Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Юлмухаметов, О целых функциях с заданным асимптотическим поведением, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 50–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:33:05

УДК 517.574

О целых функциях с заданным асимптотическим поведением

© 1998. Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ

В данной работе рассматривается вопрос о существовании целых функций с наперед заданным поведением в бесконечности. Этот вопрос являлся объектом исследований многих авторов. В работах А. Пфлюгера и Б. Я. Левина были построены целые функции одной переменной, имеющие заданную индикатрису при заданном уточненном порядке. Для функций многих переменных аналогичные факты доказаны Мартино [10] и Кисельманом [9]. В 1969 г. В. С. Азарин [1] получил общий результат: для любой субгармонической функции u конечного порядка ρ существует целая функция f , удовлетворяющая соотношению

$$|u(z) - \ln |f(z)|| = o(|z|^\rho), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (*)$$

В дальнейшем в работах Ю. И. Мельника [7], М. Л. Содина, Ю. И. Любарского [8] и автора результат Азарина развивался в направлении уточнения асимптотики. В [2] показано, что целая функция f может быть построена так, чтобы в правой части формулы (*) можно было поставить $O(\ln |z|)$. Аналог теоремы Азарина в случае многих переменных доказан Сигурдсоном [3] и, независимо, автором [4]. Результат Сигурдсона с помощью теоремы Азарина (см. [5, теорема 4.2.2]) можно сформулировать так: для любой плюрисубгармонической функции u конечного порядка ρ существует целая функция f , для которой выполняется (*). В [4] показано, что при тех же условиях в (*) можно добиться точности $O(|z|^{4\rho/5})$.

Соотношения вида (*) выполняются лишь вне некоторых исключительных множеств, покрывающих особенности функций u и $\ln |f|$. Краткое обсуждение вопроса об оценке размеров этих исключительных множеств мы проведем в конце статьи.

Результаты о существовании целых функций с заданной асимптотикой находят применения в теории рядов экспонент, уравнениях свертки и др.

В данной работе предлагается принципиально новый метод построения целых функций с заданным поведением в бесконечности, и этот метод применяется для построения целой функции $F(\lambda)$, удовлетворяющей соотношениям

$$c\rho(\lambda)^s e^{u(\lambda)} \leq |F(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|)^k e^{u(\lambda)},$$

где u — заданная выпуклая функция в $\mathbb{C}^p$ с некоторыми дополнительными свойствами и $\rho(\lambda)$ — расстояние от точки λ до множества нулей функции F .

Этот результат по точности совпадает с наиболее точными результатами для функций одной переменной (см. [2]).

Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Пусть $v(t) \in C^2(\mathbb{C}^p)$ — строго выпуклая функция и

$$K(\lambda, z) = \int e^{\langle \lambda, t \rangle + \langle \bar{z}, \bar{t} \rangle - 2v(t)} dt, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^p,$$

где

$$\langle \lambda, t \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k.$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$e^{m|t| - 2v(t)} \left(\left| \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right| + 1 \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } |t| \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $\partial v(t)/\partial t = (\partial v(t)/\partial t_1, \dots, \partial v(t)/\partial t_p)$. Тогда

$$|K(\lambda, z)|^2 \leq \frac{1}{|\lambda - z|^4} \int e^{2 \operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} \Delta v(t) dt \int e^{2 \operatorname{Re} \langle z, t \rangle - 2v(t)} \Delta v(t) dt,$$

где $\Delta v(t)$ — оператор Лапласа от функции v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления ($\lambda_j \neq z_j$)

$$K(\lambda, z) = \int e^{2 \operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} \frac{\partial}{\partial \bar{t}_j} \frac{e^{\langle \bar{z} - \bar{\lambda}, \bar{t} \rangle}}{\bar{z}_j - \bar{\lambda}_j} dt$$

интегрированием по частям с учетом условия (1) получим

$$(\bar{z}_j - \bar{\lambda}_j) K(\lambda, z) = - \int e^{\langle \lambda, t \rangle + \langle \bar{z}, \bar{t} \rangle - 2v(t)} \frac{\partial}{\partial \bar{t}_j} (2 \operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)) dt.$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} |\bar{z}_j - \bar{t}_j|^2 K(\lambda, z) &= 2 \int e^{\langle \lambda, t \rangle + \langle \bar{z}, \bar{t} \rangle - 2v(t)} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_j \partial \bar{t}_j} dt \\ &\quad - \int e^{\langle \lambda, t \rangle + \langle \bar{z}, \bar{t} \rangle - 2v(t)} \left(z_j - 2 \frac{\partial v(t)}{\partial t_j} \right) \left(\bar{\lambda}_j - 2 \frac{\partial v(t)}{\partial \bar{t}_j} \right) dt. \end{aligned}$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$E(\zeta, t, v) = e^{2 \operatorname{Re} \langle \zeta, t \rangle - 2v(t)}.$$

Воспользуемся далее неравенством Коши–Буняковского:

$$|z_j - \lambda_j|^4 |K(\lambda, z)|^2 \leq 8 \int E(\lambda, t, v) \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_j \partial \bar{t}_j} dt \cdot \int E(z, t, v) \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_j \partial \bar{t}_j} dt \\ + 2 \int E(\lambda, t, v) \left| \lambda_j - 2 \frac{\partial v(t)}{\partial t_j} \right|^2 dt \cdot \int E(z, t, v) \left| z_j - 2 \frac{\partial v(t)}{\partial t_j} \right|^2 dt. \quad (2)$$

Поскольку

$$\int E(\lambda, t, v) \left| \lambda_j - 2 \frac{\partial v(t)}{\partial t_j} \right|^2 dt = \int \left(\bar{\lambda}_j - 2 \frac{\partial v(t)}{\partial \bar{t}_j} \right) \frac{\partial}{\partial t_j} E(\lambda, t, v) dt,$$

то, интегрируя по частям, с учетом условия (1) имеем

$$\int E(\lambda, t, v) \left| \lambda_j - \frac{\partial v(t)}{\partial t_j} \right|^2 dt = 2 \int E(\lambda, t, v) \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_j \partial \bar{t}_j} dt.$$

Подставляя это равенство в (2), получим

$$|z_j - \lambda_j|^2 |K(\lambda, z)| \leq 4 \left(\int E(\lambda, t, v) \frac{\partial^2 v}{\partial t_j \partial \bar{t}_j} dt \right)^{1/2} \left(\int E(z, t, v) \frac{\partial^2 v}{\partial t_j \partial \bar{t}_j} dt \right)^{1/2}.$$

Суммируя полученные неравенства по всем $j = 1, \dots, p$ и применив к правой части неравенство Коши–Буняковского, получим утверждение леммы 1.

Коротко напомним некоторые факты из теории выпуклых функций.

Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ — строго выпуклая функция. Введем обозначения

$$u'(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ U''(x) = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_m} \right), \quad v(y) = \sup_x ((x, y) - u(x)).$$

Из строгой выпуклости функции u следует положительность $\det U''(x)$, и по теореме об обратной функции отображение u' является локальным диффеоморфизмом. Если $x = x(y)$ — точка достижения супремума в определении функции v , то $u'(x(y)) \equiv y$ и, таким образом, $x(y) \in C^1$. Дифференцируя тождество $v(y) \equiv (y, x(y)) - u(x(y))$, получаем $x(y) \equiv v'(y)$, т.е. v' — отображение, обратное к u' , и $v \in C^2$. Матрица

$$V''(y) = \left(\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_k \partial y_m} \right)$$

обратна к матрице $U''(x(y))$; значит, если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $U''(x)$, то $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ — собственные числа матрицы $V''(y(x))$. Предположим, что для некоторого $\alpha > 1$ имеет место соотношение

$$0 < C_1(1 + |x|)^{\alpha-2} |a|^2 \leq (U''(x)a, a) \leq C_2(1 + |x|)^{\alpha-2} |a|^2, \quad x, a \in \mathbb{R}^n.$$

Выражение $f(x) \asymp g(x)$ в дальнейшем будет означать, что

$$0 < C_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq C_2, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Наше условие, принимающее вид

$$\frac{(U''(x)a, a)}{|a|^2} \asymp (1 + |x|)^{\alpha-2},$$

для функции v означает

$$\frac{(V''(y)a, a)}{|a|^2} \asymp (1 + |x(y)|)^{2-\alpha}.$$

Рассматривая сужение функции u на лучи, исходящие из начала координат, получим

$$u(x) \asymp (1 + |x|)^\alpha, \quad |u'(x)| \asymp (1 + |x|)^{\alpha-1}, \quad |v'(y)| \asymp (1 + |y|)^{\beta-1}, \quad (3)$$

где число β определяется из условия $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Таким образом,

$$\frac{(V''(y)a, a)}{|a|^2} \asymp (1 + |y|)^{\beta-2}, \quad \Delta v(y) \asymp (1 + |y|)^{\beta-2}. \quad (4)$$

ЛЕММА 2. Пусть $u(z) \in C^2(\mathbb{C}^p)$ — строго выпуклая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\frac{(U''(z)a, a)}{|a|^2} \asymp (1 + |z|)^{\alpha-2}, \quad a \in \mathbb{R}^{2p}, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

где $\alpha > 1$ — некоторое число. Положим

$$v(t) = \sup(\operatorname{Re} \langle z, \bar{t} \rangle - u(\bar{z})), \quad K(\lambda, z) = \int e^{\langle \lambda, t \rangle + \langle \bar{z}, \bar{t} \rangle - 2v(t)} dt, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^p;$$

тогда функция v удовлетворяет условиям леммы 1 и выполняется соотношение

$$\frac{|K(\lambda, z)|^2}{K(\lambda, \lambda)K(z, z)} \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^{2-\alpha}(1 + |z|)^{2-\alpha}}{| \lambda - z |^4}, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^p. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция v удовлетворяет оценке (1) в силу (3). Для доказательства неравенства (5) достаточно получить оценку

$$\int e^{2 \operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} \Delta v(t) dt \leq C_1(1 + |\lambda|)^{2-\alpha} K(\lambda, \lambda).$$

Зафиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Пусть $q > 0$. Заметим, что

$$u(z) = \sup_t (\operatorname{Re} \langle z, t \rangle - v(t)),$$

и положим

$$U(\lambda, q) = \{t \in \mathbb{C}^p : 2v(t) + 2u(\lambda) - 2\operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle < q\},$$

а через $\alpha_\lambda(q)$ обозначим $2p$ -мерный объем множества $U(\lambda, q)$. Как известно [6], $(\alpha_\lambda(q))^{1/2p}$ — возрастающая вогнутая функция. Поэтому $\alpha_\lambda(q) \leq \alpha_\lambda(1)q^{2p}$, когда $q > 1$. Интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} \int E(\lambda, t, v) e^{-2u(\lambda)} dt &= \int_0^\infty e^{-q} d\alpha_\lambda(q) = \int_0^\infty \alpha_\lambda(q) e^{-q} dq \\ &\leq \int_1^\infty \alpha_\lambda(1) e^{-q} q^{2p} dq + \int_0^1 \alpha_\lambda(1) e^{-q} dq \\ &\leq \alpha_\lambda(1) \int_0^\infty e^{-q} (1+q)^{2p} dq \leq \alpha_\lambda(1) (2p)! e. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int E(\lambda, t, v) e^{-2u(\lambda)} dt \geq \int_{U(\lambda, 1)} E(\lambda, t, v) e^{-2u(\lambda)} dt \geq e^{-1} \alpha_\lambda(1).$$

Таким образом, для любой выпуклой функции имеем оценку

$$e(2p)! \alpha_\lambda(1) \geq \int e^{2\operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t) - 2u(\lambda)} dt \geq e^{-1} \alpha_\lambda(1). \quad (6)$$

Из (4) следует, что при достаточно большом M функция

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \frac{\beta - 2}{2} \ln(|t|^2 + M)$$

выпукла в $\mathbb{R}^{2p}$ и также удовлетворяет соотношениям из (4). Положим $\tilde{u}(z) = \sup(\operatorname{Re} \langle z, t \rangle - \tilde{v}(t))$. В силу (4) имеем

$$\begin{aligned} \int e^{2\operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} \Delta v(t) dt &\leq C_1 \int (|t| + M)^{\beta-2} e^{2\operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} dt \\ &\leq C_1 \int e^{2\operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2\tilde{v}(t)} dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (6), примененного к паре $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, вытекает неравенство

$$\int e^{2\operatorname{Re} \langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} \Delta v(t) dt \leq C_2 e^{\tilde{u}(\lambda)} \tilde{\alpha}_\lambda(1),$$

где $\tilde{\alpha}_\lambda(1)$ есть $2p$ -мерный объем множества

$$\tilde{V}(\lambda, 1) = \{t : 2\tilde{v}(t) + 2\tilde{u}(\lambda) - 2\operatorname{Re}\langle \lambda, t \rangle < 1\}.$$

Поэтому

$$\int e^{2\operatorname{Re}\langle \lambda, t \rangle - 2v(t)} \Delta v(t) dt \leq C_2 e \int_{\tilde{V}(\lambda, 1)} e^{2\operatorname{Re}\langle \lambda, t \rangle - 2\tilde{v}(t)} dt. \quad (7)$$

Пусть $t = \tilde{t}(\lambda)$ — точка, для которой $\tilde{u}(\lambda) = \operatorname{Re}\langle \lambda, t \rangle - \tilde{v}(t)$. Как уже отмечалось, при этом $\lambda = 2\partial\tilde{v}(\tilde{t}(\lambda))/\partial t$. Следовательно,

$$\tilde{V}(\lambda, 1) = \left\{ t : \tilde{v}(t) - \tilde{v}(\tilde{t}(\lambda)) - 2\operatorname{Re}\left\langle \frac{\partial\tilde{v}(\tilde{t}(\lambda))}{\partial t}, t - \tilde{t}(\lambda) \right\rangle < \frac{1}{2} \right\}.$$

По формуле Тейлора

$$\tilde{v}(t) - \tilde{v}(\tilde{t}(\lambda)) - 2\operatorname{Re}\left\langle \frac{\partial\tilde{v}(\tilde{t}(\lambda))}{\partial t}, t - \tilde{t}(\lambda) \right\rangle = \frac{1}{2} (\tilde{V}''(\tau)(t - \tilde{t}(\lambda)), t - \tilde{t}(\lambda));$$

здесь τ — точка между t и $\tilde{t}(\lambda)$, а $t - \tilde{t}(\lambda)$ рассматривается как элемент из $\mathbb{R}^{2p}$. По выбору числа M для функции $\tilde{v}$ выполняются соотношения (4). В силу этого для точек t , лежащих на сфере $|t - \tilde{t}(\lambda)| = x(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{1-\beta/2}$, справедлива оценка

$$(\tilde{V}''(\tau)(t - \tilde{t}(\lambda)), t - \tilde{t}(\lambda)) \asymp x^2(1 + |\tau|)^{\beta-2}(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{2-\beta}.$$

Заметим, что $|\tau|/|\tilde{t}(\lambda)| \rightarrow 1$ при фиксированном x . Это значит, что существуют числа $0 < x_1 < x_2 < \infty$, такие, что выпуклое множество $\tilde{V}(\lambda, 1)$ удовлетворяет включениям

$$B(\tilde{t}(\lambda), x_1(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{1-\beta/2}) \subset \tilde{V}(\lambda, 1) \subset B(\tilde{t}(\lambda), x_2(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{1-\beta/2}). \quad (8)$$

Отсюда и из (7) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int E(\lambda, t, v) \Delta v(t) dt &\leq C \int_{B(\tilde{t}(\lambda), x_2(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{1-\beta/2})} E(\lambda, t, \tilde{v}) dt \\ &\leq C(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{1-\beta/2} \int E(\lambda, t, v) dt \\ &= C(1 + |\tilde{t}(\lambda)|)^{1-\beta/2} K(\lambda, \lambda). \end{aligned}$$

Так как $\tilde{v}'(\tilde{t}(\lambda)) = \lambda$, то из оценки (3), примененной к функции $\tilde{v}$, имеем

$$|\tilde{t}(\lambda)|^{\beta-1} \leq C|\lambda|.$$

Следовательно,

$$\int E(\lambda, t, v) \Delta v(t) dt \leq C(|\lambda| + 1)^{(\beta-2)/(\beta-1)} K(\lambda, \lambda) = C(|\lambda| + 1)^{2-\alpha} K(\lambda, \lambda).$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in C^2(\mathbb{C}^p)$ — строго выпуклая функция, удовлетворяющая условию леммы 2. Тогда существует целая функция $F(\lambda)$, которая для некоторых постоянных A_1, A_2 , s удовлетворяет соотношению

$$A_1(\rho_0(\lambda))^s e^{u(\lambda)} \leq |F(\lambda)| \leq A_2(1 + |\lambda|)^{(\alpha-2)p^2} e^{u(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

где

$$\rho_0(\lambda) = \min \left\{ \frac{1}{1 + |\lambda|}, \inf_{z: F(z)=0} |\lambda - z| \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в пространстве $\mathbb{C}^p$ систему точек z_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

(C1) шары $B(z_k, d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2})$ попарно не пересекаются;

(C2) шары $B(z_k, 4d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2})$ покрывают все пространство.

Число d будет выбрано ниже. Через v обозначим функцию, сопряженную по Юнгу с функцией $u(\bar{\lambda})/(2p)$, и определим функцию $K(\lambda, z)$, как в лемме 2. Положим

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\lambda, z_k)^{2p}}{K(z_k, z_k)^p}.$$

Зафиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}^p$ и через $I(\lambda)$ обозначим множество индексов k , для которых

$$|\lambda - z_k| \geq 2d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2}.$$

Так как функция $|\lambda - z|^{-4p}$ субгармонична по z в $\mathbb{C}^p \setminus \{\lambda\}$, то по утверждению леммы 2 для $k \in I(\lambda)$ выполняется неравенство

$$\frac{|K(\lambda, z_k)|^{2p}}{K(z_k, z_k)^p K(\lambda, \lambda)^p} \leq \frac{C^p(1 + |\lambda|)^{p(2-\alpha)}}{w_p d^{2p}} \int_{B(z_k, d(1+|z_k|)^{1-\alpha/2})} \frac{dw(z)}{|\lambda - z|^{4p}},$$

где w_p — объем единичного шара в $\mathbb{C}^p$. Суммируя эти неравенства, получим, что

$$\sum_{I(\lambda)} \frac{|K(\lambda, z_k)|^{2p}}{K(z_k, z_k)^p K(\lambda, \lambda)^p} \leq \frac{C^p(1 + |\lambda|)^{p(2-\alpha)}}{w_p d^{2p}} \int_{|\lambda - z| \geq dq(1+|z|)^{1-\alpha/2}} \frac{dw(z)}{|\lambda - z|^{4p}},$$

где q — достаточно маленькое число, зависящее только от d и $\alpha > 1$. Отсюда вытекает оценка

$$\sum_{k \in I(\lambda)} \frac{|K(\lambda, z_k)|^{2p}}{K(z_k, z_k)^p} \leq \frac{C^p}{2p d^{4p} q^{2p}} K(\lambda, \lambda)^p. \quad (9)$$

В силу условия (C1) количество индексов k , не лежащих в $I(\lambda)$, конечно, причем ограничено числом $N = N(\alpha, p)$, не зависящим от λ . Поскольку

$$|K(\lambda, z)|^2 \leq K(\lambda, \lambda)K(z, z),$$

то

$$\sum_{k \notin I(\lambda)} \frac{|K(\lambda, z_k)|^{2p}}{K(z_k, z_k)^p} \leq N(\alpha, p) K(\lambda, \lambda)^p.$$

Таким образом, получаем верхнюю оценку

$$|F(\lambda)| \leq CK(\lambda, \lambda)^p, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \quad (10)$$

Так же, как и неравенство (9), для любого $m \in \mathbb{N}$ может быть получена оценка

$$\sum_{k \neq m} \frac{|K(z_m, z_k)|^{2p}}{K(z_k, z_k)^p} \leq \frac{C^p}{2pd^{4p}} K(z_m, z_m)^p,$$

где постоянная C не зависит от m . Выберем число d так, чтобы $C^p/(2pd^{4p}) = 1/2$. Тогда

$$|F(z_m)| \geq K(z_m, z_m)^p - \sum_{k \neq m} \frac{|K(z_m, z_k)|^{2p}}{K(z_k, z_k)^p} \geq \frac{1}{2} K(z_m, z_m)^p. \quad (11)$$

Из соотношения (6) следует, что

$$K(\lambda, \lambda) \asymp e^{u(\lambda)/p} \alpha_\lambda(1),$$

где $\alpha_\lambda(1)$ есть $2p$ -мерный объем множества

$$V(\lambda, 1) = \{t : 2v(t) + p^{-1}u(\lambda) - 2\operatorname{Re}\langle \lambda, t \rangle < 1\}.$$

Из неравенства (8) видно, что

$$\alpha_\lambda(1) \asymp |t(\lambda)|^{(2-\beta)p} \asymp |u'(\lambda)|^{(2-\beta)p} \asymp |\lambda|^{(\alpha-2)p}.$$

Таким образом, оценки (10) и (11) означают выполнение условий

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &\leq C(1 + |\lambda|)^{(\alpha-2)p^2} e^{u(\lambda)}, & \lambda \in \mathbb{C}^p, \\ |F(\lambda)| &\geq c(1 + |\lambda|)^{(\alpha-2)p^2} e^{u(\lambda)}, & \lambda = z_m, m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. По ходу доказательства мы воспользовались тем, что для некоторого $q = q(\alpha, d)$ имеет место включение

$$\bigcup_{k \in I(\lambda)} B(z_k, d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2}) \subset \mathbb{C}^n \setminus B(\lambda, dq(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2}).$$

Чтобы убедиться в этом, возьмем точку w из объединения шаров в левой части. Это значит, что для некоторого j имеют место соотношения

$$|\lambda - z_j| \geq 2d(1 + |z_j|)^{1-\alpha/2}, \quad |w - z_j| \leq d(1 + |z_j|)^{1-\alpha/2}.$$

1) Пусть $\alpha \leq 2$; тогда, поскольку

$$|w - \lambda| \geq |z_j - \lambda| - |z_j - w| \geq d(1 + |z_j|)^{1-\alpha/2}, \quad (**)$$

то для z_j , $|z_j| \geq |\lambda|/2$,

$$|w - \lambda| \geq dq_1(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2},$$

где

$$q_1 = \inf \left\{ \left(\frac{1 + |z_j|}{1 + |\lambda|} \right)^{1-\alpha/2}, j \in I(\lambda), |z_j| \geq \frac{|\lambda|}{2} \right\} > 0.$$

Для $|z_j| \leq |\lambda|/2$ и для рассматриваемого w имеем

$$|w| \leq |z_j| + d(1 + |z_j|)^{1-\alpha/2} \leq \frac{|\lambda|}{2} + d \left(1 + \frac{|\lambda|}{2} \right)^{1-\alpha/2}.$$

Поэтому

$$|w - \lambda| \geq |\lambda| - |w| \geq |\lambda|/2 - d(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2}.$$

Так как $1 - \alpha/2 < 1$, то отсюда видно, что

$$|w - \lambda| \geq d(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2}, \quad |\lambda| \geq R = R(\alpha, d).$$

Наконец, для λ , $|\lambda| \leq R$, из (**) получим

$$\frac{|w - \lambda|}{d(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2}} \geq \frac{1}{(1 + R)^{1-\alpha/2}} = q_2.$$

Остается положить $q = \min(q_1, q_2, 1)$.

2) Пусть $\alpha > 2$. Воспользуемся (**) и для z_j , $|z_j| \leq 2(|\lambda| + d)$, получим

$$|w - \lambda| \geq dq_1(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2},$$

где

$$q_1 = \inf \left\{ \left(\frac{1 + |z_j|}{1 + |\lambda|} \right)^{1-\alpha/2}, j \in I(\lambda), |z_j| \leq 2(|\lambda| + d) \right\} > 0.$$

Для $|z_j| > 2(|\lambda| + d)$ и для рассматриваемого w имеем

$$|w| \geq |z_j| - d(1 + |z_j|)^{1-\alpha/2} \geq |z_j| - d \geq 2|\lambda| + d.$$

Поэтому

$$|w - \lambda| \geq |w| - |\lambda| \geq |\lambda| + d \geq d \geq d(1 + |\lambda|)^{1-\alpha/2}.$$

Положим $q = \min(q_1, 1)$.

ЛЕММА 3. Пусть функция f голоморфна в круге $|\zeta| < 4$ и

$$\ln |f(\zeta)| \leq M, \quad |\zeta| < 4, \quad \ln |f(0)| \geq m.$$

Тогда существуют постоянные $C = C(M, m)$ и $s = s(M, m)$, такие, что выполняется соотношение

$$|f(\zeta)| \geq C\rho(\zeta)^s,$$

где $\rho(\zeta)$ — расстояние от точки ζ до множества нулей функции f .

Доказательство этой леммы, основанное на лемме Гельмгольца, проводится стандартными рассуждениями.

По условию теоремы для любых z_k и $z \in B(z_k, 16d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2})$ имеем оценку

$$|u(z) - u(z_k) - 2 \operatorname{Re} \langle \partial u(z_k) / \partial z, z - z_k \rangle| = \frac{1}{2} (U''(z')(z - z_k), z - z_k) \leq \operatorname{const},$$

где const не зависит от индекса k . Рассмотрим функции

$$\tilde{F}_k(\lambda) = F(\lambda)(1 + |z_k|)^{(2-\alpha)p^2} \exp(-u(z_k) - 2 \operatorname{Re} \langle \partial u(z_k) / \partial z, z - z_k \rangle).$$

Из соотношения (12) следует, что функции

$$f_k(\zeta) = \tilde{F}_k(z_k + 2\zeta\omega d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2}), \quad |\zeta| \leq 4,$$

где $\omega \in \mathbb{C}^p$, $|\omega| = 1$, удовлетворяют условиям леммы 3, причем постоянные M , m можно выбрать не зависящими от индекса k . Поэтому имеют место оценки

$$|\tilde{F}_k(\lambda)| \geq C\rho(\lambda)^s, \quad \lambda \in B(z_k, 4d(1 + |z_k|)^{1-\alpha/2}).$$

Отсюда и из условия (C2) следуют требуемые нижние оценки.

Теорема 1 доказана.

В заключение приведем результат теоремы 1 в привычном виде, а именно как асимптотическое соотношение типа (*), и получим некоторые оценки возникающих исключительных множеств.

ЛЕММА 4. Функция $F(\lambda)$ в теореме 1 удовлетворяет соотношению

$$|u(\lambda) - \ln |F(\lambda)|| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \notin E. \quad (13)$$

При этом исключительное множество E может быть покрыто шарами $B(\lambda_k, r_k)$ таким образом, что

$$\sum_k r_k^{2p-1} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из (3), функция $u(\lambda)$ имеет порядок роста α , т. е. $u(\lambda) \leq \text{const}(|\lambda| + 1)^\alpha$. Следовательно, для $\ln |F(\lambda)|$ имеем такую же верхнюю оценку:

$$\ln |F(\lambda)| \leq \text{const}(|\lambda| + 1)^\alpha.$$

Пусть $\mu(t)$ есть $(2p-1)$ -мерный объем дивизора функции F в шаре $B(0, t)$. Из верхней оценки функции F получим (см. [11])

$$\mu(t) \leq \text{const}(|\lambda| + 1)^{2p+\alpha-1}. \quad (14)$$

Положим

$$S_n = \{z : F(z) = 0, 2^n < |z| \leq 2^{n+1}\}.$$

Возьмем некоторое $\gamma < 0$. По лемме Хеймана о покрытиях [12] можно выбрать точки $z_1, \dots, z_m$ из множества S_n так, чтобы шары

$$B(z_k, 2^{n\gamma}), \quad k = 1, \dots, m,$$

покрывали множество S_n и каждая точка пространства попадала не более чем в κ_p шаров, где κ_p зависит лишь от размерности p . Положим

$$E_n = \bigcup_{k=1}^m B(z_k, 2^{n\gamma}),$$

и пусть $|E_n|$ обозначает объем множества E_n . Очевидно, что

$$2^{2pn\gamma} m \leq \text{const} \kappa_p |E_n| \leq \text{const} 2^{2n\gamma} |S_n|,$$

где $|S_n|$ есть $(2p-2)$ -мерный объем множества S_n . Отсюда, учитывая оценку (14), получим

$$(2^{n\gamma})^{2p-1} m \leq \text{const} 2^{n\gamma} 2^{n(2p+\alpha-1)}.$$

Далее положим $\gamma = -(2p + \alpha)$:

$$(2^{n\gamma})^{2p-1} m \leq \text{const} 2^{-n}, \quad (15)$$

причем const не зависит от n . Если теперь мы рассмотрим множества

$$E'_n = \bigcup_{k=1}^m B(z_k, 2^{n\gamma+1}),$$

где точки $z_1, \dots, z_m$ для каждого n выбраны так, как изложено выше, то множество

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E'_n$$

в силу (15) удовлетворяет условиям леммы 4. Ясно также, что вне множества E функция F удовлетворяет соотношению (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции. Матем. сб., **79**, No. 4, 463–476 (1969).
2. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций. Anal. Math., **11**, 257–282 (1985).
3. *Sigurdsson R.* Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order. Lund University, 1984.
4. *Юлмухаметов Р. С.* Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности. Изв. РАН, сер. матем., **60**, № 4, 205–224 (1996).
5. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. Матем. сб., **108 (150)**, № 3, 147–167 (1979).
6. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Наука, М., 1969.
7. *Мельник Ю. И.* О представлении функций рядами Дирихле в замкнутом круге. Матем. сб., **97**, № 4, 493–502 (1975).
8. *Любарский Ю. И., Седин М. Л.* Аналог функции типа синуса для выпуклых областей. ФТИНТ АН УССР, Харьков, **17**, 42–52 (1986).
9. *Kiselman C. O.* On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals. Acta Math., **117**, 1–35 (1967).
10. *Martineau A.* Indicatrices de croissance des fonctions entieres de N -variables. Invent. Math., **2**, № 1, 81–86 (1966).
11. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. Наука, М., 1971.
12. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. Наука, М., 1966.

Башкирский государственный университет,
математический факультет
email: yavdat@bgua.bashkiria.su

Поступило в редакцию
27 марта 1996 г.