Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Боярченко, С. З. Левендорский, Спектральные асимптотики операторов Лапласа на каспе: случай быстро растущей считающей функции, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 70–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:57:17

Отметим, что операторы $\partial(a^1)$ и $\partial^+(a^1)$ являются $\mathcal{U}$ -образами классических операторов уничтожения и рождения, порожденных вектором $a^1 \in H$, но записанных в терминах $F(H)$, а не $\mathcal{F}(H)$.

Автор благодарен профессору Г. Ф. Усу и доктору Н. А. Качановскому за обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ito Y. Probab. Theory Related Fields, **77**, 1–28 (1988).
2. Ito Y., Kubo I. Nagoya Math. J., **111**, 41–84 (1988).
3. Kondratiev Yu. G., da Silva J. L., Streit L., Us G. F. Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. Related Topics, **1**, No. 1, 91–117 (1998).
4. Березанский Ю. М. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 4, 61–65 (1996).
5. Березанский Ю. М. Укр. мат. ж., **49**, № 3, 364–409 (1997).
6. Lytvynov E. W. Methods Funct. Anal. Topology, **1**, No. 1, 61–85 (1995).
7. Berezansky Yu. M. Integral Equations Operator Theory, **30**, No. 2, 163–190 (1998).
8. Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces, Bielefeld, Preprint BiBoS, 1997.
9. Berezansky Yu. M. Selfadjoint operators in space of functions of infinitely many variables. AMS, Providence, RI, 1986.

Институт математики НАНУ,
Киев, Украина
e-mail: berezan@mathber.carrier.kiev.ua

Поступило в редакцию
14 мая 1998 г.

УДК 517.956

Спектральные асимптотики операторов Лапласа на каспе: случай быстро растущей считающей функции*

© 1998. С. И. БОЯРЧЕНКО, С. З. ЛЕВЕНДОРСКИЙ

1. Пусть $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область, и пусть $f: \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ растёт на бесконечности:

$$f(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Рассмотрим операторы Дирихле $-\Delta_D^\Omega$ и Лапласа $-\Delta_N^\Omega$ в каспидальной области $\Omega = \{(t, x) \mid t > 0, f(t)x \in \Omega'\}$. Оператор Дирихле есть оператор в $L_2(\Omega)$, такой, что

$$\langle -\Delta_D^\Omega u, u \rangle = \int_\Omega |\nabla_x u|^2 dx,$$

и $C_0^\infty(\Omega)$ — ядро квадратичной формы; оператор Неймана определяется аналогично, но с $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ вместо $C_0^\infty(\Omega)$.

Нетрудно видеть, что если выполняется условие (1), то оператор Лапласа $-\Delta_D^\Omega$ является самосопряженным положительно определенным оператором с

* Исследование поддержано РФФИ, грант 96-01-01196.

дискретным спектром (см., например, [10]), но спектр оператора $-\Delta_N^\Omega$ дискретен, только если f растет достаточно быстро [3, 2] (при этом, в отличие от случая задачи Дирихле, $\partial\Omega'$ должна быть достаточно регулярной, например, липшицевой). Так, для f вида $f(t) = \exp(t^\alpha)$ необходимое и достаточное условие дискретности спектра оператора $-\Delta_N^\Omega$ есть $\alpha > 1$.

Вычислению асимптотики считающей функции $N(\lambda, -\Delta_D^\Omega)$ спектра оператора $-\Delta_D^\Omega$ посвящен ряд работ (см., например, [9, 12, 11, 1, 4]), но условия этих работ исключают случаи экспоненциального и сверхэкспоненциального роста функции $N(\lambda, -\Delta_D^\Omega)$. Главный член асимптотики функции $N(\lambda, -\Delta_N^\Omega)$ был вычислен в [7] при тауберовом условии, которое подразумевает, что $N(\lambda, -\Delta_N^\Omega)$ растет медленнее экспоненты.

Мы используем другой подход, основанный на общей теореме варианта метода приближенного спектрального проектора, построенного в [8], и рассматриваем случаи, когда $N(\lambda, -\Delta_N^\Omega)$ и $N(\lambda, -\Delta_D^\Omega)$ растут быстрее любого полинома. При этом допускается произвольно быстрый рост. Отметим, что метод приближенного спектрального проектора в исходной [13] и последующей редакциях [5, 6] (см. также обзор [10]) не позволяет исследовать операторы в случаях, когда считающая функция растет (сверх)экспоненциально.

Для оператора задачи Дирихле типичный пример — это $f(t) = \ln \dots \ln t$ при $t \geq C$, для оператора задачи Неймана — это $f(t) = \exp(t \ln \dots \ln t)$ при $t \geq C$.

2. Сначала мы рассмотрим оператор задачи Дирихле. Мы предполагаем, что выполнены следующие условия:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$, такое, что

$$f(t) \leq C_\varepsilon (1 + t^2)^\varepsilon; \quad (2)$$

б) для любого $s = 0, 1, \dots$ существует C_s , такое, что

$$|f^{(s)}(t)| \leq C_s f(t) (1 + t^2)^{-s/2}; \quad (3)$$

в) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $C_\varepsilon > 0$ и R , такие, что

$$t^{-1-\varepsilon} \leq C_\varepsilon f'(t), \quad t > R. \quad (4)$$

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения оператора $-\Delta_D^\Omega$. Положим

$$F(\lambda, f, \Omega') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+} (\lambda - f(t)^2 \lambda_j)_+^{1/2} dt,$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

ТЕОРЕМА 1. а) Пусть выполнены условия (1)–(4). Тогда для любого $\delta \in (0, 2/3)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$N(\lambda, -\Delta_D^\Omega) = F(\lambda, f, \Omega') (1 + O(F(\lambda, f, \Omega')^{-\delta})). \quad (5)$$

б) Пусть выполнены те же условия, что и в п. а), с одним исключением: вместо (3) f удовлетворяет более слабому условию

$$|f'(t)| \leq C f(t) (1 + t^2)^{-\gamma/2} \quad (6)$$

с некоторыми $C > 0$, $\gamma \in (0, 1]$.

Тогда равенство (5) верно для любого $\delta \in (0, 2\gamma/5)$.

ПРИМЕР 1. Пусть f совпадает с $\underbrace{\ln \dots \ln t}_{k \text{ раз}}$ на $[R_0, +\infty)$. Тогда условия (1)–(4) выполнены и (5) дает для любого $\delta \in (0, 2/3)$

$$N(\lambda, -\Delta_D^\Omega) = F(\lambda, f, \Omega')(1 + O(\underbrace{\exp \dots \exp}_{k-1 \text{ раз}} \lambda^{1/2}))).$$

3. Теперь мы переходим к оператору задачи Неймана.

Положим

$$f_1 = (\ln f)', \quad f_2(t) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 f_1(t)^2, \quad F(\lambda, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} (\lambda - f_2(t))_+^{1/2} dt.$$

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть $\partial\Omega$ липшицева, пусть $f \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+)$ удовлетворяет (1), и пусть f_1 удовлетворяет (1)–(4) при $t > C$.

Тогда для любого $\delta \in (0, 2/3)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$N(\lambda, -\Delta_N^\Omega) = F(\lambda, f_2) + O(F(\lambda, f_2)^{1-\delta}). \quad (7)$$

б) Пусть выполнены те же условия, что и в п. а), с одним исключением: вместо (3) f_1 удовлетворяет более слабой условию (6).

Тогда (7) верно для любого $\delta \in (0, 2\gamma/5)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $f_1 = (\ln f)'$ совпадает с $\underbrace{\ln \dots \ln t}_{k \text{ раз}}$ на $[R_0, +\infty)$. Тогда условия (1)–(4) выполнены, и (7) дает для любого $\delta \in (0, 2/3)$

$$N(\lambda, -\Delta_N^\Omega) = F(\lambda, f_2) + O\left(\exp\left(-\underbrace{\delta \exp \dots \exp}_{k-1 \text{ раз}}\left(\frac{2}{n-1} \lambda^{1/2}\right)\right)\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая субэкспоненциального роста считающей функции (5) (соответственно (7)) получено в [9, 4] (соответственно [7]) без оценки остаточного члена.

4. Схема доказательств. Сначала мы делаем замену переменных и сводим задачу к задаче в цилиндре, затем используем стандартные вариационные теоремы для того, чтобы свести задачу к серии задач для операторов Шрёдингера на $\mathbb{R}_+$. В случае $-\Delta_D^\Omega$ потенциалы этих операторов Шрёдингера растут на бесконечности в силу условия (1), причем скорость роста одна и та же для любой пары потенциалов. Это означает, что функции распределения спектра всех этих операторов Шрёдингера вносят вклад в главный член асимптотики функции $-\Delta_D^\Omega$; поэтому мы должны сложить соответствующие асимптотические формулы, чтобы получить формулу (5). Равномерная оценка остаточных членов обеспечивается общей теоремой метода приближенного спектрального проектора [8].

В случае $-\Delta_N^\Omega$ первый потенциал растет медленно, а остальные — быстро; поэтому главный вклад в асимптотическую формулу дается одним оператором Шрёдингера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van den Berg M.* J. Funct. Anal., **58**, 150–156 (1984). 2. *Davies E. B., Simon B.* Geom. Funct. Anal., **2**, No. 1, 105–117 (1985). 3. *Evans W. D., Harris D. J.* Proc. London Math. Soc., **54**, 141–175 (1987). 4. *Fleckinger J.* In: Lecture Notes in Math., Vol. 846, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 119–128. 5. *Фейгин В. И.* Матем. сб., **99**, № 4, 594–614 (1976). 6. *Hörmander L.* Ark. Mat., **17**, 297–313 (1979). 7. *Jaksic V., Molchanov S., Simon B.* J. Funct. Anal., **106**, No. 1, 59–79 (1992). 8. *Levendorskii S. Z.* Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Differential Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990. 9. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Матем. сб., **89**, № 2, 234–247 (1972). 10. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов, Итоги науки и техники, т. 64. ВИНТИ, М., 1989. 11. *Simon B.* J. Funct. Anal., **53**, 84–98 (1983). 12. *Tamura H.* Nagoya Math. J., **60**, 7–33 (1976). 13. *Туловский В. Н., Шубин М. А.* Матем. сб., **93**, № 4, 594–614 (1973).

Донской государственный технический университет
Ростовский институт народного хозяйства

Поступило в редакцию
20 ноября 1996 г.

УДК 513.88

О выпуклых конусах со свойством Шварца–Замфиреску*

© 1998. Е. М. Бронштейн

В. Кли [1] установил, что в типичном компактном выпуклом подмножестве бесконечномерного банахова пространства экстремальные точки всюду плотны. Для выпуклых компактов, элементами которых являются выпуклые компакты пространства $\mathbb{R}^n$, Т. Шварц и Т. Замфиреску [2] существенно усилили результат Кли, доказав типичность экстремальных точек в типичном компакте такого вида.

Типичность понимается как принадлежность множеству второй бэровской категории; множество компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ предполагается оснащенным метрикой Хаусдорфа.

Анализ доказательства теоремы Шварца–Замфиреску показал, что установленное ими удивительное свойство справедливо для широкого класса выпуклых конусов.

Пусть $\mathcal{K}$ — выпуклый конус, т. е. множество, в котором определены операции сложения и умножения на неотрицательные числа с соответствующим набором аксиом линейного пространства, оснащенное полной метрикой ρ , согласованной с операциями, т. е. удовлетворяющей условиям

- 1) операция сложения непрерывна на $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$;
- 2) операция умножения на числа непрерывна на $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^+$;
- 3) $\rho(a + b, c + b) = \rho(a, c)$;
- 4) $\rho(\lambda a, \lambda b) = \lambda \rho(a, b)$ при $\lambda \geq 0$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 94-01-01286).