Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Бронштейн, О выпуклых конусах со свойством Шварца–Замфиреску, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 73–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 10:20:11

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van den Berg M.* J. Funct. Anal., **58**, 150–156 (1984). 2. *Davies E. B., Simon B.* Geom. Funct. Anal., **2**, No. 1, 105–117 (1985). 3. *Evans W. D., Harris D. J.* Proc. London Math. Soc., **54**, 141–175 (1987). 4. *Fleckinger J.* In: Lecture Notes in Math., Vol. 846, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 119–128. 5. *Фейгин В. И.* Матем. сб., **99**, № 4, 594–614 (1976). 6. *Hörmander L.* Ark. Mat., **17**, 297–313 (1979). 7. *Jaksic V., Molchanov S., Simon B.* J. Funct. Anal., **106**, No. 1, 59–79 (1992). 8. *Levendorskii S. Z.* Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Differential Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990. 9. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Матем. сб., **89**, № 2, 234–247 (1972). 10. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов, Итоги науки и техники, т. 64. ВИНТИ, М., 1989. 11. *Simon B.* J. Funct. Anal., **53**, 84–98 (1983). 12. *Tamura H.* Nagoya Math. J., **60**, 7–33 (1976). 13. *Туловский В. Н., Шубин М. А.* Матем. сб., **93**, № 4, 594–614 (1973).

Донской государственный технический университет
Ростовский институт народного хозяйства

Поступило в редакцию
20 ноября 1996 г.

УДК 513.88

О выпуклых конусах со свойством Шварца–Замфиреску*

© 1998. Е. М. Бронштейн

В. Кли [1] установил, что в типичном компактном выпуклом подмножестве бесконечномерного банахова пространства экстремальные точки всюду плотны. Для выпуклых компактов, элементами которых являются выпуклые компакты пространства $\mathbb{R}^n$, Т. Шварц и Т. Замфиреску [2] существенно усилили результат Кли, доказав типичность экстремальных точек в типичном компакте такого вида.

Типичность понимается как принадлежность множеству второй бэровской категории; множество компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ предполагается оснащенным метрикой Хаусдорфа.

Анализ доказательства теоремы Шварца–Замфиреску показал, что установленное ими удивительное свойство справедливо для широкого класса выпуклых конусов.

Пусть $\mathcal{K}$ — выпуклый конус, т. е. множество, в котором определены операции сложения и умножения на неотрицательные числа с соответствующим набором аксиом линейного пространства, оснащенное полной метрикой ρ , согласованной с операциями, т. е. удовлетворяющей условиям

- 1) операция сложения непрерывна на $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$;
- 2) операция умножения на числа непрерывна на $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^+$;
- 3) $\rho(a + b, c + b) = \rho(a, c)$;
- 4) $\rho(\lambda a, \lambda b) = \lambda \rho(a, b)$ при $\lambda \geq 0$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 94-01-01286).

ТЕОРЕМА. В типичном выпуклом компактном подмножестве локально компактного бесконечномерного метрического конуса экстремальные точки являются типичными.

Для метрического конуса локальная компактность означает компактность множеств $\{x : \rho(x, 0) \leq C\}$ при любом $C > 0$. Отсюда следует, что максимальное линейное подпространство, содержащееся в $\mathcal{K}$, является конечномерным. В [3] такие конусы называются конусами с универсальной шапкой.

Приведем несколько примеров конусов, удовлетворяющих условиям теоремы.

1. Подмножество гильбертова пространства, состоящее из таких точек $(x_1, x_2, \dots)$, что $x_1 \geq 0$ и $x_i \in [0, x_1/i]$ при $i > 1$.

2. Конус всех компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с поточечными операциями и метрикой Хаусдорфа.

3. Подмножество конуса из предыдущего примера, состоящее из выпуклых множеств. Именно этот конус рассмотрен в [2].

В доказательстве теоремы используется следующее простое свойство бесконечномерного метрического конуса $\mathcal{K}$.

Пусть M — конечное подмножество конуса $\mathcal{K}$. Тогда множество

$$\{x \in \mathcal{K} : \text{ext conv}(M \cup \{x\}) = (\text{ext conv } M) \cup \{x\}\}$$

всюду плотно в $\mathcal{K}$.

Напомним, что «типичный» означает «принадлежащий множеству второй бэровской категории», т. е. такому множеству, дополнение к которому является объединением счетного семейства нигде не плотных множеств.

Множество $\mathcal{K}_1$ выпуклых компактных подмножеств конуса $\mathcal{K}$ наделяется метрикой Хаусдорфа ρ_1 , индуцированной метрикой ρ .

Локальная компактность конуса $\mathcal{K}$ влечет за собой справедливость в метрическом пространстве $\mathcal{K}_1$ теоремы выбора Бляшке [4], т. е. локальную компактность пространства $\mathcal{K}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $U \in \mathcal{K}_1$, т. е. U — выпуклый компакт в $\mathcal{K}$. Обозначим через $S_n(U)$ множество

$$\{x \in U : x = (y + z)/2, \text{ где } y, z \in U, \rho(y, z) \geq 1/n\}.$$

Тогда $S(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(U)$ — множество неэкстремальных точек из U , т. е. $S(U) = U \setminus \text{ext } U$. Из компактности множества U следует компактность множеств $S_n(U)$.

Пусть $\mathcal{M}$ — подмножество в $\mathcal{K}_1$, элементами которого являются выпуклые компакты U из $\mathcal{K}$ с множеством $\text{ext } U$ первой категории (соответственно с множеством $S(U)$ второй категории). Надо доказать, что $\mathcal{M}$ — множество первой категории в $\mathcal{K}_1$.

Обозначим через $\mathcal{M}_{m,n}$ множество выпуклых тел $U \in \mathcal{K}_1$, в которых существует точка x со свойством $B(x, 1/m) \subset S_n(U)$. Здесь $B(x, r)$ — шар радиуса r с центром x . Заметим, что если для всякой точки $x \in U$ выполняется условие $B(x, 1/m) \cap \text{ext } U \neq \emptyset$, то $U \notin \mathcal{M}_{m,n}$.

Установим свойства множеств $\mathcal{M}_{m,n}$.

1. Множества $\mathcal{M}_{m,n}$ замкнутые. Это следует из свойств метрики Хаусдорфа и замкнутости множеств S_n .

2. Проверим, что $\mathcal{M} \subset \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m,n}$.

Пусть $U \in \mathcal{M}$. Тогда $S(U)$ — множество второй категории. Поскольку $S(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(U)$, то хотя бы одно из множеств $S_n(U)$ не является нигде не плотным, т.е. вследствие замкнутости содержит некоторый шар, что и требовалось проверить.

3. Для завершения доказательства достаточно проверить, что каждое из множеств $\mathcal{M}_{m,n}$ нигде не плотно. Поскольку множества $\mathcal{M}_{m,n}$ замкнутые, то для этого надо доказать, что для любых $U \in \mathcal{K}_1$ и $\varepsilon > 0$ найдется множество $V \in \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{M}_{m,n}$, такое, что $\rho_1(U, V) \leq \varepsilon$.

Выберем конечную $\varepsilon/2$ -сеть в компакте U и обозначим через V_0 выпуклую оболочку этой сети. По определению метрики Хаусдорфа $\rho_1(U, V_0) \leq \varepsilon/2$.

Пусть существует точка $x_0 \in V_0$ удаленная от всех точек конечного множества $\text{ext } V_0$ больше, чем на $1/m$. По отмеченному ранее свойству существует точка $y_0 \in \mathcal{K}$, такая, что

$$\rho(x_0, y_0) \leq \min\{1/2m, \varepsilon/4\} \quad \text{и} \quad \text{ext conv}(V_0 \cup \{y_0\}) = (\text{ext } V_0) \cup \{y_0\}.$$

Пусть $V_1 = \text{conv}(V_0 \cup \{y_0\})$. Если существует точка $x_1 \in V_1$, удаленная от всех точек множества $\text{ext } V_1$ больше, чем на $1/m$, то выберем точку $y_1 \in \mathcal{K}$, такую, что

$$\rho(x_1, y_1) \leq \min\{1/2m, \varepsilon/8\} \quad \text{и} \quad \text{ext conv}(V_1 \cup \{y_1\}) = (\text{ext } V_1) \cup \{y_1\}.$$

Продолжая построение, получим последовательности точек $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ и множеств $\{V_i\}$. Докажем, что этот процесс обрывается на конечном шаге.

Пусть, напротив, это не так. По построению все точки x_i , y_i располагаются в ε -окрестности компакта U . По свойствам конуса $\mathcal{K}$ из последовательности $\{y_i\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Но при $j > i$ справедливо неравенство

$$\rho(y_i, y_j) \geq \rho(y_i, x_j) - \rho(x_j, y_j) \geq 1/m - 1/2m = 1/2m,$$

т.е. последовательность $\{y_i\}$ не может содержать фундаментальной подпоследовательности.

Пусть $V = V_n$ — последнее из построенных выпуклых тел. По построению $\rho_1(U, V) \leq \varepsilon$ и при этом $1/m$ -окрестность любой точки множества V пересекается с $\text{ext } V$, т.е. $V \notin \mathcal{M}_{m,n}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klee V. Math. Ann., **139**, 51–63 (1959).
2. Schwarz T., Zamfirescu T. J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **43**, 287–290 (1987).
3. Феллс Р. Лекции о теоремах Шоке. Мир, М., 1968.
4. Бляшке В. Круг и шар. Наука, М., 1976.