый верхний минор размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы A_i . Матрицы $\tilde{A}_i$ положительно определены; следовательно, как показано выше, уравнение $P_{\mathcal{A}}(B) = 0$ при $k < n-1$ определяет в рассматриваемом слое гиперповерхность, множество особых точек которой имеет в слое коразмерность, не меньшую, чем 3. Если $k = n-1$, то $P_{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k}(\tilde{B})/\det \tilde{B} = (L_{\tilde{A}_1} \dots L_{\tilde{A}_k} \det)(\tilde{B}^{-1}) \neq 0$. Значит, рассматриваемый слой не содержится в гиперповерхности $\{B : P_{\mathcal{A}}(B) = 0\}$. Случай других слоев сводится заменой координат Дарбу, сохраняющих p - и q -плоскости, к рассмотренному. Лемма доказана.

Обозначим объединение множеств особых корней уравнения $P_{A_1, \dots, A_k}(B) = 0$ на слое расслоения, рассмотренного в доказательстве леммы 3.3, по всем слоям этого расслоения через O . Коразмерность множества O равна по меньшей мере 3 согласно лемме 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Пересечение обобщенного шлейфа с объединением карт X и Y — гиперповерхность, гладкая вне множества коразмерности, не меньшей, чем 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пересечение обобщенного шлейфа с картой X неособо вне множества коразмерности, не меньшей, чем 3, — это первое утверждение предыдущей леммы. Особые точки пересечения обобщенного шлейфа с картой Y , принадлежащие $Y \setminus X$, содержатся в множестве особых точек гиперповерхности $\{B : \det(B) = 0\}$ и множестве O .

ЛЕММА 3.5. *Положительные векторы трансверсальны обобщенному шлейфу в его неособых точках.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть лагранжева плоскость λ — неособая точка обобщенного шлейфа. Тогда λ — предел последовательности неособых точек пересечения обобщенного шлейфа с картой X . В неособых точках пересечения обобщенного шлейфа с картой X положительные векторы трансверсальны обобщенному шлейфу согласно утверждению 2.1 и лемме 3.1. Выберем координаты Дарбу $(\tilde{p}, \tilde{q})$, такие, что λ есть $\tilde{p}$ -плоскость. В карте Z лагранжевых плоскостей, трансверсальных $\tilde{q}$ -плоскости, положительные векторы, согласно лемме 3.1, изображаются положительно определенными матрицами. Лемма вытекает из следующего простого утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Пусть K — открытый конус в $\mathbb{R}^N$ и Γ — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^N$. Тогда множество точек гиперповерхности Γ , в которых все векторы из K трансверсальны Γ , замкнуто в Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, множество точек из Γ , таких, что найдется вектор из K , касающийся Γ в этой точке, очевидно, открыто в Γ .

ЛЕММА 3.7. *Индекс пересечения ориентированных замкнутых кривых с обобщенным шлейфом $\Sigma_{\mathcal{A}} = \Sigma_{A_1, \dots, A_k}$ (трансверсально ориентированным положительными векторами) определяет элемент $\tilde{\alpha}_{A_1, \dots, A_k} \in H^1(X \cup Y, \mathbb{Z})$. Этот элемент не зависит от выбора положительно определенных матриц $A_1, \dots, A_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, первое утверждение леммы вытекает из следствия 3.4 и леммы 3.5. Докажем второе утверждение. Рассмотрим петлю в $X \cup Y$ и приведем ее в общее положение по отношению к $\Sigma_{A_1, \dots, A_k}$ и шлейфу q -плоскости. Полученная петля пересекает $\Sigma_{A_1, \dots, A_k}$ и шлейфу q -плоскости трансверсально в неособых точках этих гиперповерхностей, причем, согласно лемме 3.3, можно считать, что точки пересечения петли с $\Sigma_{A_1, \dots, A_k}$ содержатся в карте X . Если матрицы $B_1, \dots, B_k$ близки к матрицам $A_1, \dots, A_k$ соответственно, то полученная петля пересечет $\Sigma_{B_1, \dots, B_k}$ трансверсально в близких точках. Докажем это.

Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, — полученная петля, а $t_1, \dots, t_l$ — моменты пересечения этой петли со шлейфом q -плоскости. Тогда при достаточно малом ε пути $\gamma(t)$, $t \in [t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]$, содержатся в карте Y и не пересекаются с гиперповерхностью $\{B : P_{A_1, \dots, A_k}(B) = 0\}$. Следовательно, эти пути не пересекаются с гиперповерхностью $\{B : P_{B_1, \dots, B_k}(B) = 0\}$ (если матрицы $B_1, \dots, B_k$ близки к матрицам $A_1, \dots, A_k$), поскольку уравнение $P_{A_1, \dots, A_k}(B) = 0$ непрерывно зависит от $A_1, \dots, A_k$. Тем более пути $\gamma(t)$, $t \in [t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]$, не пересекаются с $\Sigma_{B_1, \dots, B_k}$.

С другой стороны, пути $\gamma(t)$, $t \in [t_j + \varepsilon, t_{j+1} - \varepsilon]$, содержатся в карте X . Уравнение $L_{A_1} \cdots L_{A_k}(A) = 0$ гладко зависит от $A_1, \dots, A_k$; следовательно, пути $\gamma(t)$, $t \in [t_j + \varepsilon, t_{j+1} - \varepsilon]$, пересекут $\Sigma_{B_1, \dots, B_k}$ трансверсально в близких точках по теореме о неявной функции. Остается заметить, что вклад каждой точки пересечения в индекс пересечения не меняется при малом изменении матриц $A_1, \dots, A_k$. Мы доказали, что элемент $\tilde{\alpha}_{A_1, \dots, A_k}$ локально постоянен; следовательно, он постоянен, так как положительно определенные матрицы образуют связное множество. Лемма доказана.

Определим на карте X функцию $g_{\mathcal{A}}$ следующим образом: $g_{\mathcal{A}}(B)$ равно числу неположительных корней полинома $L_{\mathcal{A}}(B+tP)$ от переменной t (P — какая-нибудь положительно определенная матрица). Функция $g_{\mathcal{A}}$ не зависит от участвующей в ее определении матрицы P . Из результатов §2 легко выводится следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Индекс пересечения пути, содержащегося в карте X , с $\Sigma_{\mathcal{A}}$ равен приращению функции $g_{\mathcal{A}}$. Если начало такого пути — отрицательно определенная, а конец — положительно определенная матрицы, то его индекс пересечения с $\Sigma_{\mathcal{A}}$ равен $n - k$.*

Обозначим через E единичную матрицу, а через Σ_E^k обобщенный шлейф $\Sigma_{A_1, \dots, A_k}$ с $A_1 = \dots = A_k = E$.

ЛЕММА 3.9. *Обобщенный шлейф Σ_E^k — гиперповерхность, гладкая вне множества коразмерности по меньшей мере 3 в Λ_n . Индекс пересечения ориентированных замкнутых кривых с Σ_E^k (трансверсально ориентированным положительными векторами) определяет элемент в $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$, совпадающий с классом Маслова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k = 0$, то наш обобщенный шлейф есть просто шлейф p -плоскости и утверждение леммы доказано в [1]. Пусть $k > 0$. Докажем, что Σ_E^k пересекается с $\Lambda_n \setminus (X \cup Y)$ по множеству коразмерности по меньшей мере 3 (для $k = 0$ последнее неверно). Из этого ввиду следствия 3.4 вытекает первое утверждение леммы.

Очевидно такое утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. *Пусть $A_1 = \dots = A_k = E$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$ — собственные числа симметрической матрицы M . Тогда*

$$L_{\mathcal{A}} \det(M) = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}, \quad P_{\mathcal{A}}(M) = k! \sum_{i_1 < \dots < i_{n-k}} \mu_{i_1} \cdots \mu_{i_{n-k}}.$$

Продолжим доказательство леммы 3.9. Множество $\Lambda_n \setminus (X \cup Y)$ является подмногообразием (с особенностями) коразмерности 2 в Λ_n . Множество лагранжевых плоскостей, пересекающихся с p - и q -плоскостями по одномерному подпространству, образует открытое подмногообразие L коразмерности 2 в Λ_n (например, при $n = 2$ это незаузленная окружность в Λ_2). Дополнение до L в $\Lambda_n \setminus (X \cup Y)$ образует подмногообразие (с особенностями) коразмерности, не меньшей, чем 3, в Λ_n . Плоскости $\lambda \in L$ соответствует набор из $n - 2$ ненулевых «собственных чисел» — нужно рассмотреть последовательность плоскостей (матриц) из X , сходящихся к λ , и взять пределы собственных чисел. Один из этих пределов равен нулю и один — бесконечности, а остальные образуют нужный нам набор. Пользуясь предложением 3.10, легко проверить, что условие принадлежности плоскости λ обобщенному шлейфу Σ_E^k — нетривиальное условие на этот набор. Следовательно, Σ_E^k пересекает L по гиперповерхности. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы. Трансверсально ориентированный положительными векторами обобщенный шлейф Σ_E^k определяет элемент α_{kE} в $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$, поскольку множество его особых точек имеет коразмерность 3 в Λ_n . Докажем, что α_{kE} совпадает с классом Маслова.

Поскольку $\pi_1(\Lambda_n) = \mathbb{Z} [1]$, достаточно показать, что значения класса α_{kE} и класса Маслова на какой-нибудь нестягиваемой петле совпадают. Рассмотрим петлю γ , образованную следующими путями γ_1 и γ_2 . Путь $\gamma_1(t) = (t-1)A + tB$, $t \in [0, 1]$, содержится в карте X , а путь $\gamma_2(t) = (1-t)B^{-1} - tA^{-1}$, $t \in [0, 1]$, — в карте Y , причем A и B — положительно определенные матрицы. Концы путей γ_1 и γ_2 не принадлежат Σ_E^k . Индекс Маслова петли γ равен n , поскольку путь γ_2 не пересекает шлейфа p -плоскости, а индекс пересечения пути γ_1 со шлейфом p -плоскости равен n [2]. Следовательно, индекс пересечения петли γ с Σ_E^k делится на n . Индекс пересечения пути γ_1 с Σ_E^k равен $n - k$, согласно предложению 3.8. Индекс пересечения пути γ_2 с Σ_E^k , во-первых, неотрицателен, так как путь γ_2 положителен (заметим, что положительные векторы изображаются в карте Y отрицательно определенными матрицами), и, во-вторых, не превосходит k , поскольку пересечение Σ_E^k с картой Y содержится в нулевой поверхности уровня полинома $P_{E, \dots, E}$, степень которого равна k . Таким образом индекс пересечения петли γ с Σ_E^k положителен и не больше n ; следовательно, он равен n . Лемма 3.9 доказана.

ЛЕММА 3.11. *Индекс пересечения ориентированных замкнутых кривых с $\Sigma_{\mathcal{A}}$ (трансверсально ориентированным положительными векторами) определяет элемент в $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$, совпадающий с классом Маслова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем петлю в Λ_n и пошевелим ее так, чтобы она оказалась в $X \cup Y$. Значение $\tilde{\alpha}_{A_1, \dots, A_k}$ на получившейся петле равно значению $\tilde{\alpha}_{E, \dots, E}$ по лемме 3.7. По лемме 3.9 оно совпадает с индексом Маслова. Следовательно, индекс пересечения корректно определен и лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Теорема 1.1 доказана в леммах 3.5 и 3.11.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пересечение обобщенного шлейфа $\Sigma_{\mathcal{A}}$ с картой Y совпадает с поверхностью $\{B : P_{\mathcal{A}}(B) = 0\}$. Полином $P_{\mathcal{A}}$ является гиперболическим относительно конуса положительно определенных матриц. Эти утверждения легко выводятся из того, что индекс пересечения пути γ_2 , рассмотренного в доказательстве леммы 3.9, с $\Sigma_{\mathcal{A}}$ равен k .

2) Доказательство теоремы 1.1 можно было бы провести иначе, если показать, что особенности обобщенного шлейфа имеют коразмерность, не меньшую, чем 3, в лагранжевом грассманиане. Доказательство этого факта автору неизвестно.

§4. Построение коцикла

Конус положительных векторов соотносится с обобщенным шлейфом так же, как конус векторов гиперболичности полинома f соотносится с поверхностью $f = 0$ (см. предложение 2.1). Это обстоятельство позволяет определить на Λ_n одномерный коцикл. Для разных целей полезно использовать индекс пересечения незамкнутых путей с (обобщенным) шлейфом. Для шлейфа лагранжевой плоскости такой индекс определен в [12].

ЛЕММА 4.1. *Моменты пересечения положительного пути со шлейфом любой лагранжевой плоскости λ изолированы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma(t)$, $t \in]0, 1[$, — положительный путь и $\gamma(t_0)$ принадлежит шлейфу плоскости λ .

Можно выбрать координаты Дарбу $(\tilde{p}, \tilde{q})$ таким образом, что плоскость λ — это $\tilde{p}$ -плоскость, а плоскость $\gamma(t_0)$ трансверсальна $\tilde{q}$ -плоскости. В карте многообразия Λ_n плоскостей, трансверсальных $\tilde{q}$ -плоскости, шлейф плоскости λ задается уравнением $\det(A) = 0$. Применяя предложения 2.3 и 2.5 и лемму 3.1, завершаем доказательство.

ЛЕММА 4.2. *Моменты пересечения положительного пути с обобщенным шлейфом изолированы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Моменты пересечения положительного пути со шлейфом q -плоскости изолированы. Следовательно, путь разбивается на конечное число кусков, содержащихся в карте X . На каждом таком куске число моментов пересечения с обобщенным шлейфом конечно согласно 2.6, 2.3 и 3.1. Лемма доказана.

Рассмотрим координаты Дарбу $(\tilde{p}, \tilde{q})$ и карту $X_{\tilde{p}}$ грассманиана Λ_n , состоящую из всех лагранжевых плоскостей, трансверсальных $\tilde{q}$ -плоскости. Как и выше, мы отождествляем лагранжевы плоскости из $X_{\tilde{p}}$ с симметрическими матрицами.

ТЕОРЕМА 4.3. *Конус положительно определенных матриц в карте $X_{\tilde{p}}$, параллельно перенесенный в точку обобщенного шлейфа, не пересекается с обобщенным шлейфом в достаточно малой окрестности перенесенной вершины.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $x_0 \in X_{\tilde{p}}$ обобщенного шлейфа и проведем через нее положительный путь (в карте $X_{\tilde{p}}$), пересекающий обобщенный шлейф только в точке x_0 . Это можно сделать в силу леммы 4.2. Если бы утверждение теоремы было неверно, то нашелся бы другой положительный путь (в карте $X_{\tilde{p}}$) с теми же концами, что и первый, проходящий через точку x_0 и сколь угодно много неособых точек обобщенного шлейфа. Индексы пересечения этих путей с обобщенным шлейфом совпадают, так как эти пути гомотопны (с закрепленными концами). Следовательно, индекс пересечения первого пути сколь угодно велик (см. следствие 1.2). Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное утверждение верно для конуса отрицательно определенных матриц.

Шлейф лагранжевой плоскости естественным образом стратифицирован размерностью пересечения с ней. Подобная стратификация имеется и для обобщенного шлейфа.

Пусть x_0 — точка обобщенного шлейфа. Проведем через нее (короткий) положительный путь γ , не пересекающий обобщенный шлейф в других точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *кратностью* точки x_0 индекс пересечения пути γ с обобщенным шлейфом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Кратность корректно определена и положительна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два положительных пути γ_1 и γ_2 , проходящие через точку x_0 обобщенного шлейфа (и больше не пересекающие обобщенный шлейф). Будем считать, что они помещаются в карте $X_{\tilde{p}}$ грассманиана Λ_n , связанной с координатами Дарбу $(\tilde{p}, \tilde{q})$. Путь γ_1 (в силу теоремы 4.3 и замечания) можно прогомоторировать в путь γ_2 так, что при

гомотопии концы не будут пересекать обобщенный шлейф. Это доказывает корректность определения. Неособые точки плотны в обобщенном шлейфе, из чего следует вторая часть предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кратность точки β шлейфа лагранжевой плоскости α равна размерности пересечения плоскостей α и β . При $n > 2$ все обобщенные шлейфы в Λ_n — гиперповерхности с особенностями, поскольку для обобщенного шлейфа $\Sigma_{\mathcal{A}}$, построенного по координатам Дарбу (p, q) и матрицам $A_1, \dots, A_k$, кратность p -плоскости равна $n-k$, а кратность q -плоскости равна k . Кратность неособой точки шлейфа равна 1. Видимо, верно и утверждение, что если кратность равна 1, то точка неособа.

Пусть Σ — обобщенный шлейф. Определим (аналогично [2, 8]) коцикл ind_{Σ} , совпадающий на кривых с концами вне Σ с индексом пересечения этих кривых с Σ .

Рассмотрим путь $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, в Λ_n . Пусть γ_0 — отрицательный путь, входящий в начало $\gamma(0)$ пути γ , и γ_1 — положительный путь, выходящий из конца $\gamma(1)$ пути γ . Пути γ_0 и γ_1 , согласно теореме 4.3 и замечанию, можно выбрать так, чтобы они могли пересекать обобщенный шлейф только в конце и начале соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Положим $\text{ind}_{\Sigma}(\gamma)$ равным индексу пересечения пути $\gamma_0 \cup \gamma \cup \gamma_1$ с Σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Число $\text{ind}_{\Sigma}(\gamma)$ корректно определено. Функция ind_{Σ} — коцикл. Когомологический класс коцикла ind_{Σ} — класс Маслова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения $\text{ind}_{\Sigma}(\gamma)$ проверяется так же, как корректность определения кратности. Легко видеть, что ind_{Σ} — коцепь. Тот факт, что ind_{Σ} — коцикл, следует из теоремы 1.1.

Легко проверяется справедливость следующего утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть γ — положительный путь. Значение коцикла ind_{Σ} на пути γ равно числу точек пересечения пути γ , за исключением начала этого пути, с обобщенным шлейфом Σ с учетом кратностей, приписанных точкам из Σ .

Пусть g_H^{ε} — отображение фазового потока гамильтонова векторного поля с положительно определенным (возможно, неавтономным) гамильтонианом H за время ε .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — путь в Λ_n . Значение коцикла ind_{Σ} на пути γ равно его значению на пути $g_H^{\varepsilon}(\gamma)$ при любом достаточно малом (зависящем от H и γ) положительном ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при малом ε путь, построенный при определении $\text{ind}_{\Sigma}(\gamma)$, гомотопен в классе путей с концами вне Σ пути $g_H^{\varepsilon}(\gamma)$.

§5. Симплектические теоремы Штурма

В этом параграфе доказываются обобщения симплектических теорем Штурма [2]. В наших рассуждениях особенно важна следующая простая лемма:

ЛЕММА 5.1. Любые две трансверсальные лагранжевы плоскости в Λ_n можно соединить положительным путем γ , таким, что $0 \leq \text{ind}_\Sigma(\gamma) \leq n$ для любого обобщенного шлейфа Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем координаты Дарбу в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, такие, что первая плоскость совпадает с p -плоскостью, а вторая — с q -плоскостью. отождествим $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$: $p_k + iq_k = z_k$. Путь $\gamma(\varphi) = e^{i\varphi}\{q = 0\}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, является искомым. Действительно, построенный путь γ положительный, поскольку $\gamma(\varphi)$ — образ под действием фазового потока за время φ с гамильтонианом $\sum p_k^2 + q_k^2$. С другой стороны, путь γ — часть положительной петли $l(\varphi) = e^{i\varphi}\{q = 0\}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, класс Маслова которой равен n [1].

Следующая теорема — теорема перемежаемости.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть Σ_1 и Σ_2 — обобщенные шлейфы, а l — путь в лагранжевом многообразии Грассмана Λ_n . Тогда

$$|\text{ind}_{\Sigma_1}(l) - \text{ind}_{\Sigma_2}(l)| \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, учитывая предложение 4.7, что концы пути l не содержатся в Σ_1 и Σ_2 . Поэтому можно допустить, что эти концы — трансверсальные лагранжевы плоскости. Замкнем их положительным путем γ , построенным в лемме 5.1. Согласно предложению 4.5, класс Маслова получившейся петли равен $\text{ind}_{\Sigma_j}(l) + \text{ind}_{\Sigma_j}(\gamma)$, $j = 1, 2$. Следовательно, $\text{ind}_{\Sigma_1}(l) - \text{ind}_{\Sigma_2}(l) = \text{ind}_{\Sigma_2}(\gamma) - \text{ind}_{\Sigma_1}(\gamma)$. Воспользовавшись оценкой из леммы 5.1 для пути γ , получаем искомое неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Если лагранжева плоскость эволюционирует под действием фазового потока с положительно определенным гамильтонианом, то числа моментов пересечения с любыми двумя обобщенными шлейфами (с учетом кратностей) различаются на любом отрезке не более чем на число степеней свободы. На отрезке, содержащем $n + 1$ моментов пересечения с одним обобщенным шлейфом, найдется момент пересечения с любым другим обобщенным шлейфом.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Кратность любой точки обобщенного шлейфа $\Sigma \subset \Lambda_n$ не превосходит n .

Докажем теорему о нулях.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть g^t — фазовый поток линейного неавтономного гамильтонова векторного поля в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, Σ — обобщенный шлейф, δ_i ($i = 1, 2$) — лагранжевы плоскости и $g^t\delta_i = g^t(\delta_i)$, $t \in [0, 1]$, — пути в лагранжевом многообразии Грассмана Λ_n . Тогда

$$|\text{ind}_\Sigma(g^t\delta_1) - \text{ind}_\Sigma(g^t\delta_2)| \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать (учитывая предложение 4.7), что лагранжевы плоскости δ_i , $g^1(\delta_i)$ ($i = 1, 2$) не содержатся в обобщенном шлейфе Σ и что плоскости δ_1 и δ_2 трансверсальны. Соединим плоскости δ_1 и δ_2 путем m_1 , построенным в доказательстве леммы 5.1. Пути $g^t\delta_1$ и $m_1 \cup g^t\delta_2 \cup -g^1(m_1)$ гомотопны ($-g^1(m_1)$ — путь $g^1(m_1)$ с противоположной ориентацией). Следовательно, $\text{ind}_\Sigma(g^t\delta_1) - \text{ind}_\Sigma(g^t\delta_2) = \text{ind}_\Sigma(m_1) - \text{ind}_\Sigma(g^1(m_1))$.

Имеем $\text{ind}_\Sigma(g^1(m_1)) = \text{ind}_{(g^1)^{-1}(\Sigma)}(m_1)$, где $(g^1)^{-1}(\Sigma)$ — обобщенный шлейф. Пользуясь оценкой из леммы 5.1, получаем искомое неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Если две лагранжевы плоскости эволюционируют в системе с положительно определенным гамильтонианом, то разность между числами моментов их пересечения (с учетом кратностей) с обобщенным шлейфом не превосходит n .*

Обозначим через $g_H^t \sigma = g_H^t(\sigma)$, $t \in [0, 1]$, путь в лагранжевом многообразии Грассмана Λ_n , образованный эволюцией лагранжевой плоскости σ под действием фазового потока гамильтонова векторного поля с гамильтонианом H (g_H^t — отображение фазового потока за время $[0, t]$). Докажем симплектическую версию теоремы сравнения.

ТЕОРЕМА 5.7. *Если $H_1 \geq H_0$, то для обобщенных шлейфов Σ_1 и Σ_2 и лагранжевых плоскостей σ и λ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \sigma) &\geq \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_0}^t \sigma), & \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \sigma) &\geq \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_0}^t \lambda) - n, \\ \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \sigma) &\geq \text{ind}_{\Sigma_2}(g_{H_0}^t \lambda) - 2n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предложения 4.7 можно считать, что плоскости σ , $g_{H_1}^1(\sigma)$, $g_{H_0}^1(\sigma)$, λ , $g_{H_1}^1(\lambda)$, $g_{H_0}^1(\lambda)$ не содержатся в обобщенных шлейфах Σ_1 и Σ_2 . Таким образом, теорему достаточно доказать для случая $H_1 > H_0$. Рассмотрим гомотопию $H_m = (1 - m)H_0 + mH_1$ гамильтонианов.

ЛЕММА 5.8. *Путь $g_{H_m}^1 \sigma = g_{H_m}^1(\sigma)$, $m \in [0, 1]$, положительный.*

Продолжим доказательство теоремы. Пути $g_{H_0}^t \sigma \cup g_{H_m}^1 \sigma$ и $g_{H_1}^t \sigma$ гомотопны; значит (согласно следствию 1.2), $\text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \sigma) \geq \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_0}^t \sigma)$. Первое неравенство теоремы доказано. Имеем $\text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \sigma) \geq \text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \lambda) - n$ согласно теореме 5.5. Это вместе с первым неравенством доказывает второе неравенство. Пользуясь теоремой 5.2, получаем, что $\text{ind}_{\Sigma_1}(g_{H_1}^t \sigma) \geq \text{ind}_{\Sigma_2}(g_{H_1}^t \sigma) - n$, а это вместе со вторым неравенством доказывает третье неравенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.8. Лемма 5.8 вытекает из следующего утверждения:

Пусть неавтономный квадратичный гамильтониан H зависит от параметра s , так что $\tilde{H} = dH/ds > 0$. Тогда семейство симплектоморфизмов $\psi_s = g_{H(s)}^1(g_{H(0)}^1)^{-1}$ задается положительно определенным гамильтонианом.

Производная решения $(p(t, s), q(t, s))$ уравнений Гамильтона $\dot{p} = -H_q$, $\dot{q} = H_p$ по параметру s (обозначим ее через $(h_1(t, s), h_2(t, s))$) удовлетворяет следующей системе уравнений в вариациях:

$$\dot{h}_1 = -\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} h_1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} h_2 - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q}, \quad \dot{h}_2 = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} h_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} h_2 + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}$$

с начальными условиями $h_1(0, s) = 0$, $h_2(0, s) = 0$.

По теореме Эйлера $\omega(x, v_K(x)) = 2K(x)$ для гамильтонова векторного поля v_K с гамильтонианом K . Таким образом, мы должны показать, что

$\omega((p(1, s), q(1, s)), (h_1(1, s), h_2(1, s))) > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega((p(t), q(t)), (h_1(t), h_2(t))) &= \dot{p}h_2 - \dot{q}h_1 + p\dot{h}_2 - q\dot{h}_1 \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q} h_2 - \frac{\partial H}{\partial p} h_1 + p \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} h_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} h_2 + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} \right) \\ &\quad + q \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} h_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} h_2 + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} \right) \end{aligned}$$

(мы опускаем параметр s , точка сверху означает производную по t). Далее,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = p \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} + q \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = p \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + q \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q},$$

так как $\partial H / \partial p$ и $\partial H / \partial q$ однородны степени 1. Следовательно, используя теорему Эйлера, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega((p(t), q(t)), (h_1(t), h_2(t))) = p \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} + q \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} = 2\tilde{H} > 0.$$

Интегрированием, с учетом начальных условий, устанавливаем нужное неравенство. Лемма доказана.

Пусть функции Гамильтона положительно определены.

СЛЕДСТВИЕ 5.9. *На отрезке, содержащем $n + 1$ моментов пересечения лагранжевой плоскости, эволюционирующей в одной гамильтоновой системе, с обобщенным шлейфом, найдется хотя бы один момент пересечения лагранжевой плоскости, эволюционирующей в системе с большей (нестрого) функцией Гамильтона, с тем же шлейфом. Более того, разность между числами моментов пересечения (с учетом кратностей) для систем с меньшей и большей функциями Гамильтона не превосходит n .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Все оценки теорем этого параграфа точны. Для любого неравенства любой теоремы можно подобрать обобщенные шлейфы (даже с заранее заданным числом матриц, по которым строится обобщенный шлейф), пути в лагранжевом грассманиане, лагранжевы плоскости и гамильтонианы так, что неравенства обратятся в равенства. Интересно, что ни в одном известном автору доказательстве теорем Штурма не используется геометрия расположения двух (обобщенных) шлейфов, — например, на сколько частей они делят лагранжев грассманиан (шлейфы двух трансверсальных лагранжевых плоскостей делят лагранжев грассманиан на $n + 1$ частей), что для обобщенных шлейфов и неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условие квантования. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 1, 1–14 (1967).
2. Арнольд В. И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 4, 1–10 (1985).
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Наука, М., 1984.

4. *Bott R.* On the iterations of closed geodesics and the Sturm intersection theory. Commun. Pure Appl. Math., **9**, No. 2, 171–206 (1956).
5. *Edwards H. M.* A generalised Sturm theorem. Ann. Math., **80**, No. 1, 22–57 (1964).
6. *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials. J. Math. Mech., **8**, No. 6, 957–965 (1959).
7. *Гивенталь А. Б.* Теорема Штурма для гиперэллиптических интегралов. Алгебра и анализ, **1**, вып. 5, 95–102 (1989).
8. *Givental A. B.* Nonlinear generalization of the Maslov index. Adv. Sov. Math., Vol. 1, 1990, pp. 71–103.
9. *Лудский В. Б.* Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений. ДАН СССР, **102**, No. 5, 877–880 (1955).
10. *Morse M.* A generalization of the Sturm theorems in n -space. Math. Ann., **103**, 52–69 (1930).
11. *Morse M.* The calculus of variation in the large. In: AMS Coll. Publ., Vol. 18, New York, 1934, pp. 80–106.
12. *Robbin J., Salamon D.* The Maslov index for paths. Topology, **32**, No. 4, 827–844 (1993).
13. *Sturm C.* Memoire sur les equations differentielles du second ordre. J. Math. Pures Appl., **1**, 106–186 (1836).
14. *Хованский А. Г.* Аналоги неравенства Александрова–Фенхеля для гиперболических форм. ДАН СССР, **274**, № 4, 1332–1334.
15. *Якубович В. А.* Аргументы на группе симплектических матриц. Матем. сб., **55**, вып. 3, 255–280 (1961).
16. *Якубович В. А.* Осцилляторные свойства решений канонических уравнений. Матем. сб., **56**, вып. 1, 3–42 (1962).
17. *Якубович В. А.* Неосцилляторность нелинейных периодических уравнений и смежные вопросы. Алгебра и анализ, **3**, вып. 5, 229–253 (1991).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
23 декабря 1997 г.