Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, Внутренние функции и l^p -мультипликаторы, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 10–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:33:59

УДК 517.948+513.8

Внутренние функции и l^p -мультипликаторы*

© 1998. В. В. ЛЕБЕДЕВ

Памяти Станислава Александровича Виноградова

Введение

Пусть $A_p^+(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$) — пространство функций

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n, \quad z \in D,$$

аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, таких, что последовательность коэффициентов Тейлора $\hat{f} = \{\hat{f}(n) ; n = 0, 1, \dots\}$ принадлежит l^p . Для $f \in A_p^+(D)$ положим $\|f\|_{A_p^+(D)} = \|\hat{f}\|_{l^p}$.

Аналитическая в D функция m называется l^p -мультипликатором, если для всякой функции $f \in A_p^+(D)$ произведение $m \cdot f$ принадлежит $A_p^+(D)$. Семейство всех таких мультипликаторов мы обозначаем через $M_p^+(D)$. Снабженное естественной нормой

$$\|m\|_{M_p^+(D)} = \sup_{\|f\|_{A_p^+(D)} \leq 1} \|m \cdot f\|_{A_p^+(D)},$$

$M_p^+(D)$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Нас интересует следующий вопрос: какие внутренние функции принадлежат $M_p^+(D)$? Напомним, что аналитическая в D функция I называется *внутренней*, если $|I(z)| \leq 1$, $z \in D$, и $|I(e^{it})| = 1$ почти всюду. Обзор ряда результатов о внутренних функциях и мультипликаторах можно найти в статье С. А. Виноградова [1]¹.

Как известно, всякая внутренняя функция допускает факторизацию $I = \lambda BS$, где λ — постоянная, $|\lambda| = 1$, B — *произведение Бляшке*, т. е. функция вида

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}$$

с нулями $\{z_n\} \subset D$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty,$$

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 96-01-01438.

¹Мы употребляем обозначения $A_p^+(D)$ и $M_p^+(D)$ вместо обычно используемых l_A^p и M_A^p .

и S — *сингулярная* внутренняя функция, т. е. внутренняя функция, не имеющая нулей в D , такая, что $S(0) > 0$. Любая сингулярная внутренняя функция имеет вид

$$S(z) = \exp \left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right),$$

где μ — положительная сингулярная мера на окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Замкнутый носитель меры μ называется *спектром* функции S — это наименьшее по включению замкнутое множество E , такое, что S аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus E$ [11].

Поскольку $M_1^+(D) = M_\infty^+(D) = A_1^+(D)$ (см. [12]), внутренние функции в $M_p^+(D)$ при $p = 1, \infty$ — это лишь конечные произведения Бляшке с точностью до множителя $\lambda \in \mathbb{C}$ (только такие внутренние функции непрерывны в D вплоть до границы [11]). Случай $p = 2$ тривиален, так как $M_2^+(D)$ совпадает с пространством Харди $H^\infty(D)$ [12].

В §1 мы рассматриваем сингулярные внутренние функции. Как показал И. Э. Вербицкий [2], *сингулярная внутренняя функция*

$$S(z) = \exp \left(-a \frac{1+z}{1-z} \right), \quad a > 0$$

(спектр которой — одноточечное множество $\{1\}$), *принадлежит* $M_p^+(D)$ *лишь в тривиальном случае* $p = 2$. Существуют ли вообще сингулярные внутренние функции $S \neq 1$ в $M_p^+(D)$, $p \neq 2$? Ответ на этот вопрос, поставленный С. А. Виноградовым в [3], нам неизвестен. Тем не менее мы указываем ряд условий, характеризующих массивность замкнутых множеств на окружности, выполнение которых для произвольно взятого множества $E \subset \mathbb{T}$ означает, что E не может служить спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$ при $p \neq 2$ (теоремы 1, 2 и их следствия). Грубо говоря, это имеет место, если E недостаточно массивно. В частности, из этих условий следует, что *если спектр сингулярной внутренней функции S является непустым пористым множеством, то S принадлежит $M_p^+(D)$ лишь при $p = 2$.*

В §2 мы рассматриваем произведения Бляшке. Известно, что если нули произведения Бляшке B имеют единственную предельную точку (на $\mathbb{T}$) и накапливаются к ней очень быстро, то $B \in M_p^+(D)$. Точнее, пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow 1$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} |1-z_n| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0; \quad (1)$$

тогда $B \in \bigcap_{1 < p < \infty} M_p^+(D)$. Это теорема Виноградова–Вербицкого (первоначально она была доказана Виноградовым [4] в случае, когда z_n стремятся к 1 некасательно, и впоследствии распространена на общий случай независимо Виноградовым [1] и Вербицким [2]). Мы покажем (теорема 3), что если нули произведения Бляшке стремятся к 1 некасательным образом, оставаясь в замкнутой верхней полуплоскости, то верно утверждение обратного характера: *в этом случае, если $B \in M_p^+(D)$ при каком-либо $p \neq 2$, то выполняется (1).*

Неясно, к каким множествам на $\mathbb{T}$ могут накапливаться нули произведений Бляшке из $M_p^+(D)$, $p \neq 2$. Мы строим (теорема 4) произведение Бляшке, принадлежащее $\bigcap_{1 < p < \infty} M_p^+(D)$, такое, что множество предельных точек его нулей совершенно.

Отметим здесь же естественную связь между $M_p^+(D)$ и классической алгеброй l^p -мультипликаторов Фурье $M_p(\mathbb{T})$ на окружности $\mathbb{T}$, интерпретируемой как $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Нам удобно использовать следующее определение. Пусть $A_p(\mathbb{T})$ — пространство, состоящее из функций $f \in L^2(\mathbb{T})$, таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\hat{f} = \{\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^p , и пусть $\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\hat{f}\|_{l^p}$. Тогда $M_p(\mathbb{T})$ состоит из ограниченных измеримых функций g на $\mathbb{T}$, для которых

$$\|g\|_{M_p(\mathbb{T})} = \sup_{\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq 1} \|g \cdot f\|_{A_p(\mathbb{T})} < \infty.$$

Учитывая включение $M_p^+(D) \subseteq H^\infty(D)$ (см. [12]) и идентифицируя всякую функцию m из $H^\infty(D)$ с ее граничной функцией $m^*(t) = m(e^{it})$, несложно увидеть, что

$$m^* \in M_p(\mathbb{T}) \iff m \in M_p^+(D)$$

и $\|m^*\|_{M_p(\mathbb{T})} = \|m\|_{M_p^+(D)}$. (Достаточно рассмотреть тригонометрические полиномы f и произведения $m(e^{it})e^{iNt}f(t)$, где N — степень полинома f .) Мы пользуемся этим фактом на протяжении всей статьи.

Результаты настоящей работы были частично (для сингулярных внутренних функций с пористым спектром и для произведений Бляшке с нулями на радиусе) представлены на Британско-Российском семинаре по функциональному анализу в Эйлеровском международном математическом институте в Санкт-Петербурге 13–17 октября 1996 г. [5].

§1. Сингулярные внутренние функции

Приведенные ниже теоремы 1, 2 и следствия показывают, что если спектр сингулярной внутренней функции

$$S(z) = \exp \left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right) \quad (2)$$

недостаточно массивен, то S принадлежит $M_p^+(D)$ лишь при $p = 2$ (мы считаем, конечно, что S нетривиальна, т.е. ее спектр непуст).

Для произвольного множества E на окружности $\mathbb{T}$ пусть $|E|$ означает его лебегову меру и $\overline{E}$ — его замыкание. Если $I \subseteq \mathbb{T}$ — дуга, то через $d_E(I)$ мы обозначаем «наибольшую дыру в I », а именно

$$d_E(I) = \sup \{|J| : J \text{ — дуга, } J \subseteq I, J \cap E = \emptyset\}.$$

Следуя [13, с. 819], мы называем точку $\xi \in \mathbb{T}$ *точкой густоты множества E* , если $d_E(I) = o(|I|)$, когда дуга $I \ni \xi$ стягивается к ξ , т.е. когда $I \ni \xi$ и $|I| \rightarrow 0$. Множество всех точек густоты множества E обозначим через E^{th} . Очевидно, для замкнутого множества $E^{\text{th}} \subseteq E$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть S — сингулярная внутренняя функция и E — ее спектр. Если $\overline{E^{\text{th}}} \neq E$, то $S \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S — сингулярная внутренняя функция и E — ее спектр, $E \neq \emptyset$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ множество E может быть покрыто конечным числом дуг $\{I_n\}$ так, что

$$\sum_n \frac{|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} < \varepsilon. \quad (3)$$

Тогда $S \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$. (То же заключение верно, если указанным свойством обладает какая-либо непустая порция множества E , т. е. $E \cap I$, где I — дуга.)

Для доказательства обеих теорем потребуется следующее утверждение, которое будет также использовано в §2.

ЛЕММА 1. Пусть φ — вещественнозначная 2π -периодическая функция на прямой $\mathbb{R}$, такая, что $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{T})$ для некоторого p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ — интервал длины $|\Delta| \leq 2\pi$ и φ имеет непрерывную производную $\varphi^{(\nu)}$ порядка $\nu \geq 2$ на Δ . Тогда

$$|\Delta|^\nu \inf_{t \in \Delta} |\varphi^{(\nu)}(t)| \leq c,$$

где $c = c(\varphi, p, \nu) > 0$ не зависит от Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $p > 2$, поскольку $M_p(\mathbb{T}) = M_q(\mathbb{T})$ при $1/p + 1/q = 1$ с соответствующим равенством норм [6]. Положим $\gamma = \|e^{i\varphi}\|_{M_p(\mathbb{T})}$. Пусть 1_Δ — характеристическая функция интервала Δ : $1_\Delta(t) = 1$ при $t \in \Delta$ и $1_\Delta(t) = 0$ при $t \notin \Delta$; тогда

$$\|1_\Delta\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{i\varphi} \cdot 1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \gamma \|1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}. \quad (4)$$

Несложно оценить $\|1_\Delta\|_{A_p(\mathbb{T})}$. Для коэффициентов Фурье $\widehat{1_\Delta}$ имеем

$$|\widehat{1_\Delta}(k)| = \left| \frac{\sin(k|\Delta|/2)}{\pi k} \right|, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{1_\Delta}(0) = \frac{|\Delta|}{2\pi}.$$

Таким образом, если $|k| \leq \pi/(2|\Delta|)$, то $|\widehat{1_\Delta}(k)| \geq |\Delta|/4\pi$ и, следовательно, для $p \neq \infty$

$$\|1_\Delta\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\widehat{1_\Delta}\|_{l^p} \geq \left(\frac{\pi}{2|\Delta|} \left(\frac{|\Delta|}{4\pi} \right)^p \right)^{1/p} \geq \frac{1}{20} |\Delta|^{1-1/p}, \quad (5)$$

что верно также и при $p = \infty$.

Для оценки $\|1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$ воспользуемся известной леммой ван-дер-Корпута (см., например, [17, с. 15]): если вещественнозначная функция g имеет непрерывную производную $g^{(\nu)}$ порядка $\nu \geq 2$ на интервале Δ и $|g^{(\nu)}(t)| \geq \rho > 0$ при $t \in \Delta$, то

$$\left| \int_\Delta e^{ig(t)} dt \right| \leq \frac{c_\nu}{\rho^{1/\nu}},$$

где c_ν — положительная константа, зависящая только от ν . В силу этого, полагая

$$\rho = \inf_{t \in \Delta} |\varphi^{(\nu)}(t)|$$

и считая, что $\rho > 0$ (иначе лемма доказана), получаем

$$|\widehat{1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}}(k)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Delta e^{i(-\varphi(t) - ikt)} dt \right| \leq \frac{c_\nu}{2\pi\rho^{1/\nu}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

т. е.

$$\|\widehat{1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^\infty} \leq \frac{c_\nu}{2\pi\rho^{1/\nu}}.$$

Вместе с тем

$$\|\widehat{1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^2} = \|1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}\|_{L^2(\mathbb{T})} = (|\Delta|/2\pi)^{1/2},$$

и, интерполируя l^p между l^2 и l^∞ , имеем

$$\begin{aligned} \|1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} &= \|\widehat{1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^p} \leq \|\widehat{1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^\infty}^{1-2/p} \cdot \|\widehat{1_\Delta \cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^2}^{2/p} \\ &\leq \left(\frac{c_\nu}{2\pi\rho^{1/\nu}} \right)^{1-2/p} \left(\frac{|\Delta|}{2\pi} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) и (5) в (4), получаем утверждение леммы.

Применение леммы 1 при $\nu = 3$ дает следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть S — сингулярная внутренняя функция, E — ее спектр и μ — представляющая мера функции S , т. е. мера, фигурирующая в (2). Предположим, что $S \in M_p^+(D)$ при некотором p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для любой дуги $I \subseteq \mathbb{T}$, такой, что $d_E(I) > 0$, справедливо неравенство

$$\mu(I) \leq c|I|^4/d_E(I)^3,$$

где $c > 0$ не зависит от I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дугу $I \subseteq \mathbb{T}$, $d_E(I) > 0$. Выберем дугу $J \subseteq I$, такую, что $J \cap E = \emptyset$, $|J| > d_E(I)/2$. Можно считать, что J находится на положительном расстоянии от E . Пусть Δ — интервал в $\mathbb{R}$ длины $|\Delta| \leq 2\pi$, такой, что $J = \{e^{it}, t \in \Delta\}$. Мы имеем $S(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$, где φ — вещественнозначная 2π -периодическая функция на $\mathbb{R}$, причем

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - t}{2} \right) d\mu(e^{i\theta}), \quad t \in \Delta.$$

Ясно, что φ имеет непрерывные производные любого порядка на Δ . Дифференцируя по t , получаем

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - t}{2} \right) \right)'''_{ttt} &= \frac{3 \cos^2((\theta - t)/2) + \sin^2((\theta - t)/2)}{4 \sin^4((\theta - t)/2)} \\ &\geq \frac{1}{4 \sin^4((\theta - t)/2)} = \frac{4}{|e^{i\theta} - e^{it}|^4}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t \in \Delta$

$$\varphi'''(t) \geq \int_{\mathbb{T}} \frac{4}{|\xi - e^{it}|^4} d\mu(\xi) \geq \int_I \frac{4}{|\xi - e^{it}|^4} d\mu(\xi) \geq \frac{4\mu(I)}{|I|^4}.$$

В предположении, что $S \in M_p^+(D)$, имеем $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{T})$. Используя лемму 1 при $\nu = 3$, видим, что

$$|\Delta|^3 \frac{4\mu(I)}{|I|^4} \leq c,$$

и, поскольку $|\Delta| = |J| > d_E(I)/2$, лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что $S \in M_p^+(D)$ при некотором $p \neq 2$; тогда по лемме 2 представляющая мера μ функции S такова, что

$$\left(\frac{d_E(I)}{|I|} \right)^3 \frac{\mu(I)}{|I|} \leq c$$

для любой дуги $I \subseteq \mathbb{T}$. Вместе с тем, поскольку μ сингулярна, для μ -почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ имеем $\mu(I)/|I| \rightarrow \infty$, когда I стягивается к ξ . Таким образом, μ -почти все точки окружности $\mathbb{T}$ являются точками густоты множества E , т.е. $\mu(\mathbb{T} \setminus E^{\text{th}}) = 0$. Так как E — замкнутый носитель меры μ , отсюда следует, что $\overline{E^{\text{th}}} = E$ вопреки условию теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Допустим, что $S \in M_p^+(D)$ при некотором $p \neq 2$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{I_n\}$ — конечное покрытие множества E дугами, удовлетворяющее условию (3). Применение леммы 2 дает для представляющей меры μ функции S соотношение

$$\mu(\mathbb{T}) = \mu(E) \leq \sum_n \mu(I_n) \leq \sum_n \frac{c|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} < c \cdot \varepsilon,$$

что невозможно, если ε достаточно мало.

Укажем теперь ряд следствий из теорем 1 и 2.

Множество $E \subset \mathbb{T}$ называется *пористым*, если существует $c > 0$, такое, что любая дуга $I \subseteq \mathbb{T}$ содержит дугу J длины $|J| \geq c|I|$, такую, что $J \cap E = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть S — нетривиальная сингулярная внутренняя функция, спектр которой является пористым множеством. Тогда $S \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$.

Это немедленно получается из теоремы 1, поскольку очевидно, что если E — пористое множество, то $E^{\text{th}} = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $E \subset \mathbb{T}$ — замкнутое множество лебеговой меры нуль и $\{\delta_n, n = 1, 2, \dots\}$ — дуги, дополнительные к E , занумерованные в порядке невозрастания длин. Если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\delta_N|^{-3/4} \sum_{n > N} |\delta_n| = 0,$$

то, какова бы ни была нетривиальная сингулярная внутренняя функция S , спектр которой содержится в E , имеем $S \notin M_p^+(D)$ для любого $p \neq 2$. (В частности, это имеет место, если $\sum |\delta_n|^{1/4} < \infty$.)

Это вытекает из теоремы 2. В самом деле, фиксируем N и удалим из $\mathbb{T}$ дуги $\delta_1, \dots, \delta_N$. Рассмотрим оставшиеся на окружности дуги $J_1, \dots, J_N$. Пусть I_n обозначает концентрическую с J_n дугу длины $|I_n| = 3|J_n|$, $n = 1, \dots, N$. Тогда $\bigcup_n I_n \supset E$ и $d_E(I_n) \geq \min\{|\delta_N|, |J_n|\}$, $n = 1, \dots, N$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} &\leq \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ |J_n| \leq |\delta_N|}} \frac{(3|J_n|)^4}{|J_n|^3} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ |J_n| > |\delta_N|}} \frac{(3|J_n|)^4}{|\delta_N|^3} \\ &\leq 81 \sum_{n=1}^N |J_n| + \frac{81}{|\delta_N|^3} \left(\sum_{n=1}^N |J_n| \right)^4 = 81 \sum_{n > N} |\delta_n| + \frac{81}{|\delta_N|^3} \left(\sum_{n > N} |\delta_n| \right)^4. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть здесь может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора N , множество E (равно как и любое его подмножество) удовлетворяет условию теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $E \subset \mathbb{T}$ — (непустое) замкнутое множество и E_δ — его δ -окрестность, $E_\delta = \{\xi \in \mathbb{T} : \text{dist}(\xi, E) < \delta\}$. Если

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \delta^{-3/4} |E_\delta| = 0,$$

то, какова бы ни была сингулярная внутренняя функция S , спектром которой является E , имеем $S \notin M_p^+(D)$ для любого $p \neq 2$.

Это утверждение несложно вывести из предыдущего, но мы получим его непосредственно из теоремы 2. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим дуги $I_1, \dots, I_N$ ($N = N(\delta)$), из которых составлено E_δ (т.е. связные компоненты множества E_δ). Можно считать, что $N > 1$. Заметим, что $d_E(I_n) \geq \delta$, $n = 1, \dots, N$; поэтому для покрытия $\{I_n\}$ множества E получаем

$$\sum_n \frac{|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} \leq \frac{1}{\delta^3} \sum_{n=1}^N |I_n|^4 \leq \frac{1}{\delta^3} \left(\sum_{n=1}^N |I_n| \right)^4 = \frac{1}{\delta^3} |E_\delta|^4.$$

Правая часть в этой оценке может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора $\delta > 0$.

В качестве иллюстрации теорем 1 и 2 обратимся к симметричным множествам. Напомним, что такие множества получаются следующим образом (см. [13, с. 827]). Фиксируем последовательность λ_n , $n = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda_n < 1$, и замкнутую дугу $I \subset \mathbb{T}$, $|I| = \rho_0$. Удалим из I концентрическую открытую дугу длины $\lambda_1 \rho_0$. Останутся две замкнутые дуги равной длины ρ_1 . Удалим из каждой из них по концентрической открытой дуге длины $\lambda_2 \rho_1$. Останутся 4 замкнутые дуги длины $\rho_2, \dots$. На n -м шаге остается 2^n замкнутых дуг длины ρ_n . Продолжим этот процесс безгранично. Множество E оставшихся в I точек называется симметричным множеством с переменным отношением разбиения $\{\lambda_n\}$.

Несложно увидеть, что если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{N+1}^{-3} \prod_{n=1}^N (1 - \lambda_n) = 0, \quad (7)$$

то условие теоремы 2 выполнено и E , равно как и любое его непустое подмножество, не может являться спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$, $p \neq 2$.

Ясно также, что если у симметричного множества E имеется хоть одна точка густоты, то $\lambda_n \rightarrow 0$. Несложно проверить, что в таком случае хаусдорфова размерность $\dim E$ множества E равна 1, и, таким образом, из теоремы 1 вытекает, что *если E — симметричное множество и $\dim E < 1$, то E , равно как и всякое его непустое подмножество, не может являться спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$, $p \neq 2$* . (Вместе с тем пример $\{\lambda_n = 4/(n+4)\}$ дает $\dim E = 1$, но при этом выполняется (7).)

Наконец, отметим, что в общем случае отсутствие точек густоты не налагает никаких ограничений на массивность множества по Хаусдорфу. Возьмем, например множество E , обладающее так называемым свойством L , т. е. удовлетворяющее следующему условию: существуют две положительные последовательности $\{\alpha_j\}$ и $\{\mu_j\}$, $\lim \alpha_j = 0$, $\lim \mu_j = \infty$, такие, что E может быть покрыто объединением открытых интервалов с длинами, равными α_j , расстояние между которыми не менее $\alpha_j \mu_j$. Ясно, что если E обладает этим свойством, то $E^{\text{th}} = \emptyset$. В тоже время для любой функции h , удовлетворяющей условиям $h(\delta) \searrow +0$ при $\delta \searrow +0$, $\lim_{\delta \rightarrow +0} h(\delta)/\delta = \infty$, найдется множество E строго положительной h -меры, обладающее свойством L (см. [14, с. 117]).

Разумеется, все рассмотренные здесь условия массивности множеств $E \subset \mathbb{T}$ применимы лишь к множествам лебеговой меры нуль. О сингулярных внутренних функциях, спектр которых имеет положительную лебегову меру, см. замечание в конце статьи.

§2. Произведения Бляшке

Здесь мы рассматриваем произведения Бляшке

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \quad \{z_n\} \subset D, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Следующая далее теорема 3 дает обращение теоремы Виноградова–Вербицкого, сформулированной во введении, в случае когда нули произведения Бляшке B расположены в замкнутой верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и некасательно стремятся к 1. Таким образом, в этом случае мы имеем критерий принадлежности произведений Бляшке пространству $M_p^+(D)$.

Пусть S_α обозначает область Штольца с вершиной в 1: $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |1 - z| \leq \alpha(1 - |z|)\}$, $\alpha > 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $\lim z_n = 1$ и (начиная с некоторого номера) нули z_n принадлежат $\overline{\mathbb{C}^+} \cap S_\alpha$. Если $B \in M_p^+(D)$ при некотором p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\sum_{n : |1 - z_n| < \varepsilon} |1 - z_n| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Теорема 3 немедленно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $\lim z_n = 1$, u , начиная с некоторого номера, нули z_n принадлежат $\overline{\mathbb{C}^+}$. Если $B \in M_p^+(D)$ при некотором p , $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} (1 - |z_n|) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

(Здесь мы не предполагаем, что $\{z_n\} \subset S_\alpha$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что конечные произведения Бляшке (т. е. те, которые имеют конечное число нулей) принадлежат $A_1^+(D) \subseteq M_p^+(D)$; поэтому если B_0 — конечное произведение Бляшке, то $1/B_0(e^{it}) = \overline{B_0(e^{it})} \in M_p(\mathbb{T})$. Таким образом, поделив при необходимости B на конечное произведение Бляшке, мы можем считать, что все нули z_n лежат в $\overline{\mathbb{C}^+}$, а также что $m = 0$ и

$$0 \leq \arg z_n < \pi/8, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Полагая

$$b_n(z) = \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$

мы можем записать $b_n(e^{it}) = e^{i\varphi_n(t)}$, где φ_n есть 2π -периодическая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}$, имеющая производные любого порядка. Пусть $r_n = |z_n|$ и $\alpha_n = \arg z_n$. Прямое вычисление дает

$$\varphi'_n(t) = \frac{b'_n(e^{it})e^{it}}{b_n(e^{it})} = \frac{1 - r_n^2}{|e^{it} - z_n|^2}, \quad \varphi''_n(t) = \frac{(1 - r_n^2)2r_n \sin(\alpha_n - t)}{|e^{it} - z_n|^4}.$$

Таким образом, $B(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$, где $\varphi = \sum_n \varphi_n$ имеет непрерывные производные любого порядка в точках, отличных от $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и

$$\varphi''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - r_n^2)2r_n \sin(\alpha_n - t)}{|e^{it} - z_n|^4}, \quad e^{it} \neq 1.$$

Фиксируем ε , удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \pi/8$, и рассмотрим интервал $\Delta_\varepsilon = [-\varepsilon, -\varepsilon/2] \subset \mathbb{R}$. Тогда φ'' непрерывна на Δ_ε и, поскольку $\sin(\alpha_n - t) > 0$, $n = 1, 2, \dots$, при $t \in \Delta_\varepsilon$ (см. (8)), то

$$\varphi''(t) \geq \sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} \frac{(1 - r_n^2)2r_n \sin(\alpha_n - t)}{|e^{it} - z_n|^4}, \quad t \in \Delta_\varepsilon. \quad (9)$$

Заметим теперь, что если $t \in \Delta_\varepsilon$ и $|1 - z_n| < \varepsilon$, то $\varepsilon/2 \leq \alpha_n - t \leq \pi/4$ (см. (8)) и, следовательно, $\sin(\alpha_n - t) \geq \varepsilon/4$. Кроме того, для этих t и n имеем $|e^{it} - z_n| \leq 2\varepsilon$ и $r_n = |z_n| \geq 1 - \varepsilon \geq 1/2$. Таким образом, (9) дает

$$\varphi''(t) \geq \sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} \frac{(1 - r_n^2)2 \cdot (1/2) \cdot (\varepsilon/4)}{(2\varepsilon)^4} \geq \frac{1}{64\varepsilon^3} \sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} (1 - |z_n|), \quad t \in \Delta_\varepsilon.$$

В предположении, что $B \in M_p^+(D)$ ($p \neq 2$), имеем $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{T})$ и, используя лемму 1 при $\nu = 2$, с учетом того, что $|\Delta_\varepsilon| = \varepsilon/2$, получаем

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{64\varepsilon^3} \sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} (1 - |z_n|) \leq c$$

(c не зависит от ε), т. е.

$$\sum_{n: |1-z_n| < \varepsilon} (1 - |z_n|) \leq \text{const} \cdot \varepsilon.$$

Лемма 3, а с ней и теорема 3 доказаны.

Разумеется, аналогичное теореме 3 утверждение справедливо также в случае нулей, расположенных в замкнутой нижней полуплоскости.

Из теоремы 3 и теоремы Виноградова–Вербицкого получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $z_n \rightarrow 1$, $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}^+} \cap S_\alpha$. Если произведение Бляшке B с нулями $\{z_n\}$ принадлежит $M_p^+(D)$ при каком-либо $p \neq 2$, то $B \in M_p^+(D)$ при всех p , $1 < p < \infty$.

Рассмотрим теперь следующий вопрос: к каким множествам на окружности $\mathbb{T}$ могут накапливаться нули произведений Бляшке, принадлежащих $M_p^+(D)$, $p \neq 2$? Следующая теорема показывает, что такие множества могут быть континуальны.

ТЕОРЕМА 4. Существует произведение Бляшке, принадлежащее $\bigcap_{1 < p < \infty} M_p^+(D)$, такое, что множество предельных точек его нулей $\overline{\{z_n\}_{n=1}^\infty} \cap \mathbb{T}$ является (непустым) совершенным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя [9], скажем, что замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$ лебеговой меры нуль обладает свойством $LP(p)$ ($1 < p < \infty$), если $\|S(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \asymp \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, где $S(f)$ — квадратичная функция Литлвуда–Пэли, соответствующая интервалам $\{\Delta_n\}$, дополнительным к F . Связь множеств такого типа с мультипликаторами Фурье хорошо известна. В частности, если F обладает свойством $LP(p)$, то любая ограниченная измеримая функция m на прямой $\mathbb{R}$, такая, что $\sup_n \text{Var}_{\Delta_n} m < \infty$, является $L^p(\mathbb{R})$ -мультипликатором Фурье ($\text{Var}_{\Delta_n} m$ — вариация функции m на Δ_n) [9]. Классическим примером множества, обладающего свойством $LP(p)$ при всех p , $1 < p < \infty$, является $\{\pm 2^k, k \in \mathbb{Z}\}$ [7]. Мы используем следующий факт: существует (непустое) совершенное множество F , обладающее свойством $LP(p)$ при всех p , $1 < p < \infty$. Существование такого множества анонсировано в [15]; его несложно построить, исходя из сравнительно недавно полученной Харе и Клемешем [10] теоремы о декомпозиции Литлвуда–Пэли в $\mathbb{Z}$.

Фиксируем такое F . Беря при необходимости порцию множества F , можно считать, что F содержится в некотором интервале длины 2π .

Положим $E = \{e^{it}, t \in F\}$. С учетом известной связи между мультипликаторами Фурье $M_p(\Gamma)$ на группах $\Gamma = \mathbb{R}$ и $\Gamma = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (см. [6, 8]) для доказательства теоремы остается лишь построить произведение Бляшке B с нулями, накапливающимися к E , такое, что его вариации $\text{Var}_{J_n} B$ на дугах J_n , $n = 1, 2, \dots$, дополнительных к E , равномерно ограничены.

Такое произведение Бляшке можно построить для любого замкнутого нигде не плотного множества $E \subset \mathbb{T}$. Действительно, при $n = 1, 2, \dots$ пусть $e^{i\alpha_n}$ и l_n — соответственно центр дуги J_n и длина хорды, стягивающей J_n . Выберем r_n , $0 < r_n < 1$, так, чтобы $1 - r_n^2 \leq l_n^3$, и положим $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\overline{\{z_n\}_{n=1}^\infty} \cap \mathbb{T} = E$. Пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$.

Фиксируем k и рассмотрим дугу J_k . Имеем

$$\frac{zB'(z)}{B(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - r_n^2}{|z - z_n|^2}, \quad z \in J_k. \quad (10)$$

Заметим, что если $z \in J_k$ и $n \neq k$, то $|z - z_n| \geq l_n/2$ и, следовательно,

$$\sum_{n \neq k} \frac{1 - r_n^2}{|z - z_n|^2} \leq \sum_{n \neq k} \frac{l_n^3}{(l_n/2)^2} \leq 4 \sum_n l_n \leq 4 \cdot 2\pi,$$

откуда

$$\int_{J_k} \sum_{n \neq k} \frac{1 - r_n^2}{|z - z_n|^2} |dz| \leq 4 \cdot 2\pi |J_k| \leq 16\pi^2. \quad (11)$$

Вместе с тем

$$\int_{J_k} \frac{1 - r_k^2}{|z - z_k|^2} |dz| = \text{Var}_{J_k} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \leq \text{Var}_{\mathbb{T}} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} = 2\pi, \quad (12)$$

и из (11) и (12) получаем (см. (10))

$$\text{Var}_{J_k} B = \int_{J_k} |B'(z)| |dz| = \int_{J_k} \left| \frac{zB'(z)}{B(z)} \right| |dz| \leq 16\pi^2 + 2\pi.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Представляется правдоподобным, что если спектр сингулярной внутренней функции S имеет положительную меру Лебега на $\mathbb{T}$, то $S \notin M_p^+(D)$, $p \neq 2$. То же касается произведений Бляшке, множество предельных точек нулей которых имеет положительную меру². Вероятно, это следует из свойства существенной непрерывности мультипликаторов Фурье: если $g \in M_p(\mathbb{T})$ при некотором $p \neq 2$, то g существенно непрерывна почти всюду [15] (см. также [16]). Здесь существенная непрерывность в точке t означает, что

$$\text{ess sup}_{\theta: |t-\theta| < \delta} |g(t) - g(\theta)| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow +0.$$

2. Неясно, существуют ли внутренние функции, принадлежащие $M_{p_1}^+(D)$ и не принадлежащие $M_{p_2}^+(D)$ при $1 < p_2 < p_1 < 2$. Ни один из изложенных выше результатов не дискриминирует различные значения p (см., например, следствие 3).

²Примечание при корректуре: оба предположения верны, детали будут изложены в другой публикации.

3. Наконец отметим, что все изложенные результаты имеют прямые аналогии для внутренних функций в верхней полуплоскости и мультипликаторов $M_p^+(\mathbb{C}^+)$, естественно связанных с мультипликаторами Фурье на прямой. При этом в теореме 3 следует полагать, что z_n некасательно стремятся к 0, оставаясь в замкнутой правой полуплоскости; аналогом условия (1) является условие $\sum_{n: |z_n| < \varepsilon} |z_n| = O(\varepsilon)$.

Я благодарен С. С. Акбарову, сделавшему ряд замечаний, способствовавших улучшению рукописи.

Я благодарен также следующим частным лицам, в течение продолжительного времени совместно оказывавшим мне регулярную бескорыстную финансовую помощь: И. А. Синелобову, А. Б. Сивкову и А. А. Маркову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов С. А. Мультипликативные свойства степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p . ДАН СССР, **254**, № 6, 1301–1306 (1980).
2. Вербицкий И. Э. О мультипликаторах пространств l_A^p . Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 3, 67–68 (1980).
3. Vinogradov S. A. Multiplicative properties of l_A^p . In: Linear and Complex Analysis Problem Book, Lect. Notes in Math., Vol. 1034, Springer-Verlag, 1984, pp. 572–574.
4. Виноградов С. А. Мультипликаторы степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p . Зап. научн. сем. ЛОМИ, **39**, 30–39 (1974).
5. Lebedev V. Inner functions and l^p -multipliers. British–Russian Workshop in Functional Analysis, Euler Int. Math. Inst., St. Peterburg, Oct. 13–17, Abstracts, 1996.
6. De Leew K. On L^p -multipliers. Ann. Math., **81**, 364–379 (1965).
7. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, М., 1973.
8. Jodeit M. (Jr.) Restrictions and extensions of Fourier multipliers. Studia Math., **34**, 215–226 (1970).
9. Sjögren P., Sjölin P. Littlewood–Paley decompositions and Fourier multipliers with singularities on certain sets. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **31**, No. 1, 157–175 (1981).
10. Hare K., Klemes I. On permutations of lacunary intervals. Trans. Amer. Math. Soc., **347**, No. 10, 4105–4127 (1995).
11. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.
12. Никольский Н. К. О пространствах и алгебрах теплицевых матриц, действующих в l^p . Сиб. матем. ж., **7**, 146–158 (1966).
13. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
14. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Мир, М., 1976.
15. Lebedev V., Olevskii A. Bounded groups of translation invariant operators. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **322**, 143–147 (1996).
16. Lebedev V., Olevskii A. Idempotents in Fourier multipliers algebra. Geometric and Functional Analysis (GAFA), **4**, No. 5, 540–544 (1994).
17. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. Наука, М., 1978.
18. Newman D. J., Shapiro H. S. The Taylor coefficients of inner functions. Michigan Math. J., **9**, 249–255 (1962).