Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Березанский, Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связанного с операторами обобщенного сдвига, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 65–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:34:26

где (a_i^*) — перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^\infty$ в убывающем порядке.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 2 и 3 усиливают результаты работы [2], где аналогичные утверждения были получены для пространств последовательностей F , удовлетворяющих более ограничительным условиям. Так, например, нетрудно показать, что норма оператора растяжения

$$\sigma_n a = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_n, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_n, \dots)$$

в пространстве $l_1(\ln)$ (см. пример 2) равна n . Поэтому условие (11) из [2] для этого пространства не выполнено, и, значит, к нему не применимы имеющиеся там теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы 1–3 легко переносятся на лакунарные тригонометрические ряды с помощью результатов [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
2. Rodin V. A., Semenov E. M. Analysis Math., **1**, No. 3, 207–222 (1975).
3. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, М., 1980.
4. Wallsten R. Lect. Notes Math., Vol. 1302, 410–419 (1988).
5. Родин В. А., Семенов Е. М. Функци. анализ и его прил., **13**, вып. 2, 91–92 (1979).
6. Montgomery-Smith S. Proc. Am. Math. Soc., **109**, No. 2, 517–522 (1990).
7. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.
8. Calton N. J. Calderon couples of rearrangement invariant spaces. Preprint, 1993.
9. Jakubowski J., Kwapien S. Bull. Polish Acad. Sci. Math., **27**, No. 9, 689–694 (1979).

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.emnet.ru

Поступило в редакцию
7 октября 1996 г.

УДК 517.515

Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связанного с операторами обобщенного сдвига*

© 1998. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

Пуассонов бесконечномерный анализ, т. е. аналог классического анализа белого шума в том случае, когда мера, задающая спаривание, является не гауссовой, а пуассоновой, был построен и изучался в ряде работ [1–3]. В [4, 5] автор предложил общую схему построения бесконечномерного анализа, осно-

* Работа частично поддержана ДФФД Украины, грант 1.4/62.

ванную на понятии оператора обобщенного сдвига. В заметке показывается, что пуассонов анализ вкладывается в эту общую схему. Она приводит также к ряду новых фактов в пуассоновом анализе, связанных с понятием характеров Дельсарта. В доказательствах существенно используется спектральный подход [6, 7]. Для простоты мы рассматриваем лишь пуассонову меру с интенсивностью, равной лебеговой мере на оси. Отметим, что последних исследований по пуассонову анализу [8], связанных с геометрией пуассонова пространства, мы в этой заметке не касаемся.

1. Рассмотрим классическую вещественную цепочку $\mathcal{S}'_{\text{Re}} \supset L^2_{\text{Re}} \supset \mathcal{S}_{\text{Re}}$, где $L^2_{\text{Re}} =: N_{0,\text{Re}}$ построено по лебеговой мере dt на оси $\mathbb{R}^1$, а $\mathcal{S}_{\text{Re}}$ — пространство Шварца; соответствующее спаривание будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Мера Пуассона π на $\mathcal{S}'_{\text{Re}}$ с интенсивностью dt определяется в силу теоремы Минлоса своим преобразованием Фурье

$$\int_{\mathcal{S}'_{\text{Re}}} e^{i\langle \lambda, \xi \rangle} d\pi(\xi) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1 \rangle, \quad \lambda \in \mathcal{S}_{\text{Re}}, \quad \pi(\mathcal{S}'_{\text{Re}}) = 1. \quad (1)$$

Меру π можно сузить на гильбертово пространство и понимать ее как вероятностную меру на негативном пространстве $N_{-1,\text{Re}} \subset \mathcal{S}'_{\text{Re}}$ вещественной цепочки $N_{-1,\text{Re}} \supset N_{0,\text{Re}} \supset N_{1,\text{Re}}$, где $N_{1,\text{Re}} = W^2_{2,\text{Re}}(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^2 dt)$ — соболевское пространство с весом ($N_{-1,\text{Re}}$ — пространство полной меры π , так как $N_{1,\text{Re}} \hookrightarrow N_{0,\text{Re}}$ — вложение Гильберта–Шмидта и правая часть в (1) непрерывна относительно $\lambda \in N_{1,\text{Re}}$; см. [9, Ch. 1, §3, п. 8]).

Более того, нам удобно сузить π до вероятностной меры на множестве специальных обобщенных функций из $N_{-1,\text{Re}}$ — кратных конфигураций. Под такой конфигурацией x будем понимать множество пар $x = \{(t_1, \nu_1), (t_2, \nu_2), \dots\}$, где $t_1, t_2, \dots$ — не более чем счетное множество различных точек из $\mathbb{R}^1$, конечное на каждом конечном интервале, а $\nu_k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ — «кратность» вхождения точки t_k в x , $(t_k, 0) = \emptyset$. Каждую кратную конфигурацию x можно отождествить с обобщенной функцией $x \in \mathcal{D}'_{\text{Re}} \supset \mathcal{S}'_{\text{Re}} \supset N_{-1,\text{Re}}$ ($\mathcal{D}_{\text{Re}} = C^\infty_{0,\text{Re}}(\mathbb{R}^1)$), если положить $x = \sum_{k=1}^\infty \nu_k \delta_{t_k}$, где δ_t есть δ -функция, сосредоточенная в точке t . Ясно, что δ_t является примером кратной конфигурации.

Обозначим через Q совокупность всех кратных конфигураций x , входящих в $N_{-1,\text{Re}}$. Норма в $N_{-1,\text{Re}}$ индуцирует метрику в Q и превращает Q в метрическое сепарабельное полное пространство. На σ -алгебре борелевских множеств из Q определена мера π как сужение этой меры с $N_{-1,\text{Re}}$. Пространство Q будет пространством полной меры, т.е. $\pi(Q) = 1$ (это следует из того, что меньшее множество обычных конфигураций, т.е. точек x , для которых $\nu_1 = \nu_2 = \dots = 1$, является множеством полной меры; см., например, [8]).

Таким образом, определено пространство Q и пуассонова мера π на нем. Ниже будут рассматриваться пространства основных и обобщенных функций переменной $x \in Q$ с комплексным спариванием относительно π , т.е. относительно $(L^2) := L^2(Q, d\pi(x))$. Всюду используется терминология и результаты заметки [4] (и ее подробного изложения [5]).

2. Для введения операторов обобщенного сдвига заметим, что Q является коммутативной полугруппой с операцией сложения $+$, индуцированной сложением в $N_{-1, \text{Re}} \supset Q$; ее базисной единицей e служит $\emptyset$ (иными словами, $Q \times Q \ni \{x, y\} \mapsto x + y := x \cup y \in Q$, при этом кратности складываются для каждой общей точки t_k , фигурирующей в x и y).

В линейном пространстве $C(Q)$ всех комплекснозначных локально ограниченных непрерывных функций $f(x)$ на Q введем оператор обобщенного сдвига T_x для $x \in Q$, полагая $(T_x f)(y) = f(y + x)$, $y \in Q$. Очевидно, что все требования на семейство $T = \{T_x\}_{x \in Q}$ будут выполняться.

3. Роль пространств N_p комплексной цепочки $N_{-p} \supset N_0 \supset N_p$, $p \in \mathbb{N}$, в построениях [4, 5] будут играть соболевские пространства $N_p := W_2^{1+p}(\mathbb{R}^1, (1 + t^2)^{1+p} dt)$. Вложение $N_2 \hookrightarrow N_1$ будет вложением Гильберта–Шмидта согласно [9]; пространство $N_p^{\widehat{\otimes} n}$ состоит из симметрических функций $f^n(t_1, \dots, t_n)$, $t_k \in \mathbb{R}^1$, с достаточной гладкостью и убыванием на ∞ .

В качестве характеров примем функции

$$Q \ni x \mapsto \chi(x, \lambda) = \exp \langle x, \log(1 + \lambda) \rangle \in \mathbb{C}^1, \quad (2)$$

зависящие от параметра $\lambda \in B_1 = \{\lambda \in N_1 : \|\lambda\|_{N_1} \leq R_1\}$, где $R_1 > 0$ достаточно мало. Поясним, что справедлива оценка $(1 + t^2)^{1/2} |\lambda(t)| \leq c_1 \|\lambda\|_{N_1}$, $t \in \mathbb{R}^1$, с некоторым $c_1 > 0$ [9]. Поэтому $1 + \lambda(t) \neq 0$ при достаточно малой $\|\lambda\|_{N_1}$ и формула (2) имеет смысл, а функция $\chi(x, \lambda)$ является аналитической относительно λ и локально ограниченной относительно x . Таким образом, для каждого $x \in Q$ справедливо разложение в ряд при достаточно малом $R_2 > 0$:

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle, \quad \lambda \in B_2 = \{\lambda \in N_2 : \|\lambda\|_{N_2} \leq R_2\}, \quad (3)$$

где $Q \ni x \mapsto \chi_n(x) \in N_{-2, \text{Re}}^{\widehat{\otimes} n} \subset N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}$ — характеры Дельсарта. Эти характеры несложно подсчитываются; они являются сужением на Q некоторых полиномов переменной $x \in N_{-2, \text{Re}} \supset Q$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива следующая оценка: существует $C > 0$, такое, что*

$$\|\chi_n(\cdot)\|_{N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}} \leq C^n n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

Элементарные функции $Q \ni x \mapsto \langle a^n, \chi_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$ при $a^n \in N_2^{\widehat{\otimes} n}$ (входящие в силу (4) в (L^2)) линейно независимы, образуют в требуемом смысле минимальную систему, и их линейная оболочка плотна в (L^2) .

4. Для введения «классических» характеров Аппеля рассмотрим функцию

$$Q \ni x \mapsto \sigma(x, \lambda) = \exp(\langle x, \log(1 + \lambda) \rangle - \langle 1, \lambda \rangle) = \chi(x, \lambda)(\widehat{\pi}(\lambda))^{-1} \in \mathbb{C}^1,$$

$$\widehat{\pi}(\lambda) = \int_Q \chi(x, \lambda) d\pi(x) = \exp \langle 1, \lambda \rangle.$$

Она аналитична относительно $\lambda \in N_1$ в той же области, что и $\chi(x, \lambda)$, и поэтому допускает разложение

$$\sigma(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle, \quad \lambda \in B_2, \quad (5)$$

подобное (3). Его коэффициенты $Q \ni x \mapsto P_n(x) \in N_{-2, \text{Re}}^{\widehat{\otimes} n} \subset N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}$ (т.е. характеры Аппеля) в данном случае носят название (обобщенных) полиномов Шарлье. Для них сохраняется оценка типа (4). Более того, она усиливается: в действительности $P_n(x) \in N_{-1, \text{Re}}^{\widehat{\otimes} n} \subset N_{-1}^{\widehat{\otimes} n}$, $x \in Q$, и для некоторого $D > 0$

$$\| \| P_n(\cdot) \|_{N_{-1}^{\widehat{\otimes} n}} \|_{(L^2)} \leq D^n \sqrt{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (6)$$

5. Таким образом, сейчас возможно построение пространств основных и обобщенных функций по характерам Аппеля (т.е. по полиномам Шарлье) и Дельсарта и соответствующего пуассонова анализа. Так, позитивное пространство $H^P(p, q)$, построенное по полиномам Аппеля, имеет вид

$$H^P(p, q) = \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a^n, P_n(x) \rangle, a^n \in N_p^{\widehat{\otimes} n} \mid \|\varphi\|_{H^P(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|_{N_p^{\widehat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}, \quad (7)$$

где фиксированы $p \in \mathbb{N}_1 := \{2, 3, \dots\}$, $q \in \mathbb{N}$ и достаточно большое $K > 1$. Аналогично строится пространство $H^\chi(p, q)$: нужно в (7) заменить P_n на χ_n .

Оператор уничтожения $\partial(\alpha^m)$, $\alpha^m \in N_{-p}^{\widehat{\otimes} m}$, где $m \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in \mathbb{N}_1$ [4, 5], в пуассоновом анализе легко подсчитывается. В самом деле, для финитного $a^m \in N_p^{\widehat{\otimes} m}$ введем на функциях $f \in C(Q)$ разностную операцию

$$(\mathcal{L}(a^m) f(\cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}^m} (\mathcal{L}(\delta_{t_1}) \cdots \mathcal{L}(\delta_{t_m}) f(\cdot))(x) a^m(t_1, \dots, t_m) dt_1 \cdots dt_m, \quad (8)$$

$$(\mathcal{L}(\delta_t) f(\cdot))(x) = f(x + \delta_t) - f(x) \quad (x \in Q, t \in \mathbb{R}^1).$$

Применяя (8) к характеру (2), убеждаемся, что

$$(\mathcal{L}(a^m) \chi(\cdot, \lambda))(x) = \langle a^m, \lambda^{\otimes m} \rangle \chi(x, \lambda)$$

для $x \in Q$ и $\lambda \in B_1$. Таким образом, сейчас T_x является сдвигом Тейлора–Дельсарта, и поэтому для финитных $a^m \in N_p^{\widehat{\otimes} m}$

$$\partial(a^m) = \mathcal{L}(a^m) \quad (p \in \mathbb{N}_1, m \in \mathbb{Z}_+). \quad (9)$$

Наконец, оператор, заданный формулами (9), (8), по непрерывности распространяется до оператора $\partial(\alpha^m)$ при $\alpha^m \in N_{-p}^{\widehat{\otimes} m}$, действующего в пространствах $H^\chi(p, q)$ и $H^P(p, q)$ ($p \in \mathbb{N}_1$, $q \in \mathbb{N}$).

ТЕОРЕМА 2. *Результаты по бесконечномерному анализу, содержащиеся в [4, 5], справедливы для пуассонова анализа с введенным выше пространством Q , пуассоновой мерой $\rho = \pi$, сдвигом $(T_x f)(y) = f(y + x)$ ($x, y \in Q$) и характеристиками Дельсарта и Анпеля, задающимися разложениями (3), (5). Оператор $\partial(\alpha^m)$ ($\alpha^m \in N_{-p}^{\widehat{\otimes} m}$, $p \in \mathbb{N}_1$, $m \in \mathbb{Z}_+$) имеет вид (9), (8).*

При этом характеры $P_n(x)$ и кохарактеры $Q(\alpha^n)$ Анпеля сейчас совпадают в том смысле, что $Q(a^n) \in C(Q)$ при $a^n \in N_p^{\widehat{\otimes} n}$, $p \in \mathbb{N}_1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и справедливо равенство $(Q(a^n))(x) = \langle a^n, P_n(x) \rangle$, $x \in Q$.

Таким образом, полиномы Шарлье удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_Q \langle a^n, P_n(x) \rangle \overline{\langle b^m, P_m(x) \rangle} d\pi(x) = \delta_{n,m} n! \langle a^n, \bar{b}^m \rangle$$

$$(a^n \in N_p^{\widehat{\otimes} n}, b^m \in N_r^{\widehat{\otimes} m}, p, r \in \mathbb{N}_1, n, m \in \mathbb{Z}_+),$$

и для них справедлива формула $\langle a^n, P_n(\cdot) \rangle = \partial^+(\bar{a}^n)1$, где $+$ означает сопряжение относительно пространства (L^2) .

6. Для доказательства теорем 1, 2 существенную роль играет спектральный подход к пуассонову анализу [6, 7], заключающийся в следующем.

В симметричном пространстве Фока $\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(H)$, $H = L_{\text{Re}}^2 = N_{0, \text{Re}}$, рассматривается якобиево поле самосопряженных коммутирующих операторов $A = (A(\varphi))_{\varphi \in \mathcal{S}_{\text{Re}}}$, $A(\varphi) = A_0(\varphi) + B(\varphi) + \langle \varphi, 1 \rangle \text{Id}$, где $A_0(\varphi)$ — классический полевой оператор, а $B(\varphi)$ — его возмущение диагональным оператором, равным вторичному квантованию оператора умножения на φ в пространстве L^2 .

Преобразование Фурье по обобщенным совместным собственным векторам семейства A имеет вид [7]

$$\mathcal{F}(H) \supset \mathcal{F}(H_1, p) \ni f = (f^n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f^n, \mathcal{P}_n(x) \rangle \in (L^2), \quad (10)$$

где $\mathcal{F}(H_1, p)$ — взвешенное посредством некоторого веса p пространство Фока, построенное по $H_1 = N_{1, \text{Re}} \subset H$, а $(\mathcal{P}_n(x))_{n=0}^{\infty}$ — связанная с A последовательность «ортонормированных» полиномов первого рода $Q \ni x \mapsto \mathcal{P}_n(x) \in N_{-1}^{\widehat{\otimes} n} \subset N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}$. Спектральной мерой поля A служит мера π на Q . Отображение (10) после замыкания по непрерывности превращается в изометрию между $\mathcal{F}(H)$ и (L^2) .

Справедливо равенство $P_n(x) = \sqrt{n!} \mathcal{P}_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in Q$ (с его помощью устанавливается (6) и теорема 1). Полагая $a^n = (n!)^{-1/2} f^n$, получим, что (10) определяет изометрию $\mathcal{U}$ между пространством Фока $F(H)$ с нормой $\|a\|_{F(H)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|_{N_0^{\widehat{\otimes} n}}^2 n!$ и пространством (L^2) функций $(\mathcal{U}a)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a^n, P_n(x) \rangle$. Беря различные оснащения такого пространства Фока и рассматривая их $\mathcal{U}$ -образы, получим оснащения пространства (L^2) ((7) — пример такого оснащения).

Отметим, что операторы $\partial(a^1)$ и $\partial^+(a^1)$ являются $\mathcal{U}$ -образами классических операторов уничтожения и рождения, порожденных вектором $a^1 \in H$, но записанных в терминах $F(H)$, а не $\mathcal{F}(H)$.

Автор благодарен профессору Г. Ф. Усу и доктору Н. А. Качановскому за обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ito Y. Probab. Theory Related Fields, **77**, 1–28 (1988).
2. Ito Y., Kubo I. Nagoya Math. J., **111**, 41–84 (1988).
3. Kondratiev Yu. G., da Silva J. L., Streit L., Us G. F. Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. Related Topics, **1**, No. 1, 91–117 (1998).
4. Березанский Ю. М. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 4, 61–65 (1996).
5. Березанский Ю. М. Укр. мат. ж., **49**, № 3, 364–409 (1997).
6. Lytvynov E. W. Methods Funct. Anal. Topology, **1**, No. 1, 61–85 (1995).
7. Berezansky Yu. M. Integral Equations Operator Theory, **30**, No. 2, 163–190 (1998).
8. Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces, Bielefeld, Preprint BiBoS, 1997.
9. Berezansky Yu. M. Selfadjoint operators in space of functions of infinitely many variables. AMS, Providence, RI, 1986.

Институт математики НАНУ,
Киев, Украина
e-mail: berezan@mathber.carrier.kiev.ua

Поступило в редакцию
14 мая 1998 г.

УДК 517.956

Спектральные асимптотики операторов Лапласа на каспе: случай быстро растущей считающей функции*

© 1998. С. И. БОЯРЧЕНКО, С. З. ЛЕВЕНДОРСКИЙ

1. Пусть $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область, и пусть $f: \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ растёт на бесконечности:

$$f(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Рассмотрим операторы Дирихле $-\Delta_D^\Omega$ и Лапласа $-\Delta_N^\Omega$ в каспидальной области $\Omega = \{(t, x) \mid t > 0, f(t)x \in \Omega'\}$. Оператор Дирихле есть оператор в $L_2(\Omega)$, такой, что

$$\langle -\Delta_D^\Omega u, u \rangle = \int_\Omega |\nabla_x u|^2 dx,$$

и $C_0^\infty(\Omega)$ — ядро квадратичной формы; оператор Неймана определяется аналогично, но с $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ вместо $C_0^\infty(\Omega)$.

Нетрудно видеть, что если выполняется условие (1), то оператор Лапласа $-\Delta_D^\Omega$ является самосопряженным положительно определенным оператором с

* Исследование поддержано РФФИ, грант 96-01-01196.